ічних середовищ, що знаходяться у стані повзучості із швидкостями, які залежать від структурних особливостей масиву та можливих геофізичних впливів.

Література

1. *Вижва С.А., Маслов Б.П., Продайвода Г.Т.* Эффективные упругие свойства нелинейных многокомпонентных геологических еред // Геофизический журнал. — 2005. — №6, 27:86-96.
2. *Теркот Д., Шуберт Дж.* Геологические приложения физики сполошных сред. — Мир, Москва, 1985.
3. *Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д.* Математическая теория пластичности. — Физматлит, Москва, 2003.
4. *Маслов Б.П.* Концентрация напряжений возле включений в упруго-вязком материале при двумерном статическом нагружении. // Вісн. Дон. ун-ту: Природничі науки. — 2066. — №1. — С. 102-105.
5. *Маслов Б.П., Ляшенко Я.Г.* Концентрація напружень в ізотропних в'язкопружних композитах з мікротріщинами. // Вісник Дон. ун-ту: Природничі науки. — 2002. — №2. — С. 50-53.
6. *Masloy B.P.* Thermal-stress concentration near inclusions in viscoelastic random composites // Journal of Engineering Mathematics. — 2008. N61. — P. 339-355.

УДК 539.3

НАПІВАНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИ РОЗРАХУНКУ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Доктор технічних наук Марчук О.В.,
доктор технічних наук Рассказов О.О.,
Ільченко Я.Л.,
Гнєдаш С.В.

Розроблено варіант напіваналітичного метода скінченних елементів стосовно розрахунку циліндричних оболонок в осесиметричному напружено-деформованому стані. В плані конструкції шукані функції апроксимуються лінійними поліномами, а за товщиною розшукуються на основі розв'язання відповідної системи диференціальних рівнянь. Запропонована методика демонструє задовільний збіг результатів розрахунку при збільшенні щільності розбиття конструкції на скінченні елементи.

The variant of semianalytical method of finite elements for computation of cylindrical shells at the axisymmetric stress-strain state is developed. In the plan of construction the functions sought after are approximated by linear polynomials, and on a thickness are searched on the basis of decision of the proper system of the differential evening. The offered method demonstrates the satisfactory coincidence of results of computation at the increase of closeness of laying of construction out on finite elements.

Постановка проблеми. В останні роки широкого розвитку набувають різні схеми напіваналітичного методу скінченних елементів[1,2]. Це обумовлено з одного боку необхідністю більш точного розрахунку конструкцій, що мають суттєво просторовий характер напружено-деформованого стану, з другого боку можливістю сучасних комп'ютерів та відповідних засобів програмування.

В цьому повідомлені розроблено варіант напіваналітичного методу скінченних елементів стосовно розрахунку циліндричних оболонок в осесиметричному напружено-деформованому стані.

Введемо наступну апроксимацію шуканих функцій переміщень і напруг в плані скінченного елемента:

$$U_1^{(k)}(x,z)=\varphi_1(x)v_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)v_2^{(k)}(z);$$

$$U_3^{(k)}(x,z)=\varphi_1(x)w_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)w_2^{(k)}(z);$$

$$\sigma_{13}^{(k)}(x,z)=\varphi_1(x)\tau_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\tau_2^{(k)}(z);$$

$$\sigma_{33}^{(k)}(x,z)=\varphi_1(x)\sigma_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\sigma_2^{(k)}(z); \qquad (1)$$

де $\varphi_1(x)=1-\frac{x}{l}$; $\varphi_2(x)=\frac{x}{l}$; l – довжина скінченного елемента; k – номер шару; $v_i^{(k)}(z)$, $w_i^{(k)}(z)$ $\tau_i^{(k)}(z)$ $\sigma_i^{(k)}(z)$ — шукані функції розподілу переміщень і напруг в i -у вузлі (координата x направлена вздовж оболонки, z — за її товщиною).

Компоненти тензора деформацій визначаємо на основі співвідношень Коші.

$$e_{11}^{(k)}=\varphi_{1,1}(x)v_1^{(k)}(z)+\varphi_{2,1}(x)v_2^{(k)}(z);$$

$$e_{22}^{(k)}=\frac{1}{r^{(k)}}(\varphi_1(x)w_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)w_2^{(k)}(z));$$

$$e_{33}^{(k)}=\varphi_1(x)w_{1,3}^{(k)}(z)+\varphi_2(x)w_{2,3}^{(k)}(z);$$

$$2e_{13}^{(k)}=\varphi_1(x)v_{1,3}^{(k)}(z)+\varphi_2(x)v_{2,3}^{(k)}(z)+\varphi_{1,1}(x)w_1^{(k)}(z)+\varphi_{2,1}(x)w_2^{(k)}(z). \qquad (2)$$

Поздовжні напруги знаходимо із закону Гука

$$\sigma_{11}^{(k)}=B_{11}^{(k)}\left(\varphi_{1,1}(x)v_1^{(k)}(z)+\varphi_{2,1}(x)v_2^{(k)}(z)\right)+B_{12}^{(k)}\frac{1}{r^{(k)}}(\varphi_1(x)w_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)w_2^{(k)}(z))+$$

$$+B_{13}^{(k)}\left(\varphi_1(x)\sigma_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\sigma_2^{(k)}(z)\right).$$

$$\sigma_{22}^{(k)}=B_{21}^{(k)}\left(\varphi_{1,1}(x)v_1^{(k)}(z)+\varphi_{2,1}(x)v_2^{(k)}(z)\right)+B_{22}^{(k)}\frac{1}{r^{(k)}}+B_{22}^{(k)}\frac{1}{r^{(k)}}(\varphi_1(x)w_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)w_2^{(k)}(z))+$$

$$+B_{23}^{(k)}\left(\varphi_1(x)\sigma_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\sigma_2^{(k)}(z)\right) \qquad (3)$$

Розв`язувальну систему диференціальних рівнянь рівноваги скінченного елемента отримаємо з варіаційного принципу Рейсснера

$$\delta R^{(k)}-\delta A_1^{(k)}=0. \qquad (4)$$

Тут $\delta R^{(k)}$ — варіація функціонала Рейсснера; $\delta A_1^{(k)}$ — варіація роботи зовнішніх сил.

Варіація функціонала Рейсснера має вигляд

$$\delta R^{(k)}=\int_l\int_{a_{k-1}}^{a_k}\Big\{B_{11}^{(k)}\left(\varphi_{1,1}(x)v_1^{(k)}(z)+\varphi_{2,1}(x)v_2^{(k)}(z)\right)+$$

$$+B_{12}^{(k)}\frac{1}{r^{(k)}}(\varphi_1(x)w_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)w_2^{(k)}(z))+$$

$$+B_{13}^{(k)}\left(\varphi_1(x)\sigma_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\sigma_2^{(k)}(z)\right)\Big]\delta\left(\varphi_{1,1}(x)v_1^{(k)}(z)+\varphi_{2,1}(x)v_2^{(k)}(z)\right)+$$

$$\Big[B_{21}^{(k)}\left(\varphi_{1,1}(x)v_1^{(k)}(z)+\varphi_{2,1}(x)v_2^{(k)}(z)\right)+B_{22}^{(k)}+\frac{1}{r^{(k)}}\left(\varphi_1(x)w_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)w_2^{(k)}(z)\right)+$$

$$+B_{23}^{(k)}\left(\varphi_1(x)\sigma_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\sigma_2^{(k)}(z)\right)\Big]\delta\frac{1}{r^{(k)}}\left(\varphi_1(x)w_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)w_2^{(k)}(z)\right)+$$

$$+\left(\varphi_1(x)\sigma_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\sigma_2^{(k)}(z)\right)\delta\left(\varphi_1(x)w_{1,3}^{(k)}(z)+\varphi_2(x)w_{2,3}^{(k)}(z)\right)+$$

$$+\Big[B_{13}^{(k)}\left(\varphi_{1,1}(x)v_1^{(k)}(z)+\varphi_{2,1}(x)v_2^{(k)}(z)\right)+B_{23}^{(k)}+\frac{1}{r^{(k)}}\left(\varphi_1(x)w_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)w_2^{(k)}(z)\right)+$$

$$+\left(\varphi_1(x)w_{1,3}^{(k)}(z)+\varphi_2(x)w_{2,3}^{(k)}(z)\right)-$$

$$-B_{33}^{(k)}\left(\varphi_1(x)\sigma_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\sigma_2^{(k)}(z)\right)\Big]\delta\left(\varphi_1(x)\sigma_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\sigma_2^{(k)}(z)\right)+$$

$$+\left(\varphi_1(x)\tau_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\tau_2^{(k)}(z)\right)\delta\left(\varphi_1(x)v_{1,3}^{(k)}(z)+\varphi_2(x)v_{2,3}^{(k)}(z)+\right.$$

$$\left.+\varphi_{1,1}(x)w_1^{(k)}(z)+\varphi_{2,1}(x)w_2^{(k)}(z)\right)+$$

$$\Big(\varphi_1(x)v_{1,3}^{(k)}(z)+\varphi_2(x)v_{2,3}^{(k)}(z)+\varphi_{1,1}(x)w_1^{(k)}(z)+\varphi_{2,1}(x)w_2^{(k)}(z)-$$

$$\varphi_1(x)\tau_1^{(k)}(z)/G_{13}^{(k)}+\varphi_2(x)\tau_2^{(k)}(z)/G_{13}^{(k)}\Big)\delta\left(\varphi_1(x)\tau_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\tau_2^{(k)}(z)\right)\Big\}dzdl\,. \quad (5)$$

Варіація роботи зовнішніх сил має вигляд

$$\delta A_1^{(k)}=\int_l\Big[q_{11}^{(k)}\delta\left(\varphi_1(x)v_1^{(k)}(a_{k-1})+\varphi_2(x)v_2^{(k)}(a_{k-1})\right)+$$

$$+q_{12}^{(k)}\delta\left(\varphi_1(x)v_1^{(k)}(a_k)+\varphi_2(x)v_2^{(k)}(a_k)\right)+$$

$$+q_{11}^{(k)}\delta\left(\varphi_1(x)w_1^{(k)}(a_{k-1})+\varphi_2(x)w_2^{(k)}(a_{k-1})\right)+$$

$$+q_{12}^{(k)}\delta\left(\varphi_1(x)w_1^{(k)}(a_k)+\varphi_2(x)w_2^{(k)}(a_k)\right)\Big]dL\,. \quad (6)$$

Після варіювання одержуємо диференціальні рівняння рівноваги напіваналітичного скінченного елемента шаруватої плити

$$\begin{bmatrix} [k_{00}]_{,3} & [k_{01}] & -[k_{00}]/G_{13}^{(k)} & [0] \\ [k_{01}]B_{13}^{(k)} & [k_{00}]_{,3}+[k_{00}]\frac{1}{r^{(k)}}B_{13}^{(k)} & [0] & -[k_{00}]B_{33}^{(k)} \\ -[k_{11}]B_{11}^{(k)} & -[k_{10}]\frac{1}{r^{(k)}}B_{12}^{(k)} & [k_{00}]_{,3} & -[k_{10}]B_{13}^{(k)} \\ -[k_{01}]\frac{1}{r^{(k)}}B_{21}^{(k)} & -[k_{00}]\frac{1}{(r^{(k)})^2}B_{22}^{(k)} & -[k_{10}] & [k_{00}]_{,3}-[k_{00}]\frac{1}{r^{(k)}}B_{13}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{v^{(k)}(z)\} \\ \{w^{(k)}(z)\} \\ \{\tau^{(k)}(z)\} \\ \{\sigma^{(k)}(z)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Тут $[k_{00}]=\begin{bmatrix} \frac{l}{3} & \frac{l}{6} \\ \frac{l}{6} & \frac{l}{3} \end{bmatrix}$; $[k_{10}]=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$; $[k_{11}]=\begin{bmatrix} \frac{1}{l} & -\frac{1}{l} \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix}$;

$$[k_{01}]=[k_{10}]^T;\ \{v^{(k)}\}^T=\{v_1^{(k)}(z),v_2^{(k)}(z)\};\ \{w^{(k)}\}^T=\{w_1^{(k)}(z),w_2^{(k)}(z)\};$$

$$\{\tau^{(k)}\}^T=\{\tau_1^{(k)}(z),\tau_2^{(k)}(z)\};\ \{\sigma^{(k)}\}^T=\{\sigma_1^{(k)}(z),\sigma_2^{(k)}(z)\}.$$

Далі формуємо розв'язувальну систему диференціальних рівнянь для шару

$$\begin{bmatrix} [K_{00}]_{,3} & [K_{01}] & -[K_{00}]/G_{13}^{(k)} & [0] \\ [K_{01}]B_{13}^{(k)} & [K_{00}]_{,3}+[K_{00}]\frac{1}{r^{(k)}}B_{13}^{(k)} & [0] & -[K_{00}]B_{33}^{(k)} \\ -[K_{11}]B_{11}^{(k)} & -[K_{10}]\frac{1}{r^{(k)}}B_{12}^{(k)} & [K_{00}]_{,3} & -[K_{10}]B_{13}^{(k)} \\ -[K_{01}]\frac{1}{r^{(k)}}B_{21}^{(k)} & -[K_{00}]\frac{1}{(r^{(k)})^2}B_{22}^{(k)} & -[K_{10}] & [K_{00}]_{,3}-[K_{00}]\frac{1}{r^{(k)}}B_{13}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{v_{i1}^{(k)}(z)\} \\ \{w_{i2}^{(k)}(z)\} \\ \{\tau_{i3}^{(k)}(z)\} \\ \{\sigma_{i4}^{(k)}(z)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

$$\{v_{i1}^{(k)}(z)\}^T=\{\ldots,v_{i1}^{(k)}(z),\ldots\};\quad \{w_{i2}^{(k)}(z)\}^T=\{\ldots,w_{i2}^{(k)}(z),\ldots\};$$

$$\{\tau_{i3}^{(k)}(z)\}^T=\{\ldots,\tau_{i3}^{(k)}(z),\ldots\};\quad \{\sigma_{i4}^{(k)}(z)\}^T=\{\ldots,\sigma_{i4}^{(k)}(z),\ldots\},$$

де i — номери точок, в яких визначаються відповідні шукані функції з урахуванням торцевих граничних умов.

Вектор шуканих функцій може бути представлений таким чином:

$$\begin{bmatrix} \{v_{i1}^{(k)}\} \\ \{w_{i2}^{(k)}\} \\ \{\tau_{i3}^{(k)}\} \\ \{\sigma_{i4}^{(k)}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{i1}^{(k)}(1),\ldots,\mu_{i1}^{(k)}(j),\ldots,\mu_{i1}^{(k)}(J) \\ \mu_{i2}^{(k)}(1),\ldots,\mu_{i2}^{(k)}(j),\ldots,\mu_{i2}^{(k)}(J) \\ \mu_{i3}^{(k)}(1),\ldots,\mu_{i3}^{(k)}(j),\ldots,\mu_{i3}^{(k)}(J) \\ \mu_{i4}^{(k)}(1),\ldots,\mu_{i4}^{(k)}(j),\ldots,\mu_{i4}^{(k)}(J) \end{bmatrix} [C^{(k)}]. \quad (9)$$

Тут $\left[C^{(k)}\right]^T = \left[C_1^{(k)} e^{z\beta_1^{(k)}}, \ldots, C_j^{(k)} e^{z\beta_j^{(k)}}, \ldots, C_J^{(k)} e^{z\beta_J^{(k)}}\right]$; $\beta_j^{(k)}$ – корені характеристичного рівняння розв'язувальної системи диференціальних рівнянь, які можуть бути комплексними; $\mu_{i1}^{(k)}(j), \mu_{i2}^{(k)}(j), \mu_{i3}^{(k)}(j), \mu_{i4}^{(k)}(j)$ – її власні вектори; $C_j^{(k)}$ – постійні інтегрування, визначувані з умов контакту шарів і умов на лицьових поверхнях в кожному вузлі сітки розбиття конструкції на скінченні елементи; J – загальна кількість шуканих функцій в шарі.

В якості прикладу розглянемо тонку ($l/h=20$; $r/h=20$) та товсту ($l/h=3$; $r/h=3$) циліндричну оболонки, що навантажені на внутрішній поверхні навантаженням, що розподілене по закону синуса. Оболонка ізотропна, коефіцієнт Пуассона $\nu=0.3$. Обпирання шарнірне. Результати розрахунку при різній щільності розбиття половини оболонки з урахуванням симетрії на скінченні елементи наведені в таблиці 1 (тонка оболонка) та таблиці 2 (товста оболонка).

Таблиця 1

Величина	2	4	8	16	32
$\bar{U}_1 = U_1(0, \frac{-h/2}{h/2})E/(q_{31}h)$	64.839 3.8377	66.631 5.2043	67.064 5.5570	67.171 5.6458	67.198 5.6680
$\bar{U}_3 = U_3(a/2, \frac{-h/2}{h/2})E/(q_{31}h)$	394.68 388.20	396.43 390.03	396.86 390.48	396.97 390.59	396.99 390.62
$\bar{\sigma}_{11} = \sigma_{11}(a/2, \frac{-h/2}{h/2})/q_{31}$	-3.8336 5.6465	-4.9346 5.3968	-5.2211 5.3264	-5.2934 5.3083	-5.3115 5.3037
$\bar{\sigma}_{22} = \sigma_{22}(a/2, \frac{-h/2}{h/2})/q_{31}$	18.790 20.631	18.549 20.645	18.486 20.646	18.469 20.646	18.465 20.646

Таблиця 2

Величина	2	4	8	16	32
$\bar{U}_1 = U_1(0, \frac{-h/2}{h/2})E/(q_{31}h)$	2.4821 -1.7527	2.5458 -1.7814	2.5620 -1.7884	2.5661 -1.7901	2.5671 -1.7906
$\bar{U}_3 = U_3(a/2, \frac{-h/2}{h/2})E/(q_{31}h)$	5.6249 4.6085	5.6838 4.6656	5.7008 4.6819	5.7052 4.6861	5.7063 4.6872
$\bar{\sigma}_{11} = \sigma_{11}(a/2, \frac{-h/2}{h/2})/q_{31}$	-2.2585 2.2499	-2.5339 2.4371	-2.6062 2.4858	-2.6245 2.4981	-2.6291 2.5012
$\bar{\sigma}_{22} = \sigma_{22}(a/2, \frac{-h/2}{h/2})/q_{31}$	1.2725 1.9917	1.2133 2.0641	1.1985 2.0834	1.1947 2.0883	1.1938 2.0895

Аналітичний розрахунок напружень $\bar{\sigma}_{11}$ для тонкої оболонки на внутрішній поверхні складає -5.317, на зовнішній 5.302; та -2.631, 2.502 на відповідних поверхнях для товстої оболонки. При розбитті товстої оболонки на 8 складових шарів за товщиною уточнення не суттєве, а саме: на внутрішній поверхні -2.681, на зовнішній 2.517.

Таким чином, запропонована методика забезпечує задовільний збіг результатів розрахунку вже при розбитті половини оболонки на чотири елемента.

Література

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел.//К.: НИИ СМ.–1993.–376 с.

2. *Марчук А.В., Пискунов В.Г.* Расчет слоистых конструкций полуаналитическим методом конечных элементов. // Механика композитных материалов.– 1997.–Т.33, N6.– С.781–785.