

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ОРТОТРОПНИХ ПОРОЖНИСТИХ ЕЛІПТИЧНИХ ЦИЛІНДРІВ З ГОФРАМИ В ПОПЕРЕЧНОМУ ПЕРЕРІЗІ

Кандидат фізико-математичних наук Рожок Л.С.

В просторовій постановці дано розв'язання задачі про напружений стан порожнистих еліптичних ортотропних циліндрів з гофрами в поперечному перерізі при певних граничних умовах на торцях. Для розв'язання задачі застосовуються метод відокремлення змінних вздовж твірної та напрямної з використанням дискретних рядів Фур'є і розв'язання одновимірної крайової задачі по товщині стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації. Наводяться результати розрахунків.

Within a spatial statement, the problem on stress-state of hollow orthotropic cylinders of elliptic corrugated cross-section is solved for specific boundary conditions at ends. To solve the problem, it is used the methods of variables separation along the generating line and directing line with use of the discrete Fourier series and solving the 1D boundary problem throughout the thickness by a stable numerical method of discrete orthogonalization. Numerical results are presented.

Вступ. Застосування до розв'язування задач про напружений стан пружних тіл підходу, що базується на використанні дискретних рядів Фур'є, дозволяє отримати розв'язок з достатнім ступенем точності для тіл складної геометрії та структури. В даній статті цей підхід застосовується для розв'язування задач про напружений стан ортотропних порожнистих еліптичних циліндрів з гофрами в поперечному перерізі.

Постановка і метод розв'язування задачі. Даний клас задач розглядаємо в просторовій постановці, взявши за вихідні основні рівняння просторової теорії пружності для ортотропного тіла.

Вирази деформацій через переміщення

$$e_s = \frac{\partial u_s}{\partial s}, \quad e_\psi = \frac{1}{H_2 \omega} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma, \quad e_\gamma = \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma},$$

$$e_{s\psi} = \frac{1}{H_2 \omega} \frac{\partial u_s}{\partial \psi} + \frac{\partial u_\psi}{\partial s}, \quad e_{s\gamma} = \frac{\partial u_\gamma}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial \gamma}, \quad e_{\psi\gamma} = H_2 \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{u_\psi}{H_2} \right) + \frac{1}{H_2 \omega} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \psi}; \quad (1)$$

рівняння рівноваги

$$H_2 \frac{\partial \sigma_s}{\partial s} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \tau_{s\psi}}{\partial \psi} + \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_2 \tau_{s\gamma}) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_2 \tau_{\psi\gamma}) + \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \gamma} + \frac{\partial H_2}{\partial s} \tau_{s\psi} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} (H_2 \sigma_\gamma) + H_2 \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial s} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \psi} - \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \sigma_\psi = 0; \quad (2)$$

співвідношення закону Гука для ортотропного тіла

$$e_s = a_{11} \sigma_s + a_{12} \sigma_\psi + a_{13} \sigma_\gamma, \quad e_\psi = a_{12} \sigma_s + a_{22} \sigma_\psi + a_{23} \sigma_\gamma, \quad e_\gamma = a_{13} \sigma_s + a_{23} \sigma_\psi + a_{33} \sigma_\gamma$$

$$e_{\psi\gamma} = a_{44} \tau_{\psi\gamma}, \quad e_{s\gamma} = a_{55} \tau_{s\gamma}, \quad e_{s\psi} = a_{66} \tau_{s\psi} \quad (3)$$

$$(0 \leq s \leq l; 0 \leq \psi \leq 2\pi; \gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2).$$

На торцях циліндра припускаємо наявність діафрагми абсолютно жорсткої в своїй площині і гнучкої — з неї. Циліндри знаходяться під дією рівномірного навантаження, прикладеного на зовнішній поверхні. Обравши за розв'язувальні функції компоненти напружень і переміщень, після деяких перетворень можна отримати розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних шостого порядку зі змінними коефіцієнтами [1].

Відокремлюємо змінні в напрямку твірної циліндра, подавши розв'язувальні функції та компоненти навантаження у вигляді розвинень в ряди Фур'є вздовж твірної циліндра. Після відокремлення змінних отримуємо систему диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами більш високого порядку. Для відокремлення змінних вздовж напрямної циліндра, вводимо в розв'язувальну систему диференціальних рівнянь доповняльні функції. При цьому отримуємо систему рівнянь, коефіцієнти якої формально не будуть залежати від координати вздовж напрямної циліндра. Подаючи далі розв'язувальні, доповняльні функції та компоненти навантаження у вигляді розвинень в ряди Фур'є вздовж напрямної циліндра, після відокремлення змінних приходимо до одновимірної крайової задачі відносно амплітудних значень зазначених рядів.

Одновимірна крайова задача описується системою звичайних диференціальних рівнянь у вигляді [3]

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\gamma,n,k}}{d\gamma} &= (c_2 - 1)\varphi_{1,k}^1 + \lambda_n \tau_{s\gamma,n,k} - \varphi_{4,k}^1 + b_{22}\varphi_{1,k}^5 - b_{12}\lambda_n \varphi_{1,k}^4 + b_{22}\varphi_{4,k}^3; \\ \frac{d\tau_{s\gamma,n,k}}{d\gamma} &= -c_1 \lambda_n \sigma_{\gamma,n,k} - \varphi_{1,k}^2 - b_{12}\lambda_n \varphi_{1,k}^3 + b_{11}\lambda_n^2 u_{s,n,k} - b_{66}\varphi_{6,k} - (b_{12} + b_{66})\lambda_n \varphi_{4,k}^2; \\ \frac{d\tau_{\psi\gamma,n,k}}{d\gamma} &= -c_2 \varphi_{3,k}^1 - 2\varphi_{2,k}^1 - b_{22}\varphi_{5,k} + (b_{12} + b_{66})\lambda_n \varphi_{3,k}^3 - b_{22}\varphi_{7,k} + b_{66}\lambda_n^2 u_{\psi,n,k}; \\ \frac{du_{\gamma,n,k}}{d\gamma} &= c_4 \sigma_{\gamma,n,k} - c_2 \varphi_{4,k}^2 + c_1 \lambda_n u_{s,k} - c_2 \varphi_{1,k}^3; \\ \frac{du_{s,n,k}}{d\gamma} &= a_{55}\tau_{s\gamma,n,k} - \lambda_n u_{\gamma,n,k}; \quad \frac{du_{\psi,n,k}}{d\gamma} = a_{44}\tau_{\psi\gamma,n,k} - \varphi_{5,k}^2 + \varphi_{2,k}^2, \quad (k = \overline{0, K}; n = \overline{0, N}) \end{aligned} \quad (1)$$

тут

$$\begin{aligned} b_{11} &= a_{22}a_{66}/\Omega; \quad b_{12} = -a_{12}a_{66}/\Omega; \quad b_{22} = a_{11}a_{66}/\Omega; \\ b_{66} &= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)/\Omega; \quad \Omega = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)a_{66}; \\ c_1 &= -(b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23}); \quad c_2 = -(b_{12}a_{13} + b_{22}a_{23}); \quad c_4 = a_{33} + c_1a_{13} + c_2a_{23}. \\ a_{11} &= \frac{1}{E_s}; \quad a_{12} = -\frac{\nu_{s\psi}}{E_\psi} = -\frac{\nu_{\psi s}}{E_s}; \quad a_{13} = -\frac{\nu_{s\gamma}}{E_\gamma} = -\frac{\nu_{\gamma s}}{E_s}; \\ a_{22} &= \frac{1}{E_\psi}; \quad a_{23} = -\frac{\nu_{\gamma\psi}}{E_\psi} = -\frac{\nu_{\psi\gamma}}{E_\gamma}; \quad a_{33} = \frac{1}{E_\gamma}; \quad a_{44} = \frac{1}{G_{\psi\gamma}}; \quad a_{55} = \frac{1}{G_{s\gamma}}; \quad a_{66} = \frac{1}{G_{\psi s}}, \end{aligned}$$

з граничними умовами

$$\gamma = \gamma_p: \quad \sigma_{\gamma,n,k} = 0; \quad \tau_{s\gamma,n,k} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,n,k} = 0; \quad (2)$$

$$\gamma = \gamma_q: \quad \sigma_{\gamma,n,k} = q_{\gamma,n,k}; \quad \tau_{s\gamma,n,k} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,n,k} = 0.$$

Для розв'язування отриманої одномірної крайової задачі застосовуємо стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації. Для визначення значень доповняльних функцій в процесі інтегрування використовуємо ряди Фур'є для функцій, заданих на дискретній множині точок [3].

Основні результати дослідження. На основі викладеного підходу розглянуто задачу про напружений стан порожнистих ортотропних еліптичних циліндрів, з гофрами в поперечному перерізі в залежності від степеня еліптичності циліндрів.

Задачу розв'язано за таких умов частота гофрування $m = 4$; амплітуда гофрів $\alpha = 4$; товщина циліндра $H=4$; довжина циліндра $l=60$; радіус середнього круга $r=40$; показник, що характеризує степінь еліптичності циліндрів $\Delta = 0; 0,1; 0,2$; механічні параметри матеріалу [4] $E_s = 3,68E$; $E_\psi = 2,68E$; $E_\gamma = 1,1E$; $G_{s\psi} = 0,50E$; $G_{\psi\gamma} = 0,41$; $G_{s\gamma} = 0,45E$; $\nu_{s\psi} = 0,105$; $\nu_{\psi\gamma} = 0,431$; $\nu_{\gamma s} = 0,405$.

На рис.1 наведено розподіл полів переміщень u_ψ в середньому перерізі $l=30$ по напрямній циліндра. З графіків, наведених на рис.1 видно, що у випадку, коли $\Delta \ll 0$ значення переміщень збільшуються, в порівнянні з круговим гофрованим циліндром у западині гофрів ($\psi = \pi/4$) в 1,1-1,2 рази та у вершині, що відповідає більшій півосі еліпса ($\psi = 0$) в 2,8-4 рази і в вершині гофрів, що відповідають меншій півосі еліпса ($\psi = \pi/2$) в 1,8-5,8 рази, при цьому в останньому випадку переміщення змінюють знак на протилежний.

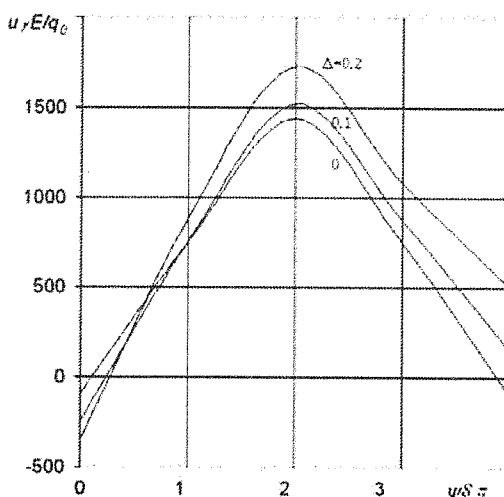


Рис.1 Розподіл переміщень u_ψ вздовж напрямної циліндра:

Таблиця.

Розподіл напружень u_ψ по товщині на напрямній циліндра.

		σ_ψ / q_0				
Д	γ/H	$\theta = 0$	$\theta = \pi/8$	$\theta = \pi/4$	$\theta = 3\pi/8$	$\theta = \pi/2$
0	-1/2	50,96	4,22	-32,39	4,22	50,96
	0	9,20	8,87	5,62	8,87	9,20
	1/4	-23,80	12,06	48,78	12,06	-23,80
0,1	-1/2	48,12	5,36	-32,58	2,06	55,91
	0	8,37	9,35	5,96	7,94	9,46
	1/4	-22,36	11,78	49,95	12,44	-27,52
0,2	-1/2	47,66	3,90	-31,95	0,03	60,17
	0	6,73	9,47	6,99	6,28	8,68
	1/4	-23,58	13,17	52,21	11,43	-32,17

В таблиці наведено значення напружень u_ψ для деяких значень товщини та напрямної циліндра. З таблиці видно, що наявність еліптичності призводить до зменшення максимальних значень напружень в 1,1

рази в зоні $\psi = 0$ на внутрішній поверхні циліндра та до збільшення в 1,1-1,2 рази в перерізі $\psi = \pi/4$ на зовнішній поверхні та в перерізі $\psi = \pi/2$ на внутрішній поверхні циліндра.

Висновок. Таким чином, змінюючи геометричні параметри циліндра, можна впливати на перерозподіл полів переміщень та напружень в порожнистих циліндрах з еліптичним поперечним перерізом, виконаних з ортотропного матеріалу.

Література

1. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Емельянов Н.Г. и др. Статика элементов конструкций.- К.: «А.С.К.», 1999.- 379 с.-(Механика композитов: В 12-ти т; Т.8)
2. Григоренко Я.М., Рожок Л.С. Застосування дискретних рядів Фур'є до розв'язання крайових задач статки пружних тіл неканонічної форми // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2005.-48, №2.-С.78-100.
3. Grigorenko Ya. M., Rozhok L.S. Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders of corrugated elliptic cross-section // J. Eng. Math. — 2006. — 54. — P. 145–157.
4. Лехницький С.Г. Теория упругости анизотропного тела. — М.: Наука, 1977.-415 с.

УДК 539.3

НАГРІВНІ ПОКРИТТЯ ДЛЯ БЕЗПЕЧНОГО ЗИМОВОГО УТРИМАННЯ АВТОМОБІЛЬНИХ ДОРІГ

Володько О.В.

Для безпечного зимового утримання автомобільних шляхів розроблена конструкція нагрівного автодорожнього покриття з монолітним шаром електропровідного бетону, армованого хімічними електропровідними волокнами. Виконані розрахунки розробленої нагрівної конструкції покриття.

For safe winter maintenance of motor-car ways the worked out construction of road-transport coverage of heating is with the monolithic layer of electroconductive concrete reinforced with chemical electrical conductive fibres being used was researched. Calculation by developed heated construction of shell was made.

Постановка проблеми. Альтернативою існуючим традиційним засобам боротьби зі снігозаносами, слизькістю та ожеледицею на покритті є тепловий, зокрема використання покриттів з поверхневими нагрівними шарами. Існуючі нагрівні покриття мають низку технічних недоліків, методики їх розрахунку практично не висвітлені, норми та класифікації — відсутні. Розробка ефективних композитних електропровідних матеріалів — фіброелектробетонів створює основу для проектування нагрівної конструкції автодорожнього покриття з покращеними технологічними та механічними властивостями.

Метою статті є проектування конструкції та розробка методики розрахунку нагрівного автодорожнього покриття з монолітним шаром фіробетону для безпечного зимового утримання автомобільних доріг.

Викладення основного матеріалу. Під дією зимових погодно-кліматичних факторів змінюються транспортно-експлуатаційні характеристики та умови руху дорожніх та аеродромних магістралей: швидкість транспортних засобів знижується у 2–2,5 рази, а їх продуктивність на 30–40%, збільшується собівартість перевезень на 25–30%. Одночасно зимова слизькість є причиною до 40% дорожньо-транспортних пригод та нещасних випадків.

Існуючі традиційні засоби боротьби зі снігозаносами, ожеледицею та слизькістю на поверхні покриттів (механічний, фрикційний, хімічний та інші) мають низку недоліків:

— суттєві економічні витрати (висока вартість протиожеледних матеріалів, транспортні та накладні витрати);

— негативний вплив протиожеледних матеріалів — розчинів, солей, реагентів на матеріал покриття, конструкції транспортних засобів;

— обмеженість умов використання (протиожеледна дія реагентів, солей продуктивна в обмеженому температурному діапазоні, при несталій температурі ефект від їх застосування знижується, обмежується час їх дії);