

— повне врахування конструктивних, геометричних, масо-жорсткісних та демпфуючих властивостей реальної зубчастої передачі.

Крім цього, модель враховує додаткові переміщення елементів зубчастої передачі, що виникають за рахунок:

- кутів закрутки валів присланих мас і робочої машини;
- непаралельності валів шестерні та колеса;
- перекоосу валів шестерні та колеса;
- поздовжніх (осьових) зміщень шестерні та колеса;
- похибки зачеплення у напрямку лінії або площини зачеплення.

### Список використаних джерел

1. *Абрамов Б.М.* Колебания прямозубых зубчатых колес. Харьков, ХГУ, 1968. 175 с.
2. Вибрации механизмов с зубчатыми передачами. Сборник статей / Под ред. М.Д. Генкина и Э.Л. Айрапетова. М., Наука, 1978. 127 с.
3. Вопросы геометрии и динамики зубчатых передач. Сборник статей / Под ред. М.Д. Генкина. М. Наука, 1964. 135 с.
4. *Генкин М.Д., Гринкевич В.К.* Динамические нагрузки в передачах с косозубыми колесами. М., Изд. АН СССР, 1961. 118 с.
5. Динамические процессы в механизмах с зубчатыми передачами. Сборник статей / Под ред. М.Д. Генкина и Э.Л. Айрапетова. М., Наука, 1976. 155 с.

УДК 539.3

## СТІЙКІСТЬ ШАРУВАТОЇ ЗАМКНЕНОЇ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПІД ДІЄЮ РІВНОМІРНОГО ЗОВНІШНЬОГО ТИСКУ

*Доктор технічних наук Рассказов О.О.,  
кандидат технічних наук Бондарський О.Г.*

*Розв'язана задача стійкості замкненої шаруватої сферичної оболонки на основі лінеаризованих рівнянь у формі змішаного методу в прямокутних координатах. Наведені результати числових розрахунків для сферичних оболонок різної будови.*

*The stability problem of the closed layered spherical shell is solved on the basis of the linearized equations in form of the mixed method in rectangular coordinates. The results of numerical calculations for the spherical shells of different structure are presented.*

В останній час тонкостінні шаруваті конструкції, в тому числі оболонки, знайшли широке застосування в різних галузях сучасної техніки. Розрахунок таких конструкцій є досить складною задачею, основу розв'язку якої повинні складати теорії, що враховують низький опір матеріалу поперечному зсуву та нормальному обтисненню, а також ортотропію шарів[1].

Використовується варіант уточненої теорії шаруватих оболонок, який враховує вплив поперечного зсуву та нормального обтиснення шарів, їх ортотропію, довільну кількість і взаємне розташування при суттєвих відмінностях у товщинах і пружних властивостях [1]. В основу уточненої теорії покладені гіпотези про розподіл за товщиною поперечних дотичних напружень, нормальних поперечних деформацій і поперечного нормального напруження для всього пакету в цілому.

**Постановка задачі та методика її розв'язування.** Розглядається сферична оболонка, яка зіставлена із ізотропних шарів, що симетрично розташовані відносно серединної поверхні без урахування впливу поперечного обтиснення. Запишемо лінеаризовані рівняння стійкості пологих оболонок у формі змішаного методу в прямокутних координатах [1]:

$$\frac{F_{11}}{F_{11}^2 - F_{12}^2} \nabla^2 \nabla^2 \Phi - \nabla_k^2 w = 0;$$

$$\nabla_k^2 \Phi + D_{11} \nabla^2 \nabla^2 w - P_{1111} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 \psi_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla^2 \psi_2 \right) - \nabla_N^2 w = 0;$$

$$- P_{1111} \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 w + P_{1111} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2} + P_{1166} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_2^2} + (P_{1111} - P_{1166}) \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_1 \partial x_2} - P_{551} \psi_1 = 0;$$

$$- P_{1111} \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla^2 w + (P_{1111} - P_{1166}) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + P_{1166} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_1^2} + P_{1111} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_2^2} - P_{551} \psi_2 = 0, \quad (1)$$

де  $\nabla_k^2 = k_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + k_1 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ ;  $\nabla_N^2 = N_{11}^0 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2N_{12}^0 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + N_{22}^0 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ ,  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$  – оператор Лапласа;  $k_1$ ,

$k_2$  – головні кривини оболонки;  $N_{11}^0$ ,  $N_{22}^0$ ,  $N_{12}^0$  – зусилля які відповідають основному напруженому стану.

Виразимо функції  $w$ ,  $\psi_1, \psi_2$  через дві інші функції  $F$  і  $\Psi$  за допомогою виразів:

$$w = P_{1111} \nabla^2 F - P_{551} F;$$

$$\psi_1 = P_{1111} \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 F + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2};$$

$$\psi_2 = P_{1111} \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla^2 F - \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}, \quad (2)$$

і отримаємо систему розрахункових рівнянь у вигляді:

$$\frac{F_{11}}{F_{11}^2 - F_{12}^2} \nabla^2 \nabla^2 \Phi - P_{1111} \nabla_k^2 \left( \nabla^2 - \frac{P_{551}}{P_{1111}} \right) F = 0;$$

$$\nabla_k^2 \Phi + (D_{11} P_{1111} - P_{1111}^2) \nabla^2 \nabla^2 \left( \nabla^2 - \frac{D_{11} P_{551}}{D_{11} P_{1111} - P_{1111}^2} \right) F - P_{1111} \nabla_N^2 \left( \nabla^2 - \frac{P_{551}}{P_{1111}} \right) F = 0;$$

$$\nabla^2 \Psi - \frac{P_{551}}{P_{1111}} \Psi = 0. \quad (3)$$

Задачу стійкості замкнутої сферичної оболонки під дією рівномірного зовнішнього тиску інтенсивності  $q$  можна розв'язувати на основі системи рівнянь (3), оскільки в межах однієї вм'ятини оболонку можна розглядати як пологу [2].

Для розглядуваної сферичної оболонки:

$$k_1 = k_2 = 1/R, \quad N_{11}^0 = N_{22}^0 = qR/2,$$

$$N_{12}^0 = 0, \quad \nabla_k^2 = \frac{1}{R} \nabla^2; \quad \nabla_N^2 = -\frac{qR}{2} \nabla^2,$$

де  $R$  - радіус оболонки.

Розв'язок системи рівнянь (3) будемо шукати у вигляді [3]:

$$\Phi = A_1 \varphi; \quad F = A_2 \varphi; \quad \Psi = A_3 \varphi. \quad (4)$$

Тут  $\varphi$  - задовольняє рівнянню

$$\nabla^2 \varphi - \lambda \varphi = 0,$$

де  $A_i$  та  $\lambda$  шукані невідомі сталі.

Підставивши розв'язок (4) у рівняння (3), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів  $A_1, A_2, A_3$  виду:

$$\begin{aligned} \frac{F_{11}}{F_{11}^2 - F_{12}^2} \lambda^2 A_1 - P_{1111} \frac{\lambda}{R} \left( \lambda - \frac{P_{551}}{P_{1111}} \right) A_2 &= 0; \\ \frac{\lambda}{R} A_1 + \left[ (D_{11} P_{1111} - P_{111}^2) \left( \lambda - \frac{D_{11} P_{551}}{D_{11} P_{1111} - P_{111}^2} \right) \lambda^2 - P_{1111} \frac{qR\lambda}{2} \left( \lambda - \frac{P_{551}}{P_{1111}} \right) \right] A_2 &= 0; \\ \left( \lambda - \frac{P_{551}}{P_{1111}} \right) A_3 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Прирівнюючи до нуля визначник цієї системи, отримаємо рівняння для знаходження критичного значення величини зовнішнього тиску  $q_{кр}$ . Відповідно до перших двох рівнянь отримаємо

$$q_{кр} = \min_{m,n} \left\{ \frac{2 \frac{F_{11}^2 - F_{12}^2}{F_{11}} - \frac{2\lambda (D_{11} P_{1111} - P_{111}^2) \lambda - D_{11} P_{551}}{R (P_{1111} \lambda - P_{551})}}{R^3} \right\}. \quad (6)$$

Останнє рівняння розглянемо окремо. Якщо  $A_3 \neq 0$  відповідно і  $\Psi \neq 0$ , отже  $\lambda = P_{551}/P_{1111}$ . Це значення підставимо у вираз який стоїть під знаком  $\min$  у (6). Якщо значення  $q^*$  буде менше  $q_{кр}$ , яке отримане за формулою (6), тоді  $q^*$  приймемо як  $q_{кр}$ . У протилежному випадку вважатимемо  $\Psi \equiv 0$ .

**Результати числових досліджень та їх аналіз.** Результати числових розрахунків по визначенню критичних зусиль  $q_{кр}$  виконані для сферичних оболонок різної будови по товщині: тришарових та п'ятишарових – при однаковій загальній кількості матеріалу несучих шарів і заповнювача і загальній товщині  $h$ . Розрахункові дані наведені у вигляді графіків у напівлогарифмічних координатах на рис. 1 і 2.

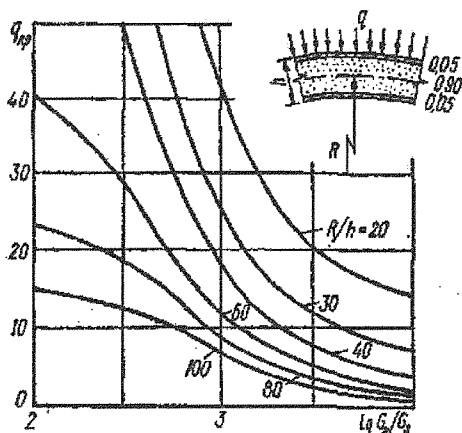


Рис. 1. Залежність  $q_{кр}$  від  $G_H/G_3$   
для тришарової оболонки

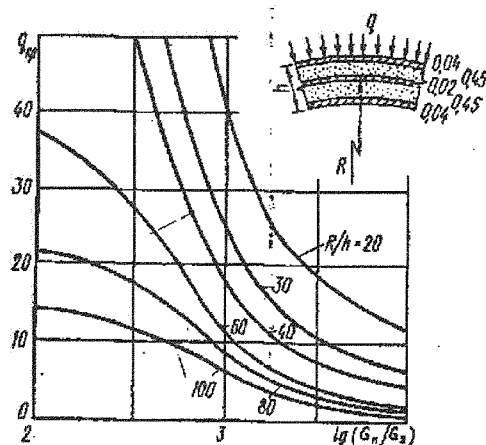


Рис. 2. Залежність  $q_{кр}$  від  $G_H/G_3$   
для п'ятишарової оболонки

Аналіз наведених графіків показує, що залежність  $q_{кр}$  від параметрів  $G_H/G_3$  і  $h/R$  носить якісно однаковий характер для обох випадків будови оболонки по товщині.

Величина  $q_{кр}$  різко зменшується зі збільшенням  $G_H/G_3$  для порівняно товстих оболонок ( $h/R \geq 1/40$ ).

Із зменшенням відносної товщини оболонки ( $h/R < 1/40$ ) залежність  $q_{кр}$  від  $G_H/G_3$  стає більш плавною. При  $h/R = 1/20$  відносне падіння  $q_{кр}$  із зміною  $G_H/G_3$  від  $10^2$  до  $10^3$  складає 85%, а при  $h/R = 100$  ця величина рівна 56%. Указані значення у відсотках залишаються приблизно такими ж для оболонок обох типів.

**Висновки.** В роботі розв'язана задача стійкості замкненої шаруватої сферичної оболонки на основі лінеаризованих рівнянь у формі змішаного методу в прямокутних координатах. Наведені результати числових розрахунків для сферичних тришарових та п'ятишарових оболонок, отримані нові механічні закономірності залежності критичних зусиль від відносної довжини оболонки і параметру  $\mu$ . Показано, що ця залежність носить якісно однаковий характер для обох випадків будови оболонки по товщині. Із зменшенням відносної товщини оболонки залежність критичних зусиль від  $G_H/G_3$  стає більш плавною.

### Література

1. Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1986. – 191с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Госфизматлит, 1963. – 880 с.
3. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение к технике. – М., Л.: Гостехиздат, 1949. – 784 с.