УДК 539.3

ОСЕСИМЕТРИЧНІ ДЕФОРМАЦІЇ ДЛЯ ЦИЛІНДРА, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ

Гревцев О.К

Приводиться рішення для обертового кругового полого циліндра або суцільного вала кінцевої довжини, зокрема диска, без яких-небудь спеціальних гіпотез, використовуваних у завданнях плоско-напруженного стану або плоскої деформації, крім загальних гіпотез лінійної теорії пружності. При дії центробіжної сили з'являється температурне поле, що залежить від кутової швидкості обертання. Отримано формули для напруг, що збігаються з напругами для розглянутого завдання, знайденими на основі плоско-напруженного стану, які справедливі й для циліндра кінцевої довжини. Приводяться приклади, у яких визначаються напруги й величина температурної зміни, що залежить від дії центробіжної сили, для обертового порожнього циліндра кінцевої довжини й обертового суцільного диска постійної товщини.

The solution for a rotary hollow cylinder or a solid shaft of a finite length, in particular, for a disk, without application of any special hypotheses, used in the tasks of a flat-stressed state, or a flat deformation, except for general hypotheses of the linear theory of elasticity, is given. It is demonstrated, that at the application of a centrifugal force, there appears a thermal field depending on the angular velocity of rotation. Formulas for stresses coinciding with the stresses for the considered task found out based on studying a flat-stressed state are obtained. It was proved, that they are valid for the cylinder of a finite length too.Numerous examples in which the stresses and the value of a thermal change depending on the centrifugal force activity are defined, with reference to the rotary hollow cylinder of a finite length and a rotary solid disk of a constant thickness are given.

Вступ. Відомо [1, 2], що в літературі відсутнє точне розв’язання задачі теорії пружності для кругового циліндра з центральним отвором, що обертається, і тонкого диска. Задачу для довгого циліндра, що обертається, чи суцільного вала, розв’язують у рамках задачі про плоску деформацію. Для тонкого диска, що обертається, задача розв’язується на основі гіпотез плоско-напруженого стану [2].

Постановка проблеми. Є рішення задачі про диск, що обертається, з точки зору теорії пружності для тіл обертання, навантажених осесиметрично [1], але і в цьому разі граничні умови для нормальної напруги на циліндричних поверхнях виконуються інтегрально, тобто в середньому, і тільки для тонкого диска. Це рішення не можна використати для циліндра.

Основна частина.

Об’ємні сили для циліндра, що обертається, представлені радіальною центробіжною силою:

$$F_r = \rho\omega^2 r, \tag{1}$$

де ρ - щільність матеріалу циліндра,

ω- кутова швидкість,

r – радіальна координата.

Якщо деформоване тіло має форму тіла обертання і навантажене осесиметрично, тоді загальні рівняння теорії пружності спрощуються. У циліндричних координатах (r, φ, z) з відповідними компонентами переміщення u_1 , u_2 та u_3 компонент u_2 перетворюється на нуль за умови симетрії, а компоненти $u_1(r,\ z)$ – радіальний та $u_3(r, z)$ – осьовий не залежать від кута φ[1]. Тоді компоненти напруг: σ_{11} - радіальне, σ_{22} - окружне, осьове - σ_{33} і напруга зсуву σ_{13} також не залежать від полярного кута φ. Напруги σ_{12} і σ_{23} дорівнюють нулю через симетрію.

Рівняння рівноваги і напруги[1] набудуть такого вигляду:

$$\sigma_{11,1}+\sigma_{13,3}+\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{r}+\rho\omega^2 r\approx 0 \qquad (2)$$

$$\sigma_{13,1}+\sigma_{33,3}+\sigma_{13}\frac{1}{r}=0$$

Тут індекс після коми означає похідну по відповідній координаті.

Відносні деформації можуть бути виражені через компоненти переміщень по формулах[1]:

$$e_{11}=u_{1,1};\ e_{22}=1/r\,u_1;\ e_{33}=u_{3,3};\ 2e_{13}=u_{1,3}+u_{3,1} \qquad (3)$$

Деформація суцільного пружного середовища не завжди є суто механічним явищем. Майже кожна деформація супроводжується тепловими ефектами, і тому спроба описати поведінку середовища за суто механічною схемою, ігноруючи термомеханічну взаємодію всередині середовища, не завжди здійсненна [3].

Нехай у недеформованому і ненапруженому стані циліндр має температуру T_o, зокрема нуль. Внаслідок дії зовнішніх навантажень, тобто центробіжної сили інерції(1), циліндр деформуватиметься, а його температура зміниться. Зміна температури складе:

$\theta=$ T-T_o, де T – абсолютна температура точки тіла. У лінійній теорії пружності вважають, що деформації і зміни температури $\theta\ (r,z)$ малі.

Компоненти напруг визначають за законом Гука, в котрому необхідно врахувати додатково, з огляду на вищесказане, зміну температури у вигляді температурних членів[4].

$$\sigma_{ij}=2G\left[e_{ij}+\frac{\nu}{1-2\nu}e\delta_{ij}-\frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha\theta\delta_{ij}\right](ij=1,2,3) \qquad (4)$$

$$\sigma_{12}=\sigma_{23}=0$$

де δ_{ij} - символ Кронекера;

$e=e_{11}+e_{22}+e_{33}$ - об’ємне розширення;

ν - коефіцієнт Пуассона;

$G=E/2\ (1+\nu)$ - модуль зсуву;

E - модуль пружності;

α - коефіцієнт лінійного теплового розширення.

Підставляючи деформації (3) у напруги (4), а потім у рівняння (2), одержимо рівняння рівноваги у переміщеннях:

$$\Delta u_1-\frac{1}{r^2}u_1+\frac{1}{1-2\nu}e_{,1}-\frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\alpha\theta_{,1}+\frac{1}{G}\rho\omega^2 r=0 \qquad (5)$$

$$\Delta u_3+\frac{1}{1-2\nu}e_{,3}-\frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\alpha\theta_{,3}=0$$

Тут $\Delta u_i=u_{i.11}+\frac{1}{r}u_{i,1}+u_{i,33}$ - оператор Лапласа від переміщень u_i (i=1,3).

Для замикання системи рівнянь (5) необхідно додати рівняння теплопровідності [4].

$$\Delta\theta+\frac{1}{\lambda}W=0 \qquad (6)$$

Через W позначено кількість тепла, котра утворюється або поглинається одиницею об’єму тіла за одиницю часу, а λ - коефіцієнт теплопровідності.

На підставі розробленого точного методу розв’язання системи диференційних рівнянь (5) одержано розв’язання задачі, що розглядається у переміщеннях:

$$u_1(r,z)=u(r)-\frac{z^2}{2}\frac{\nu}{2G}\rho\omega^2 r \qquad (7)$$

$$u_3(r,z) = -\frac{\nu}{1-\nu} z \frac{1}{r}(ru)_{,1} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{z^3}{6}\frac{\nu}{G}\rho\omega^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\int_0^z \theta(z)dz,$$

причому:

$$u(r) = -\frac{1-\nu}{2G}\rho\omega^2\frac{r^3}{8} + A_1\frac{r}{2} + A_2\frac{1}{r} \tag{8}$$

радіальні переміщення точок у серединній площині $(z=0)$, а A_1 і A_2-довільні постійні інтегрування. При z = 0 маємо $u_1(r,0) = u(r)$, а u_3=0. Легко переконатися безпосередньою підстановкою переміщень (7) у рівняння (5), що вони є точними рішеннями цих рівнянь.

За переміщеннями (7) знаходимо деформацію (3), а потім за формулами (4) напруги:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu}\left[-\frac{1-\nu}{2G}\rho\omega^2\frac{3+\nu}{1+\nu}\frac{r^2}{8} + A_1\frac{1}{2} - A_2\frac{1-\nu}{1-\nu}\frac{1}{r^2} - \frac{\nu}{2G}\frac{z^2}{2}\rho\omega^2 - \alpha\theta(z)\right] \tag{9}$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu}\left[-\frac{1-\nu}{2G}\rho\omega^2\frac{1+3\nu}{1+\nu}\frac{r}{8} + A_1\frac{1}{2} + A_2\frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{1}{r^2} - \frac{\nu}{2G}\frac{z^2}{2}\rho\omega^2 - \alpha\theta(z)\right] \tag{10}$$

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = 0 \tag{11}$$

Для циліндра з центральним отвором, вільного від зовнішніх поверхневих навантажень, маємо такі граничні умови:

$$\sigma_{11} = 0\text{, при } r = a_1 \text{ та } r = a_2\,. \tag{12}$$

Тут a_1 і a_2 – радіуси внутрішньої і зовнішньої циліндричних поверхонь. Задовольняючи граничні умови (12), одержимо для довільних постійних такі значення:

$$A_1 = \frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{\rho\omega^2}{4G}\frac{3+\nu}{2}\left(a_1^2 + a_2^2\right); \quad A_2 = \frac{\rho\omega^2}{4G}\frac{3+\nu}{4}a_1^2 a_2^2 \tag{13}$$

Крім того, знаходимо величину теплового потоку, що виникає від обертання циліндра і залежить від кутової швидкості ω

$$\theta(z) = -\frac{\nu}{4G\alpha}z^2\rho\omega^2 \tag{14}$$

за даних граничних умов, за відсутності обертання циліндра $(\omega = 0)$ температурна зміна θ дорівнює нулю.

Із термодинаміки [5] відомо, що у процесі деформації може змінюватися температура окремих елементів пружного тіла, внаслідок чого може відбуватися поглинання або виділення тепла пружним ізольованим тілом під час взаємодії тіла з навколишнім середовищем. Ця взаємодія встановлює залежність (14).

Підставляючи довільні постійні (13) у напруги (9)-(10), одержимо:

$$\sigma_{11} = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(a_2^2 - r^2\right)\left(1 - \frac{a_1^2}{r^2}\right) \tag{15}$$

$$\sigma_{22} = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(a_1^2 + a_2^2 + \frac{a_1^2 a_2^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu}r^2\right)$$

Зокрема для суцільного циліндра вважаючи a_1=0, що відповідає A_2=0, одержимо з напруг (15):

$$\sigma_{11} = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(a_2^2 - r^2\right) \tag{16}$$

$$\sigma_{22} = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(a_2^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu}r^2\right)$$

Підставляючи зміну температури (14) у рівняннях теплопровідності (6), знайдемо потужність стоку тепла:

$$W = \frac{\nu\lambda}{2G\alpha}\rho\omega^2$$

що зникає при $\omega = 0$, тобто коли дія інерції припиняється.

Формули (15) – (16) подані у курсах теорії пружності і одержані на підставі гіпотез плоско - напруженого стану [1; 2]. Як видно з вищесказаного, вони справедливі не тільки для тонкого диска, а й для циліндра, що обертається, кінцевої довжини, оскільки одержані для точного розв'язання рівнянь (5) і точного виконання граничних умов [12].

Тут розглядається напружено-деформований стан, що супроводжується зміною температури в циліндрі (14). Далі припускалось, що деформації і температурні зміни малі, тобто після припинення дії центробіжної сили (1) ($\omega = 0$) тіло вертається у вихідне положення та ненапружений стан, а температурна зміна (14) зникає. Тоді, як відомо [6], процес буде термодинамічно оборотним

У теорії термопружності, крім малості деформації, прийнято вважати, що зміна температури θ невелика, тобто приймається припущення $\left|\theta \middle/ T_0\right|$ << 1. У нашому випадку: $\left|\frac{\theta}{T_0}\right| = \left|\frac{T-T_0}{T_0}\right| = \left|\frac{\nu\rho z^2\omega^2}{4G\alpha}\right| << 1$ (17)

Розглянемо для прикладу ненагрітий циліндр з центральним отвором кінцевої довжини, що обертається (рис. 1).

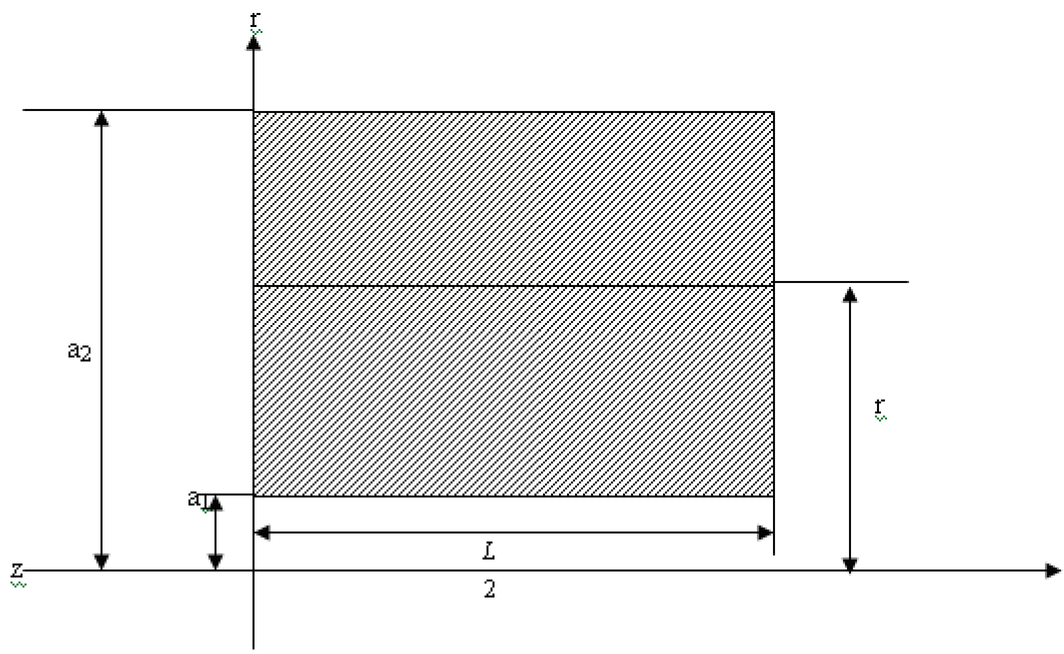

Рис. 1. Ненагрітий циліндр з центральним отвором кінцевої довжини

Внутрішній і зовнішній радіуси циліндра дорівнюють відповідно 0,03 м і 0,1 м; довжина циліндра L = 0,2 м; матеріал – сталь ЭИ 434 (ХНІОК)

(E = 208 Гпа = 2038,4 н/м^2; α = 0,165·10^{-4} град $^{-1}$; ρ = 0,82·10 кг/м^3; V= 0,3). Кутова швидкість ω=200 рад/с. Напруги визначаються на радіусі r=0,05 м за формулами (15).

$$\sigma_{11}=\frac{3+0,3}{8}\cdot 0,82\cdot 10^4\cdot 4\cdot 10^4\left(1\cdot 10^{-2}+0,09\cdot 10^{-2}-0,25\cdot 10^{-2}-\frac{1\cdot 10^{-2}\cdot 0,09\cdot 10^{-2}}{0,25\cdot 10^{-2}}\right)=0,7\ \text{МПа}$$

$$\sigma_{22}=\frac{3+0,3}{8}\cdot 0,82\cdot 10^4\cdot 4\cdot 10^4\left(1\cdot 10^{-2}+0,09\cdot 10^{-2}+0,36\cdot 10^{2}-0,576\cdot 0,25\cdot 10^{-2}\right)=1,8\ \text{МПа}$$

Температурна зміна $\theta(z)$ визначається із формули (14), де z=L/2

$$\theta(z)=-\frac{v\rho\omega^2 z^2}{4G\alpha}=-\frac{0,012792}{0,067267}=-0,19\,^{\circ}\text{C}$$

Підставляючи добуте значення температурної зміни у (17), одержимо:

$$\left|\frac{\theta(t)}{T_0}\right|=\left|\frac{0,19}{20}\right|=\left|0,0095\right|<<1$$

Розглянемо не нагрітий суцільний диск, що обертається, постійної товщини (рис.2).

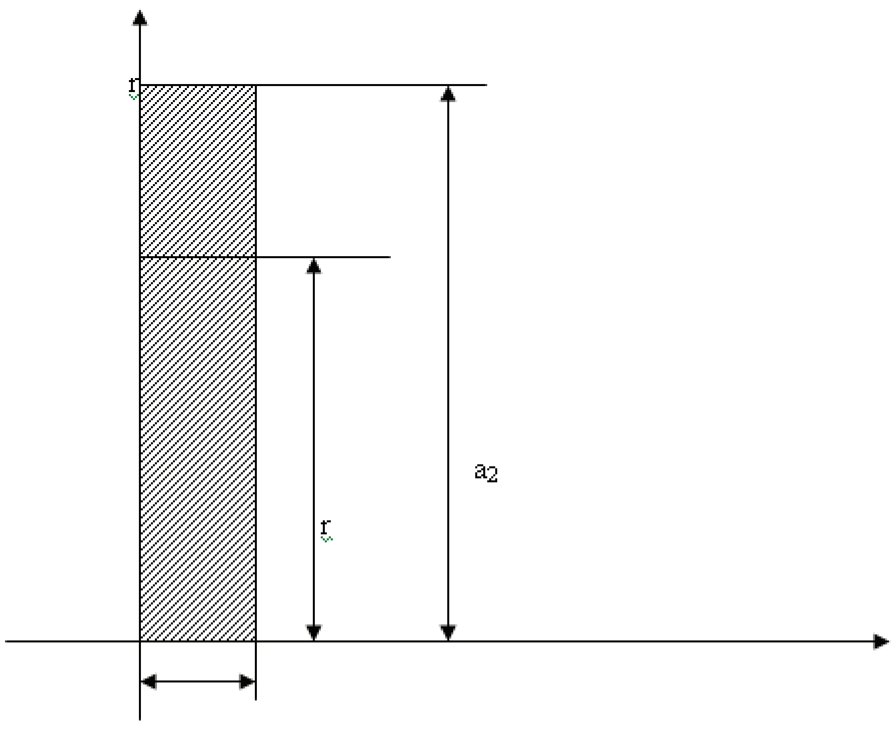

Рис. 2. Не нагрітий суцільний диск, що обертається, постійної товщини

Зовнішній радіус диска дорівнює 0,15 м, а товщина L = 0,02 м. Матеріал - такий, як і у першому прикладі. Кутову швидкість припустимо рівною ω=1570 рад/с. Напруги визначаються на радіусі r = 0,1 м за формулами (16).

$$\sigma_{11}=\frac{3+0,3}{8}\cdot 0,82\cdot 10^4\cdot 2,4649\cdot 10^6\left(225\cdot 10^{-4}-57,6\cdot 10^{-4}\right)\approx 104,2\ \text{МПа}$$

$$\sigma_{22}=\frac{3+0,3}{8}\cdot 0,82\cdot 10^4\cdot 2,4649\cdot 10^6\left(225\cdot 10^{-4}-57,6\cdot 10^{-4}\right)=139,6\ \text{МПа}$$

Температурна зміна дорівнюватиме:

$$\theta(t) = -\frac{0{,}39 \cdot 0{,}82 \cdot 10^{4} \cdot 2{,}4649 \cdot 10^{6} \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{8 \cdot 2038{,}4 \cdot 10^{8} \cdot 0{,}165 \cdot 10^{-4}} \approx -0{,}12\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Підстановка добутого значення $\theta(t)$ у (17) дає:

$$\left|\frac{\theta(t)}{T_0}\right| = \left|\frac{0{,}12}{20}\right| = |0{,}006| << 1$$

Як видно з наведених прикладів, значення температурної зміни $\theta(t)$ мале і відповідно, процес буде термодинамічно зворотним.

Висновки. Розглянуто розв'язання для кругового циліндра з центральним отвором, що обертається, кінцевої довжини, зокрема диска без будь-яких спеціальних гіпотез, що використовуються у задачі плоско-напруженого стану чи плоскої деформації, крім згаданих гіпотез лінійної теорії пружності, Показано, що під час дії центробіжної сили з'являється температурне поле, яке залежить від кутової швидкості обертання.

ЛІТЕРАТУРА

1.Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, Физматгиз, 1979.– 560 с.

2. Ван Цзи-де. Прикладная теория упругости. – М.: Физматгиз, 1959.- 400 с.

3. Жермен П. Курс механики сплошных сред. – М.: Высшая школа, 1983. – 399 с.

4.Мелан Э., Паркус Г. Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. – М.: Физматгиз, 1958. – 167 с.

5.Фен Дж. Машины, энергия, энтропия. – М.: Мир, 1986. – 336 с.

6.Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Теория упругости. - М.: Физматгиз,1965. – 202 с.