

6. Gulyayev V.I., Borshch O.I. Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells // J. Petroleum Sci. Eng.. – 2011. – No 78. – P. 759 – 764.
7. Gulyayev V.I., Hudoly S.N., Glovach L.V. The computer simulation of drill column dragging in inclined bore-holes with geometrical imperfections // International Journal of Solids and Structures. – 2011. – No 48. – P. 110 – 118.
8. Aadnoy B. S. and Andersen K. Design of oil wells using analytical friction models // J. Petroleum Sci. Eng. – 2001. – 32, No. 1. – P. 53 – 71.
9. Sawaryn S. J. and Thorogood J. L. A compendium of directional calculations based on the minimum curvature method // SPE Drilling and Completion. – 2005. – March. – P. 24 – 36.
10. Sheppard M.C. Designing well paths to reduce drag and torque // SPE Drilling Eng. — 1987. – December. – P. 344 – 350.
11. Гуляев В.И., Гайдайчук В.В., Кошкин В.Л. Упругое деформирование, устойчивость и колебания гибких криволинейных стержней. – Киев: Наук. думка, 1992. – 344 с.
12. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. – М.: Наука, 1974. – 180 с.

УДК 539.3

ПЕРЕБУДОВА ФРОНТІВ РОЗРИВНИХ ХВИЛЬ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ПРУЖНИХ СЕРЕДОВИЩАХ ЗІ ЗМІННИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

Кандидат фізико-математичних наук Ващіліна О.В.,
Заєць Ю.О.

У статті вивчається явище поширення і перебудови фронтів розривних хвиль у трансверсально-ізотропних пружних середовищах зі змінними властивостями. Запропоновано методику комп'ютерного моделювання системи променів і еволюціонуючих фронтів. Для деяких законів зміни параметрів анізотропії та неоднорідності пружного середовища досліджені явища формування геометричних особливостей на поверхні фронту.

The problem about propagation and transformation of discontinuous wave fronts in transversally isotropic heterogeneous elastic media is considered in the article. The techniques for construction of evolving system of rays and fronts are proposed. The cases of geometric singularities formation on the front surfaces are analyzed for different values of the elastic medium anisotropy and heterogeneity.

Постановка проблеми. При дослідженні задач сейсмології, сейсмозвідки й аналізі динамічної поведінки тектонічних структур під впливом вибухових збурень актуальними виявляються задачі математичного моделювання процесів перебудови фронтів ударних хвиль у анізотропних середовищах зі змінними властивостями. Специфіка динамічних явищ, що виникають у цих випадках, пов'язана з короткочасністю високоінтенсивного початкового поля тиску, зазвичай, сконцентрованого на початковому етапі часу в малій області та перебудовою поверхні фронту ударної хвилі в міру її поширення. Оскільки при цьому з просуванням хвильового фронту границя виділеної для розрахунку області еволюціонує, для аналізу таких процесів виявляються малоефективними традиційні методи розв'язування крайових задач математичної фізики. Зазвичай при дослідженні ударних хвиль найбільша увага приділяється питанням геометричної побудови поверхонь розривів польових функцій і обчисленням значень цих розривів, що дають інформацію про фронт ударної хвилі й інтенсивності імпульсу, що переноситься нею, в кожній точці фронту. Тому для постановки і розв'язування таких задач важливу роль відіграють методи геометричної оптики [1], зокрема, нульове наближення променевого методу, яке забезпечує хороший кількісний опис широкого кола хвильових явищ різної фізичної природи. Застосування променевого методу полягає у виділенні функції оптичного шляху хвилі (ейконала) і побудові за допомогою рівняння ейконала системи променів і фронтів ударної хвилі. Ця задача досить просто розв'язується для ізотропних середовищ. Фізична картина динамічних явищ різко ускладнюється при вивченні поширення хвиль сильних розривів у неоднорідних пружних анізотропних середовищах [2], оскільки в цих випадках польова функція виявляється векторною; для кожного напрямку існує три види хвиль, що відрізняються поляризацією; фазові швидкості хвиль залежать як від поляризації хвилі, так і від напрямку її поширення; промені, в загальному випадку, не ортогональні поверхні хвильового фронту, а променеві швидкості відрізняються від фазових і між їх напрямками не завжди існує однозначна відповідність. З появою неоднорідності середовища промені викривляються, а на поверхні фронтів можуть утворюватися геометричні особливості у вигляді каустик (катастроф) [3, 4].

Розглянемо трансверсально-ізотропне пружне середовище. Завдяки властивостям симетрії, компоненти $C_{ik,pq}$ тензора пружних сталей середовища можна представити у формі шестирядної квадратної матриці..

$$(C_{ik,pq}) = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda - l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu - p & \lambda - l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda - l & \lambda - l & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu - m \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де λ і μ – параметри Ламе, l, m, p – константи, що відрізняють середовище від ізотропного. Для неоднорідного середовища ці параметри є функціями координат x_1, x_2, x_3 .

Динамічна рівновага пружного середовища в декартовій системі координат x_1, x_2, x_3 визначається системою трьох диференціальних рівнянь

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i = 1,2,3), \quad (2)$$

де $\lambda_{ik,pq} = C_{ik,pq} / \rho$; $C_{ik,pq}$ – параметри пружності; ρ – густина; u_1, u_2, u_3 – компоненти вектора пружних переміщень, t – час.

У зв'язку з тим, що в анізотропних середовищах промені, у загальному випадку, не ортогональні поверхням хвильових фронтів, будемо розрізняти вектори фазової \mathbf{v} і променевої ξ швидкостей, вважаючи, що фронт є поверхнею постійної фази $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - vt = \text{const}$, кожна елементарна площадка якого рухається вздовж місцевої одиничної нормалі \mathbf{n} зі швидкістю v . Тут \mathbf{r} – радіус-вектор точки фронту.

Вектори поляризації \mathbf{A} хвилі і її фазової швидкості \mathbf{v} для обраного напрямку \mathbf{n} можна побудувати з однорідної системи алгебраїчних рівнянь [2]

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q - v^2 A_i = 0 \quad (i = 1,2,3) \quad (3)$$

як власні числа і вектори матриці її коефіцієнтів.

З умови існування нетривіальних розв'язків цієї системи впливає рівняння третього ступені щодо квадрата фазової швидкості v^2

$$\left| \sum_{k,p=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p - v^2 \delta_{iq} \right| = 0, \quad (4)$$

за допомогою якого для кожного напрямку нормалі \mathbf{n} можна визначити і розташувати в порядку спадання три швидкості по-різному поляризованих хвиль.

Надаючи величині v^2 в системі (3) по черзі одне із знайдених значень $v_r^2(\mathbf{n})$ ($r = 1,2,3$), можна визначити компоненти векторів поляризації $\mathbf{A}^{(r)}$ трьох хвиль, що рухаються в розглянутому напрямку зі своїми фазовими швидкостями $\mathbf{v}_r(\mathbf{n})$.

Поверхня фронту ударної хвилі визначається співвідношенням [2]

$$\tau(x_1, x_2, x_3) - t = 0, \quad (5)$$

у якому функція τ повинна задовольняти диференціальному рівнянню в частинних похідних першого порядку

$$\sum_{i,k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = 1, \quad (6)$$

що узагальнює рівняння ейконала з геометричної оптики на випадок пружних анізотропних хвиль.

Величини p_k ($k = 1,2,3$), що входять у (6) являють собою компоненти вектора рефракції

$$p_k \equiv \partial\tau / \partial x_k = n_k / v_r(n) \quad (k = 1,2,3).$$

Хвильовий фронт (5) ударної хвилі в однорідному анізотропному середовищі будується після знаходження розв'язку рівняння (6), яке за допомогою методу характеристик зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} dx_k / d\tau &= \xi_k = \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \\ dp_k / d\tau &= 0, \quad (k = 1,2,3). \end{aligned} \quad (7)$$

Перша група цих рівнянь описує поширення хвилі вздовж променя з променевою швидкістю $\mathbf{o} = \mathbf{o}^{(r)}(\mathbf{n}, x_k)$. Друга група рівнянь вказує на прямолінійність променів в однорідному середовищі.

Однак, якщо пружне середовище є неоднорідним, рівняння (7) замінюються більш складнішими співвідношеннями [6-9]

$$\begin{aligned} \frac{dx_m}{d\tau} &= \xi_m \equiv \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{im,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \quad (m = 1, 2, 3), \\ \frac{dp_m}{d\tau} &= \eta_m \equiv \frac{-1}{2} \sum_{i,k,p,q=1}^3 \frac{\partial \lambda_{ik,pq}}{\partial x_m} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} \end{aligned} \quad (8)$$

Наведені залежності (8) дають можливість описати фронти складної геометрії, які перебудовуються під час свого поширення. В такому випадку промені стають криволінійними.

Основні результати дослідження. На основі запропонованої методики розв'язані задачі про поширення хвиль, що породжуються ударним полем тиску в сферичній порожнині трансверсально-ізотропного пружного середовища зі змінною густиною та змінними параметрами Ламе. Нижче наведено результати комп'ютерного моделювання процесу поширення фронту ударної хвилі для трьох різних законів зміни параметрів пружного середовища:

1) Густина ρ змінюється по вертикальній змінній x_3 за законом:

$$\rho = \rho_0 + \beta \left(0,83 \sqrt{1 \cdot 10^6 + (x_3 + 11250)^2} - 0,83 \sqrt{1 \cdot 10^6 + (x_3 + 11000)^2} \right), x_3 \in [-15000; -7500),$$

$$\rho = \rho_0 + \beta \left(-0,83 \sqrt{1 \cdot 10^6 + (x_3 + 3750)^2} + 0,83 \sqrt{1 \cdot 10^6 + (x_3 + 3500)^2} \right), x_3 \in [-7500; 0],$$

де

$$\rho_0 = 2760 \text{ кг/м}^3, E = 3 \cdot 10^{11}, \sigma = 0,1, \beta = 5. (\text{Рис. 1 б}).$$

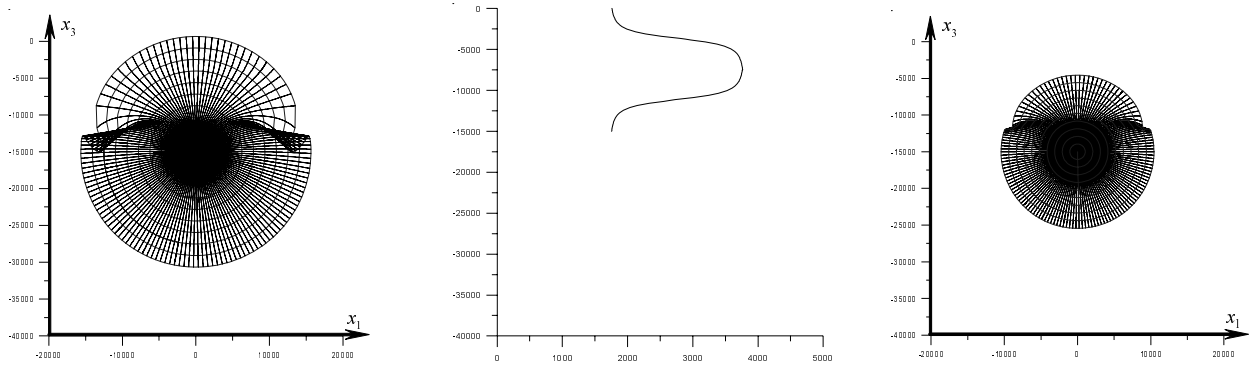


Рис. 1

а) фронти і промені qP-хвилі б) закон зміни густини середовища в) фронти і промені qS-хвилі

За виглядом системи променів та фронтів розривних квазіпоздовжньої qP (рис. 1а) та квазіпоперечної qS (рис. 1в), що поширюються в середовищі з розглянутими законом зміни густини (рис. 1б), можна зробити висновки, що в точках, де густина досягає найбільшого значення, спостерігається суттєве викривлення променів як квазіпоздовжньої, так і квазіпоперечної хвиль. Це призводить до накладання променів і появи на їхніх фронтах геометричних особливостей у вигляді каустик в районі яких, очевидно, спостерігається суттєве збільшення інтенсивності поля напружень.

2) Параметр Ламе λ змінюється за законом:

$$\lambda = \lambda_0 + \beta \left(0,83\sqrt{1 \cdot 10^6 + (x_3 + 11250)^2} - 0,83\sqrt{1 \cdot 10^6 + (x_3 + 11000)^2} \right), x_3 \in [-15000; -7500],$$

$$\lambda = \lambda_0 + \beta \left(-0,83\sqrt{1 \cdot 10^6 + (x_3 + 3750)^2} + 0,83\sqrt{1 \cdot 10^6 + (x_3 + 3500)^2} \right), x_3 \in [-7500; 0],$$

$$\lambda_0 = 3,4 \cdot 10^{10}, E = 3 \cdot 10^{11}, \sigma = 0,1, \beta = 5 \cdot 10^8 \text{ (рис 2 б)},$$

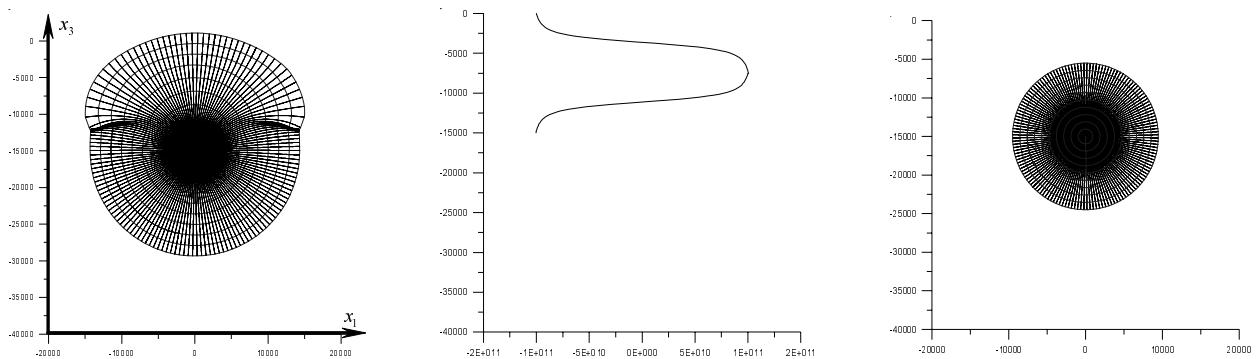


Рис. 2

а) фронти і промені qP-хвилі б) закон зміни параметра Ламе λ в) фронти і промені qS-хвилі

В даному випадку також помічена тенденція до викривлення променів квазіпоздовжньої qP хвилі (рис. 2а) зі збільшенням значення параметру λ і утворення незначних особливостей на фронті qP хвилі при досягненні ним пікових значень, в той час як зміна цього параметру не вплинула на форму фронту квазіпоперечної qS-хвилі (рис. 2в).

3) Параметр Ламе λ змінюється за законом:

$$\lambda = \lambda_0 + \beta \left(-0,83\sqrt{1 \cdot 10^6 + (x_3 + 11250)^2} + 0,83\sqrt{1 \cdot 10^6 + (x_3 + 11000)^2} + 210 \right), x_3 \in [-15000; -7500],$$

$$\lambda = \lambda_0 + \beta \left(0,83\sqrt{1 \cdot 10^6 + (x_3 + 3750)^2} - 0,83\sqrt{1 \cdot 10^6 + (x_3 + 3500)^2} + 210 \right), x_3 \in [-7500; 0],$$

$$\lambda_0 = 3,4 \cdot 10^{10}, E = 3 \cdot 10^{11}, \sigma = 0,1, \beta = 1 \cdot 10^{10}. \text{ (рис 3 б).}$$

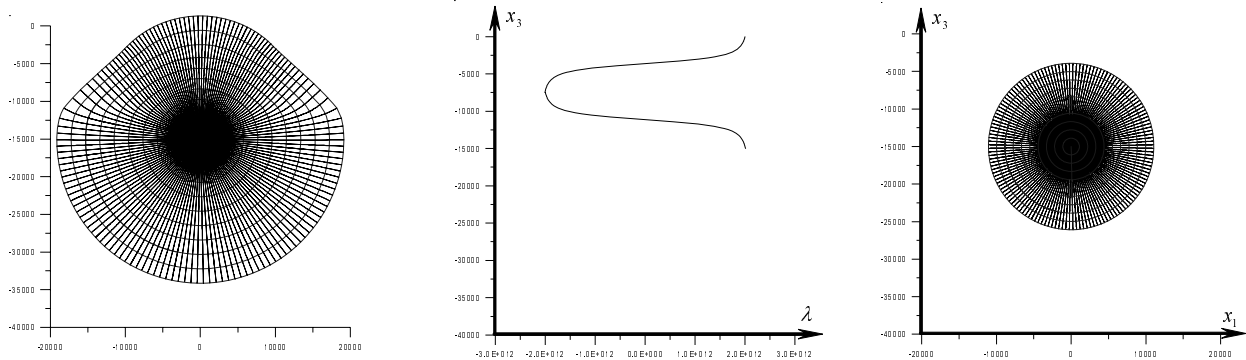


Рис. 3

а) фронти і промені qP-хвилі б) закон зміни параметра Ламе λ в) фронти і промені qS-хвилі

Зміна параметру Ламе в даному випадку призводить до незначного викривлення променів квазіпоздовжньої qP хвилі в точках, де значення λ прямують до мінімального. При цьому фронт хвилі дещо видовжується, однак, промені не накладаються і каустики не утворюються. Квазіпоперечна qS-хвиля, як і у випадку 2) не зазнає змін, з чого можна зробити висновки, що зміна параметру Ламе λ не впливає на характер поширення поперечних хвиль.

Представлені системи променів і фронтів дозволяють оцінити характер зміни напружень під час поширення поверхні їх розриву. Очевидно, що в зонах згущення променів має місце концентрація поля напружень, а в зонах їх розбіжності – зменшення його інтенсивності.

Література

1. Подільчук Ю.Н., Рубцов Ю.К. Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. – К.: Наукова думка, 1988. – 220с.
2. Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. – Ленинград: Наука, 1980. – 280с.
3. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. – М.: Мир, 1980. – 607 с.
4. Арнольд В.И. Теория катастроф. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 128 с.
5. Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М. Яковенко Е.В. Дифракция ударной волны на криволинейной поверхности раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прикл. математика и механика. – 2000. – Т.64, №3. – С. 394–402.
6. Гуляев В.И., Луговой П.З., Крицкий В.Б., Иванченко Г.М. Отражение и преломление плоских разрывных волн параболоидными поверхностями раздела анизотропных упругих сред // Геофизический журнал. – 2005. – Т.27, №3. – С. 418-426.
7. Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М. Дифракция разрывных волн на эллипсоидных поверхностях раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прикладная механика. – 2004. – Т.40, №10. – С. 98-106.

8. Gulyaev V.I., Lugovoy P.Z., Ivanchenko G.M. Discontinuous wave fronts propagation in anisotropic layered media // Int. J. Solids and Struct. – 2003. – 40. – P. 237-247.

9. Gulyaev V.I., Ivanchenko G.M. Discontinuous wave with interfaces between anisotropic elastic media // Int. J. Solids and Struct. – 2006. – 43. – P. 74-90.

УДК681.3

ІЗОГОНИ ЕЛІПСА

Кандидат фізико-математичних наук Вишенська О.В.

Для кожного значення φ знайдено φ — ізогони еліпса, тобто лінії, із яких еліпс видно під однаковим кутом φ .

The lines, from points of which the ellipse points are seen under the same angle φ (the isogonal lines), are found for every value of φ .

Постановка проблеми. З'ясувати, якими є φ — ізогони еліпса для різних значень кута φ .

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В роботі [2] вичерпно досліджено ізогони параболи; її $\frac{\pi}{2}$ — ізогону знайдено в монографії [1].

Мета дослідження. Знайти рівняння усіх ізогон еліпса і дати їх аналітичну характеристику.

Основні матеріали дослідження. Ізогоною плоскої лінії ℓ називаємо множину всіх тих точок площини, котра містить цю лінію, із яких ℓ видно під однаковим кутом. В [2] було досліджено ізогони параболи.

Одна з них $-\frac{\pi}{2}$ — ізогона (з точок якої параболу видно під прямим кутом) – директриса параболи; решта

ізогон, що відповідають кутам із проміжків $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ та $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, — гіперболи, дійсна вісь яких збігається з віссю параболи, а уявна паралельна її директрисі. Точніше, кожна з двох гілок такої гіперболи є окремою ізогоною: одна гілка φ — ізогона, а друга $(\pi - \varphi)$ — ізогона.

У цій статті досліджено ізогони еліпса. Хай

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a \neq b)$$

— еліпс, $(u; v)$ — точка поза ним,

$$\frac{x_0 \cdot x}{a^2} + \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1$$

— дотична до еліпса в точці $(x_0; y_0)$, що проходить через точку $(u; v)$.

Вилучивши y_0 із системи рівнянь

$$\frac{x_0 \cdot u}{a^2} + \frac{y_0 \cdot v}{b^2} = 1; \quad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$