8. *Gulyaev V.I., Lugovoyy P.Z., Ivanchenko G.M.* Discontinuous wave fronts propagation in anisotropic layered media // Int. J. Solids and Struct. – 2003. – 40. – P. 237-247.

9. *Gulyaev V.I., Ivanchenko G.M.* Discontinuous wave with interfaces between anisotropic elastic media // Int. J. Solids and Struct. – 2006. – 43. – P. 74-90.

УДК681.3

ІЗОГОНИ ЕЛІПСА

Кандидат фізико-матеатичних наук Вишенська О.В.

Для кожного значення φ знайдено φ — ізогони еліпса, тобто лінії, із яких еліпс видно під однаковим кутом φ.

The lines, from proints of which the ellipse points are seen under the same angle φ (the isogonal lines), are found for every value of φ.

Постановка проблеми. З’ясувати, якими є φ — ізогони еліпса для різних значень кута φ.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В роботі $[2]$ вичерпно досліджено ізогони параболи; її $\frac{\pi}{2}$ — ізогону знайдено в монографії $[1]$.

Мета дослідження. Знайти рівняння усіх ізогон еліпса і дати їх аналітичну характеристику.

Основні матеріали дослідження. Ізогоною плоскої лінії ℓ називаємо множину всіх тих точок площини, котра містить цю лінію, із яких ℓ видно під однаковим кутом. В $[2]$ було досліджено ізогони параболи. Одна з них – $\frac{\pi}{2}$ — ізогона (з точок якої параболу видно під прямим кутом) – директриса параболи; решта ізогон, що відповідають кутам із проміжків $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ та $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, — гіперболи, дійсна вісь яких збігається з віссю параболи, а уявна паралельна її директрисі. Точніше, кожна з двох гілок такої гіперболи є окремою ізогоною: одна гілка φ — ізогона, а друга $(\pi-\varphi)$ — ізогона.

У цій статті досліджено ізогони еліпса. Хай

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a\neq b)$$

— еліпс, $(u;v)$ — точка поза ним,

$$\frac{x_0\cdot x}{a^2}+\frac{y_0\cdot y}{b^2}=1$$

— дотична до еліпса в точці $(x_0;y_0)$, що проходить через точку $(u;v)$.

Вилучивши y_0 із системи рівнянь

$$\frac{x_0\cdot u}{a^2}+\frac{y_0\cdot v}{b^2}=1;\ \frac{x_0{}^2}{a^2}+\frac{y_0{}^2}{b^2}=1,$$

отримуємо зв'язок між x_0 та u, v :

$$(b^2 \cdot u^2 + a^2 \cdot v^2) \cdot x_0{}^2 - 2a^2b^2ux_0 + a^4 \cdot (b^2 - v^2) = 0.$$

Корені цього рівняння щодо x_0 позначаємо x_1 та x_2. Це – абсциси точок дотику до еліпса дотичних, проведених із точки (u ; v). Маємо:

$$x_1 + x_2 = \frac{2a^2b^2u}{b^2u^2 + a^2v^2}\ ;\ x_1 \cdot x_2 = \frac{a^4(b^2 - v^2)}{b^2u^2 + a^2v^2} \tag{1}$$

На підставі симетрії звідси відразу отримуємо аналогічні формули для ординат точок дотику:

$$y_1 + y_2 = \frac{2a^2b^2v}{b^2u^2 + a^2v^2}\ ;\ y_1y_2 = \frac{b^4 \cdot (a^2 - u^2)}{b^2u^2 + a^2v^2} \tag{2}$$

Хай φ — кут, під яким видно еліпс із точки (u ; v), а ψ — кут між дотичними, проведеними до еліпса з цієї точки. Оскільки $\varphi = \psi$, або $\varphi = \pi - \psi$, то $|tg\varphi| = tg\psi$

Кутові коефіцієнти дотичних до еліпса, проведених у точках (x_1 ; y_1) і (x_2 ; y_2) визначають формули

$$k_1 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}; k_2 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_2}{y_2}\ .$$

Тому

$$|tg\varphi| = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}\right| = \frac{a^2b^2 \cdot |x_2y_1 - x_1y_2|}{|a^4y_1y_2 + b^4x_1x_2|} \tag{3}$$

Щоб отримати рівняння φ — ізогони, тепер слід лишень виразити величини $|x_2y_1 - x_1y_2|$ та $|a^4y_1y_2 + b^4x_1x_2|$ через координати точки $(u;v)$.

Почнімо зі знаменника. Маємо:

$$\begin{aligned} |a^4y_1y_2 + b^4x_1x_2| &= \left|a^4 \cdot \frac{b^4 \cdot (a^2 - u^2)}{b^2u^2 + a^2v^2} + b^4 \cdot \frac{a^4 \cdot (b^2 - v^2)}{b^2u^2 + a^2v^2}\right| = \\ &= \frac{a^4 \cdot b^4}{b^2u^2 + a^2v^2} \cdot |u^2 + v^2 - a^2 - b^2| \end{aligned} \tag{4}$$

Якщо $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то знайдений вираз має дорівнювати нулеві, й навпаки. Тож маємо рівняння $\frac{\pi}{2}$ — ізогони:

$$u^2 + v^2 = a^2 + b^2 \tag{I$_1$}$$

Як бачимо, це коло, описане навколо фундаментального прямокутника, пов'язаного з еліпсом.

Виражаємо тепер через u і v величину $\left|x_2 y_1 - x_1 y_2\right|$. Можемо вчинити так:

$$\left(x_2 y_1 - x_1 y_2\right)^2 = x_2^2 y_1^2 + x_1^2 y_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 = x_2^2 \cdot \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x_1^2\right) +$$
$$x_1^2 \cdot \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x_2^2\right) - 2x_1 x_2 y_1 y_2 = b^2 \cdot \left(x_1^2 + x_2^2\right) - 2 \cdot \frac{b^2}{a^2} x_1^2 x_2^2 -$$
$$2x_1 x_2 y_1 y_2$$

Взявши до уваги, що $x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1 x_2$, та формули (1) і (2), отримуємо:

$$\left(x_2 y_1 - x_1 y_2\right)^2 = \frac{4a^4 b^4}{b^2 u^2 + a^2 v^2} \cdot \left(b^2 u^2 + a^2 v^2 - a^2 b^2\right) \tag{5}$$

Позначаємо через μ величину $|tg\varphi|$ у рівності (3), підносимо обидві частини рівності до квадрату (щоб отримати раціональне рівняння) й виражаємо її праву частину через координати точки $(u;v)$ на підставі тотожностей (4) і (5). Отримуємо рівняння φ — ізогони та $(\pi - \varphi)$ — ізогони еліпса водночас:

$$4a^2 b^2 \left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} - 1\right) = \mu^2 \left(u^2 + v^2 - a^2 - b^2\right)^2 \tag{I_2}$$

Воно засвідчує, що

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} > 1$$

(точка $(u;v)$ лежить зовні даного еліпса). Права частина рівняння також містить *a priori* очікувану інформацію: на кожному промені, що виходить з початку координат, лежать дві точки лінії (I_2) – одна зовні кола $u^2 + v^2 = a^2 + b^2$, а друга всередині (між еліпсом і цим колом). Лінію (I_2) складають два овали (φ — ізогона та $(\pi - \varphi)$ — ізогона еліпса), відокремлені один від одного його $\frac{\pi}{2}$ — ізогоною.

Чи не є ці овали еліпсами? На таку думку наштовхують результати дослідження ізогон параболи. Адже всі ізогони параболи (кривої другого порядку) є криві другого порядку.

Припустімо, що φ — та ($\pi - \varphi$) — ізогонами нашого еліпса є еліпси

$$n^2 x^2 + m^2 y^2 = m^2 n^2 \text{ та } s^2 x^2 + p^2 y^2 = p^2 s^2$$

В такому разі добуток поліномів

$$\left(n^2 x^2 + m^2 y^2 - m^2 n^2\right) \cdot \left(s^2 x^2 + p^2 y^2 - p^2 s^2\right) \tag{6}$$

має тільки сталим множником відрізнятися від полінома

$$\mu^2\left(\left(x^2+y^2\right)-a^2-b^2\right)^2-4a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right). \qquad (7)$$

Оскільки останній має однакові коефіцієнти біля x^4 і y^4, то те саме має бути також у полінома (6), цебто

$$n^2s^2=m^2p^2 \qquad (8)$$

А тому

$$\frac{n^2}{m^2}=\frac{p^2}{s^2} \qquad (9)$$

Нормувавши тепер поліноми (6) і (7) (перший ділимо на m^2p^2, а другий на μ^2), прирівнюємо їхні коефіцієнти біля x^2y^2. Отримуємо:

$$\frac{n^2}{m^2}+\frac{s^2}{p^2}=2$$

Взявши до уваги (9), подаємо останню рівність у формі

$$\frac{n^2}{m^2}+\frac{m^2}{n^2}=2,$$

котра свідчить, що $n=m$ (а отже, і $s=p$).

Виходить, що обидві ізогони (φ — та ($\pi-\varphi$) — ізогони) еліпса, до того ж за будь – якого гострого кута φ, є кола. Проте це абсурд. Аналітично хибність цього результату випливає, наприклад, з того, що крива (I_2) перетинає координатні осі на різних відстанях від початку координат. Зокрема, квадрат тієї півосі більшого овала, що лежить на осі абсцис, становить

$$a^2+\frac{b^2}{\mu^2}\left(\sqrt{\mu^2+1}+1\right)^2,$$

а квадрат тієї його півосі, що лежить на осі ординат, –

$$b^2+\frac{a^2}{\mu^2}\left(\sqrt{\mu^2+1}+1\right)^2.$$

Ці величини рівні тільки за умови, що $a=b$. Отже, припущення про те, що овали — ізогони еліпса є еліпси, хибне. З цього випливає, що поліном (7) двох змінних x і y над R не розкладається на множники нижчих ступенів, тобто незвідний над R.

Це означає також , що жодну окрему ізогону еліпса, за винятком $\frac{\pi}{2}$ — ізогони, не можна віддати раціональним рівнянням, ступінь якого менший, ніж 4. Іншими словами, за винятком $\frac{\pi}{2}$ — ізогони, всі решта ізогон є криві порядку 4.

Наостанок відзначимо, що рівняння (I_2) двох споріднених ізогон легко розщепити на два рівняння кожної ізогони зокрема, але тільки за рахунок втрати раціональності. Зовнішня ізогона (для гострого кута) має рівняння:

$$2ab\cdot\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}-1}=\mu\left(u^2+v^2-a^2-b^2\right),$$

а внутрішня (для тупого кута) рівняння

$$2ab\cdot\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}-1}=-\mu\cdot\left(u^2+v^2-a^2-b^2\right)$$

Висновки з даного дослідження і перспективи подальших досліджень у даному напрямку.

1. Еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1$ має два типи ізогон: коло $x^2+y^2=a^2+в^2$ ($\frac{\pi}{2}$ — ізогона) та криві четвертого порядку $4a^2в^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}-1\right)=\mu^2\left(x^2+y^2-a^2-в^2\right)^2$.

2. Бажано дослідити структуру ізогон для деяких інших класичних кривих. Інший можливий напрям – з'ясування властивостей кривої за її ізогонами.

Література

1. *Коксетер Х.С.М.* Действительная проективная плоскость. – М.: 1959. – 280 с.
2. *Вишенська О.В.* Ізогони параболи. // Вісник НТУ. – 2008. – №17. Частина 2. – С. 369 – 372.

УДК 519.81:027.7

РІЗНОВИДИ МОДЕЛЕЙ ОЦІНКИ БІБЛІОТЕЧНИХ СИСТЕМ

Доктор фізико-математичних наук Гавриленко В.В.,
кандидат технічних наук Кірхар Н.В.

Метою роботи є розробка математичних моделей на основі ТМО, за допомогою яких можна досліджувати бібліотечні процеси. Виконаний порівняльний аналіз моделей. При плануванні можливих черг, що виникають в АІБС, передбачені деякі граничні випадки, наприклад, максимальна довжина черги і можливість переповлнення буферної пам'яті.

The aim is to develop mathematical models based on the dura, through which you can explore the library processes. A comparative analysis of models. When planning for possible queues arising in the AILS, provided some limiting cases, for example, the maximitumqieue length and the overflow of buffer memory.

Вступ. Бібліотеки — це громадські установи, які виконують різні функції, залежні від конкретних умов і обставин. З точки зору функціонального призначення бібліотеки можна розглядати як складні комунікаційні системи, призначені для передачі необхідної інформації деякому класу абонентів, і в цьому сенсі для представлення і опису бібліотечних процесів, можуть бути використані процедури аналізу. Питанням аналізу бібліотек займаються системи масового обслуговування розглянуті в роботах [1, 2, 5]. Проте є ще ряд недосліджених проблем в бібліотечних системах. У роботі розглядаються деякі види моделей, що дозволяють досліджувати і оцінювати бібліотечні системи.