

РОЗПОДІЛ ВНУТРІШНІХ ТА РЕАКТИВНИХ ЗУСИЛЬ У ЗАДАЧАХ ЗГИНУ КОМПОЗИТНИХ БРУСІВ

Доктор технічних наук Горик О.В.,
Ковальчук С.Б.

У статті проаналізовано розподіл внутрішніх зусиль при моделюванні задач згину композитних брусів за ітераційною зсувною моделлю. Визначено характер впливу зсувної піддатливості матеріалу бруса на форму і величину внутрішніх і реактивних зусиль. Подані результати експериментальних і теоретичних досліджень реактивних зусиль у статично невизначених балках.

The article analyzes the distribution of internal efforts at modeling problems bending of composite beams by a model taking into account the shear deformations. Determined the character of influence of shear deformation the material of beam on the shape and size of internal and reactive efforts. Contains results of experimental and theoretical research of reactive efforts of the statically indeterminate composite beams.

Постановка проблеми. У сучасній техніці широко застосовуються елементи конструкцій із новітніх конструкційних матеріалів, які мають складну структуру поперечного перерізу, – композитні бруси. Якраз складна структурна будова брусів з таких матеріалів, потребує нових підходів до їх розрахунку і конструювання, основаних на властивостях композитів. Конструкторам і проєктантам необхідно знати величину і функції розподілу внутрішніх зусиль пов'язаних із напружено-деформованим станом та реактивних сил, що виникають в інженерних системах. Якщо для конструктивних систем з однорідних матеріалів визначення розподілу внутрішніх зусиль за величиною і характером не викликає проблем, то для композитних вони залишаються не до кінця виясненими. Таким чином питання дослідження розподілу зусиль в композитних елементах інженерних конструкцій є актуальними.

Аналіз існуючих досліджень. Питання розподілу внутрішніх та реактивних зусиль в інженерних системах із однорідних конструкційних матеріалів з урахуванням впливу поперечної сили детально викладені в курсах опору матеріалів, наприклад у [1]. Стан ітераційної аналітичної теорії в механіці шаруватих композитних систем досліджено в огляді [2]. Механіка деформування брусів із прямою віссю, що мають складну структуру поперечного перерізу, детально описана на основі застосування ітераційної моделі в [3]. Моделювання задач згину композитних брусів з ускладненими умовами деформування описане у статтях [4, 5] Але в цих роботах, як і в інших, практично відсутні результати наукових досліджень впливу поперечних зсувів на розподіл внутрішніх і реактивних зусиль в композитних елементах, як основи принципів конструювання і проєктування та вибору відповідного матеріалу. Результати спеціальних експериментальних досліджень з приводу цих питань нами також не виявлені.

Мета та завдання досліджень. Теоретично і експериментально визначити рівень впливу поперечних зсувів на розподіл внутрішніх і реактивних зусиль в елементах композитних систем, що згинаються.

Результати досліджень. Спочатку розглянемо характер впливу зсувної піддатливості матеріалу бруса на розподіл внутрішніх зусиль при згині. Для цього використаємо отримані у [3] вирази для нормальних та дотичних напружень в поперечних перерізах композитного бруса для довільного кроку уточнення m

$$\sigma_x(x, y, z) = -E_x \left(\xi_0 \frac{d^2 w_m}{dx^2} + \sum_{i=1}^m (-1)^i \xi_i \frac{d^2 \chi_{mi}}{dx^2} \right), \quad (1)$$

$$\tau_{xz}(x, z) = f_0 \frac{d^3 w_m}{dx^3} + \sum_{i=1}^m (-1)^i f_i \frac{d^3 \chi_{mi}}{dx^3}, \quad (2)$$

де $w_m(x)$, $\chi_{mi}(x)$ – відповідно функції вертикальних переміщень перерізів бруса та зсувів; $\xi_0(z)$, $\xi_i(z)$ – функції розподілу поздовжніх переміщень по висоті поперечного перерізу бруса; $f_i(z)$ – функції роз-

поділу кутових деформації; $E_x(y, z)$ – функція поздовжнього модуля пружності матеріалу композитного бруса в межах поперечного перерізу.

Ці вирази описують напружений стан композитного бруса, який віднесено до декартової системи координат. Вісь OX співпадає з віссю жорсткості бруса, а осі OY та OZ лежать в головних площинах жорсткості бруса. Для наведених виразів площина дії зовнішнього навантаження співпадає із головною площиною жорсткості ZOX .

Внутрішній згинаючий момент в поперечному перерізі бруса знайдемо як сумарний момент нормальних напружень відносно осі OY

$$M_y(x) = \int_A \sigma_x z dA = - \int_A E_x z \xi_0 dA \frac{d^2 w_m}{dx^2} - \sum_{i=1}^m (-1)^i \int_A E_x z \xi_i dA \frac{d^2 \chi_{mi}}{dx^2}. \quad (3)$$

Поперечну силу – відповідно як рівнодійну дотичних напружень

$$Q_z(x) = \int_A \tau_{xz} dA = \int_A f_0 dA \frac{d^3 w_m}{dx^3} + \sum_{i=1}^m (-1)^i \int_A f_i dA \frac{d^3 \chi_{mi}}{dx^3}. \quad (4)$$

Позначивши інтеграли

$$\int_A E_x z \xi_0 dA = D_{00}, \quad \int_A E_x z \xi_i dA = D_{0i}, \quad (5)$$

вираз для згинаючого моменту можемо переписати так:

$$M_y(x) = -D_{00} \frac{d^2 w_m}{dx^2} - \sum_{i=1}^m (-1)^i D_{0i} \frac{d^2 \chi_{mi}}{dx^2}. \quad (6)$$

Диференціальна залежність між нормальними (1) та дотичними (2) напруженнями, відповідно до гіпотез прийнятих при побудові моделі, мають наступний вигляд:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial z} = 0, \quad (7)$$

де $\bar{\sigma}_x, \bar{\tau}_{xz}$ – напруження зведені до площини XOZ .

Помноживши останній вираз на z і, інтегруючи по висоті перерізу, матимемо:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_1}^{z_2} \bar{\sigma}_x z dz + \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial z} z dz = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_1}^{z_2} \bar{\sigma}_x z dz + \bar{\tau}_{xz} z \Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \bar{\tau}_{xz} dz = 0,$$

де z_1, z_2 – координати найбільш віддалених нижньої та верхньої точок перерізу відносно осі OY .

Враховуючи граничні умови $\bar{\tau}_{xz}(x, z_1) = 0, \bar{\tau}_{xz}(x, z_2) = 0$, та перейшовши до напружень розподілених по перерізу отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1(z)}^{y_2(z)} \sigma_x z dy dz - \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1(z)}^{y_2(z)} \tau_{xz} dy dz = 0,$$

де $y_1(z), y_2(z)$ – функції кривих, що обмежують переріз відповідно зліва та з права.

Подвійні інтеграли у попередньому виразі є інтегралами по площі перерізу, тому

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_A \sigma_x z dA - \int_A \tau_{xz} dA = 0. \quad (8)$$

Підставивши до (8) вирази напружень (1) та (2) маємо:

$$-D_{00} \frac{d^3 w_m}{dx^3} - \sum_{i=1}^m (-1)^i D_{0i} \frac{d^3 \chi_{mi}}{dx^3} = \int_A f_0 dA \frac{d^3 w_m}{dx^3} + \sum_{i=1}^m (-1)^i \int_A f_i dA \frac{d^3 \chi_{mi}}{dx^3},$$

звідки очевидні рівності:

$$\int_A f_0 dA = -D_{00}, \quad \int_A f_i dA = -D_{0i}. \quad (9)$$

Тоді для поперечної сили (4) отримаємо наступний вираз:

$$Q_z(x) = -D_{00} \frac{d^3 w_m}{dx^3} - \sum_{i=1}^m (-1)^i D_{0i} \frac{d^3 \chi_{mi}}{dx^3}. \quad (10)$$

З виразів для внутрішніх зусиль (6) та (10) можна зробити висновок, що і згинаючий момент, і поперечна сила залежать, як від згинної жорсткості D_{00} композита, так і від його зсувних жорсткостей D_{0i} .

Якщо із системи визначальних диференціальних рівнянь для визначення функцій вертикальних переміщень та зсувів, отриманої у [2], виключити складові, пов'язані із зовнішнім дотичним навантаженням, то вона набуде наступного вигляду:

$$\begin{cases} D_{00} \frac{d^4 w_m}{dx^4} + \sum_{i=1}^m (-1)^i D_{0i} \frac{d^4 \chi_{mi}}{dx^4} = \Omega(x) \\ D_{j0} \frac{d^4 w_m}{dx^4} + \sum_{i=1}^m (-1)^i D_{ji} \frac{d^4 \chi_{mi}}{dx^4} - \sum_{i=1}^m (-1)^i D_{j(i-1)} \frac{d^2 \chi_{mi}}{dx^2} = 0, \end{cases} \quad (11)$$

де $\Omega(x)$ – зведена функція навантаження; D_{ki} – характеристики жорсткості; $j = \overline{1, m}$ індекс, що розгортає систему по вертикалі.

Рівняння системи (11) є лінійними неоднорідними диференціальними рівняннями. Тому розв'язок відносно функцій вертикальних переміщень першого рівняння відповідно до принципу суперпозиції може бути записаний так:

$$w_m = w_0 - \sum_{i=1}^m (-1)^i \frac{D_{0i}}{D_{00}} \chi_{mi}, \quad (12)$$

де w_0 – розв'язок для вертикальних переміщень нульового кроку наближення (класична модель).

Таким чином, на будь-якому кроці уточнення m вертикальні переміщення w_m є лінійною комбінацією функції w_0 , що відповідає нульовому наближенню (згинна складова прогинів) та функцій зсуву χ_{mi} (зсувна складова прогинів) відповідного порядку.

Підставивши вираз (12) до (6) та (10) і виконавши необхідні перетворення отримаємо:

$$\begin{aligned} M_y(x) &= -D_{00} \frac{d^2 w_m}{dx^2} - \sum_{i=1}^m (-1)^i D_{0i} \frac{d^2 \chi_{mi}}{dx^2} = -D_{00} \frac{d^2 w_0}{dx^2}, \\ Q_z(x) &= -D_{00} \frac{d^3 w_m}{dx^3} - \sum_{i=1}^m (-1)^i D_{0i} \frac{d^3 \chi_{mi}}{dx^3} = -D_{00} \frac{d^3 w_0}{dx^3}. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким чином, внутрішні зусилля на будь-якому кроці уточнення, хоча за формою запису і відрізняються, але все одно відповідають нульовому наближенню (класичній моделі). Це підтверджує правильність співвідношень моделі, оскільки внутрішні зусилля мають відповідати рівнянням рівноваги статки, а розв'язки класичної моделі, як відомо, їм відповідають. Але це стосується лише тих випадків, коли рівнянь рівноваги статки достатньо для визначення внутрішніх зусиль, тобто для статично визначних задач згину. Для таких задач умови рівноваги статки беззаперечно диктують вимоги і щодо характеру розподілу, і щодо величини внутрішніх зусиль.

Інша справа у випадку статично невизначених задач згину. Для таких задач умови рівноваги статки однозначно не є визначальними для внутрішніх зусиль. Точніше вони визначають характер розподілу (постійний, лінійний, квадратичний тощо), але не визначають величину зусиль, оскільки рівнянь рівноваги не вистачає для визначення усіх невідомих реакцій.

Наслідком цього є те, що вирази для внутрішніх зусиль моделі будуть залежати від величин реактивних зусиль (невідомих реакцій опор):

$$\begin{aligned} M_y(x, R_1, R_2, \dots, R_n) &= -D_{00} \frac{d^2}{dx^2} w_0(x, R_1, R_2, \dots, R_n), \\ Q_z(x, R_1, R_2, \dots, R_n) &= -D_{00} \frac{d^3}{dx^3} w_0(x, R_1, R_2, \dots, R_n), \end{aligned} \quad (14)$$

де R_1, R_2, \dots, R_n – реакції проміжних опор.

Визначення невідомих реакцій (розкриття статичної невизначеності) потребує введення додаткових рівнянь до задачі. Ці рівняння фактично є умовами деформування розглядуваної статично невизначеної системи за наявних додаткових закріплень. Але те, що при визначенні реакцій використовуються умови деформування, призводить до залежності величини реакцій від моделі деформування і нарешті від спрощуючих гіпотез, прийнятих при її побудові.

Наприклад, для шарнірних проміжних опор у нерозрізних балках додатковими умовами є відсутність вертикальних переміщень опорних перерізів

$$w(r_1) = 0, w(r_2) = 0, w(r_3) = 0, \dots, w(r_n) = 0, \quad (15)$$

де $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ – значення незалежної змінної x , що відповідають координатам опорних перерізів.

З урахуванням (12) додаткові рівняння (15) для розглядуваної зсувної моделі запишуться так:

$$w_0(r_j, R_1, R_2, \dots, R_n) - \sum_{i=1}^m (-1)^i \frac{D_{0i}}{D_{00}} \chi_{mi}(r_j, R_1, R_2, \dots, R_n) = 0, \quad (16)$$

де $j = \overline{1, n}$ – розгортає систему по вертикалі.

Для нульового наближення моделі ($m = 0$) попередній вираз перетвориться на такий:

$$w_0(r_j, R_1, R_2, \dots, R_n) = 0. \quad (17)$$

У відмінності між даними виразами і криється причина перерозподілу реакцій закріплень статично невизначних систем при використанні ітераційної зсувної моделі. Одним із чинників впливу деформівних властивостей бруса на перерозподіл реакцій, як можна побачити, є відношення жорсткостей D_{0i}/D_{00} . Причому найбільший вплив на уточнення розподілу реакцій матиме вплив відношення D_{01}/D_{00} , оскільки практика розрахунків показує, що $D_{01} \ll D_{02} \ll D_{03}$. Тому очевидно найбільшим і можливо достатнім буде уточнення реакцій буде на першому кроці моделі ($m = 1$).

Наявність впливу зсувної піддатливості матеріалу бруса на перерозподіл реакцій показано у роботі [4], де запропоновано методіку моделювання статично невизначних багатопрогонових балок, засновану на першому наближенні ітераційної зсувної моделі згину. Але ці теоретично отримані результати потребують порівняння із результатами існуючих методів, які дозволяють врахувати вплив поперечних сил, і підтвердження експериментальними дослідженнями, для перевірки адекватності отриманих результатів.

Експериментальне дослідження впливу зсувної піддатливості матеріалу бруса на величину опорних реакцій статично невизначної балки проводилось за схемою наведеною на рис.1. В якості зразків використовувались дерев'яний ($E/G = 20$) та сталевий ($E/G = 2,6$) бруси прямокутного перерізу з розмірами відповідно: $b \times h = 0.03 \times 0.05$ м та $b \times h = 0.05 \times 0.01$ м. Вибір зразків з таких матеріалів дозволив у першому випадку чітко виявити вплив поперечних зсувів на дослідні величини, а у другому практично звести їх до нуля. Це дозволить більш чітко оцінити адекватність моделі. Крім цього використання деревини, як квазіоднорідного композита, дозволяє для порівняння теоретичних розрахунків використати відомі методи розкриття статичної невизначеності, використання яких для однорідних брусів можливе у звичному вигляді.

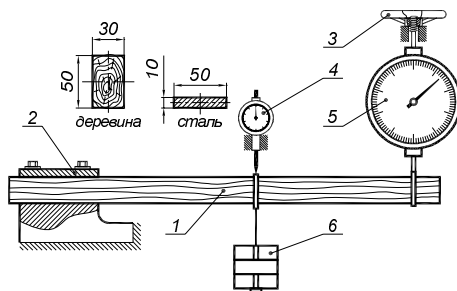


Рис.1 Схема випробування

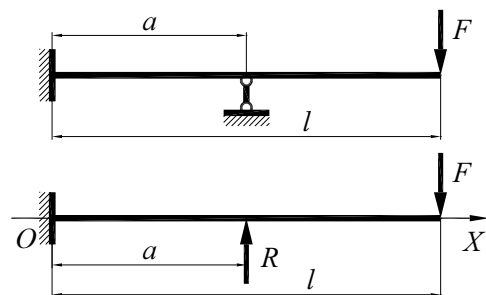


Рис.2 Розрахункова схема балки

Вантаж 6 у ході випробування збільшувався з кроком – 5кг . На кожному кроці випробування доданий вантаж врівноважувався зусиллям гвинтового навантажувача 3, приєднаного до балки 1 через динамометр 5, таким чином щоб забезпечити нульові переміщення перерізу над вантажем. Контроль переміщень перерізу здійснювався за допомогою індикатора годинникового типу 4. Таким чином, моделювалась робота статично невизначної балки, схема якої зображена на рис.2, де реакції R на шарнірній опорі відповідає вага вантажу 6, а сили F – показники динамометра 5. У ході дослідження задавались два положення проміжної опори: $a = 0.2$ м і $a = 0.3$ м. Це дозволило оцінити характер впливу відношення довжини прогону до висоти перерізу на величину реакції.

Теоретичне визначення реактивних зусиль за зсувною моделлю, виконувалось відповідно до методіки, описаної у [5], із використанням крайових умов [6]. Отримані результати порівнювались з даними розрахунків за відомими методами опору матеріалів. Результати експериментальних та теоретичних досліджень наведені на рис.3, де: 1 – графік аналітичної залежності між силою F та реакцією R , отриманої за рівнянням 3-х моментів, яке не дозволяє враховувати вплив поперечної сили; 2 – графік залежності отриманої за методом сил з урахуванням впливу поперечної сили; 3 – графік залежності отриманої за зсувною моделлю з урахуванням деформацій поперечного зсуву.

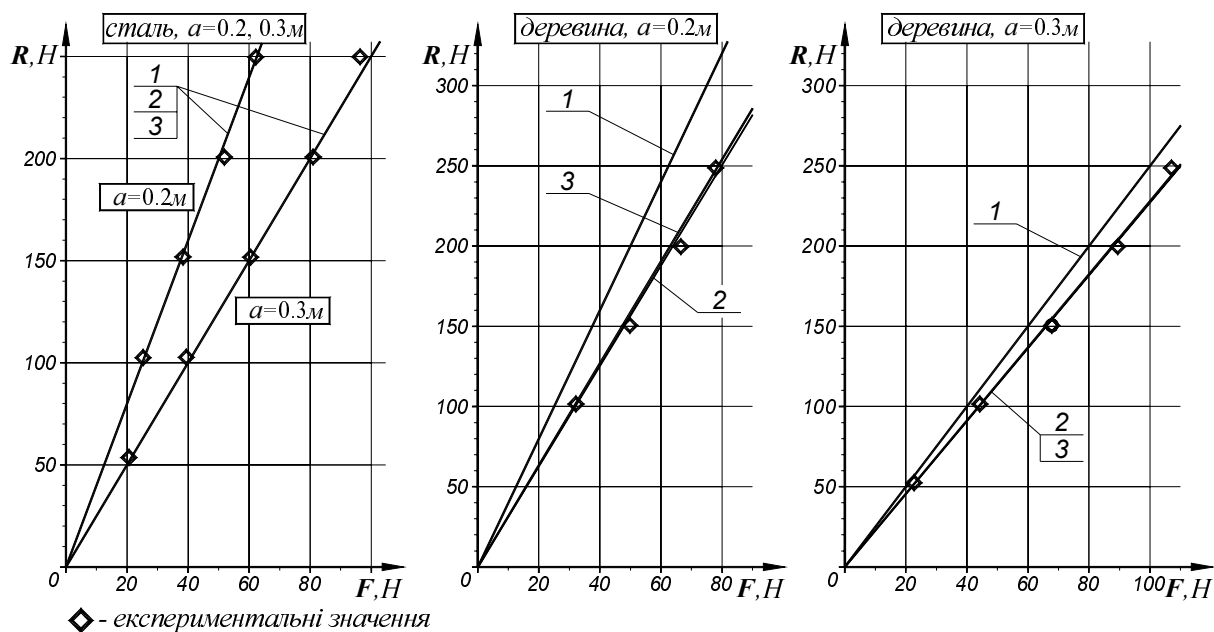


Рис.3 Графічне порівняння теоретичних та експериментальних досліджень

Наведені результати експериментальних та теоретичних досліджень показують значний вплив зсувної піддатливості на величину реакції опори для дерев'яного зразка. Цей вплив проявлявся у різниці між дослідною величиною реакції та теоретично отриманим значенням за рівнянням трьох моментів, який не дозволяє врахувати вплив поперечної сили. Усереднене значення похибки досягає 30% для положення опори $a = 0.2m$ і 10% для положення $a = 0.3m$. В той час, як метод сил з урахуванням поперечної сили і зсувна модель дають досить близькі між собою значення, які гарно узгоджуються з експериментом. Для сталевих зразків, як і передбачалося, усі теоретичні методи дають результати близькі між собою і до експериментальних значень, оскільки дослідне відношення довжини прогону до висоти перерізу велике, а матеріал мало піддатливий зсувам.

Висновки. Отримані у роботі результати показують, що для ітераційної зсувної моделі згину композитних брусів на будь-якому кроці уточнення характер розподілу внутрішніх зусиль залишається незмінним і відповідає класичній моделі згину. Вплив зсувної піддатливості матеріалу бруса на величину внутрішніх зусиль у статично визначених задачах відсутній, а у статично невизначених задачах пов'язаний із перерозподілом реактивних зусиль (реакцій опор).

Порівняння результатів експериментальних та теоретичних досліджень показує необхідність врахування дії поперечних зсувів при визначенні реактивних зусиль у статично невизначених композитних системах. Результати, отримані за методом сил з урахуванням поперечної сили та зсувною моделлю гарно узгоджуються з експериментом. Але застосування методу сил у звичному вигляді можливе лише для квазіоднорідних композитів. Що стосується неоднорідних композитів, із суттєвим рівнем піддатливості поперечним зсувам, то їх розрахунок потребує застосування зсувної моделі.

Література

1. Шваб'юк В.І. Опір матеріалів: Навч. Посіб. / В.І. Шваб'юк – К.: Знання, 2009. – 380с.
2. Піскунов В.Г. Итерационная аналитическая теория в механике слоистых композитных систем // Механика композит. Материалов. – 2003. – Т.39, №1. – С.2-24.
3. Горик О.В. Механіка деформування композитних брусів / О.В. Горик, В.Г. Піскунов, В.М. Чередніков. – Полтава-Київ: АСМІ, 2008. – 402с.
4. Горик О.В. Ітераційна зсувна модель у статично невизначених задачах згину композитних брусів / Горик О.В., Ковальчук С.Б. // Состояние современной строительной науки – 2010. Сб. научн. трудов. Полтава: Полтавский ЦНТЭИ. – 2010. – С.47-53.
5. Горик О.В. Розрахунок статично невизначених композитних балок з ускладненими умовами деформування / Горик О.В., Ковальчук С.Б. // Вісник Національного транспортного університету: В 2-х частинах: Ч.2. – К.: НТУ, 2010. – Випуск 21. – С.314-319.
6. Ковальчук С.Б. Формування крайових умов в ітераційній зсувній моделі згину композитних брусів // Состояние современной строительной науки – 2011. Сб. научн. трудов. Полтава: Полтавский ЦНТЭИ. – 2011. – с.47-53.