де $u(z,t)$, $v(z,t)$ – пружні переміщення елемента труби БК в напрямах осей Ox, Oy, відповідно; EI – жорсткість труби БК при згині; ρ, ρ_l – густина матеріалу труби і промивної рідини, відповідно; F, F_l – площі поперечних перерізів стінки труби і її внутрішнього каналу, відповідно; t – час. Використання системи (9) разом з рівняннями (1)-(8) дозволяє моделювати явища коливань кружляння.

Робота виконана в рамках державного замовлення Міністерства освіти і науки України № ДЗ/ 295-2008 «Розроблення технологій безаварійного буріння надглибоких вертикальних і криволінійних нафтових та газових свердловин».

Література

1. *Борщ Е.И., Ващилина Е.В., Гуляев В.И.* Спиральные бегущие волны в упругих стержнях// Известия Российской академии наук. Механика твердого тела– 2009. – №2. С. 143 – 149.
2. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем . – М.: Наука, 1967. – 519 с.
3. *Gulyayev V.I., Borshch O.I.* Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2011 Ï V. 78. Ï P. 759 – 764.
4. *Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Solovjov I.L., Gorbunovich I.V.* The buckling of elongated rotating drill strings // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2009. – 67. – P.140–148.
5. *Gulyayev V.I., Hudoly S.N., Glovach L.V.* The computer simulation of drill column dragging in inclined bore-holes with geometrical imperfections // International Journal of Solids and Structures. – 2011. – V.48. – P.110–118.
6. *Gulyayev V.I., Hudoliy S.N., Glushakova O.V.* Simulation of torsion relaxation auto-oscillations of drill string bit with viscous and Coulombic friction moment models // Journal of Multi-body Dynamics. – 2011 Ï V. 225. Ï P. 139 – 152.
7. *Gulyayev V.I., Khudoliy S.N., Andrusenko E.N.* Sensitivity of resistance forces to localized geometrical imperfections in movement of drill strings in inclined bore-holes // Interaction and Multiscale Mechanics. – 2011. – V.4. – No.1. – P.1–16.
8. *Christoforou A.P., Yigit A.S.* Dynamic modelling of rotating drillstrings with borehole interactions // Journal of Sound and Vibration. – 1997. – 206(2). – P.243 – 260.
9. *Jansen J.D.* Wirl and chaotic motion of stabilized drill collars // SPE Drilling Engineering. – 1992. – 7(2). – P.107 – 114.

УДК 681.3

ПЕРЕХІДНІ ЯВИЩА ДЛЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИПАДКОВОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

Кандидат фізико-математичних наук Дегтярь С.В.,
кандидат фізико-математичних наук Дегтярь В.Г.

Досліджено асимптотичну поведінку розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь із коефіцієнтами, що залежать від напівмарковського процесу зі зчисленною множиною станів.

The asymptotic behavior of solutions of linear differential equation systems is investigated for the cases, when fheir coefficients depend on semi-markov processes with calculable sets of states.

Постановка проблеми. Прикладні задачі математики, зокрема проблеми стабілізації систем управління, побудови оптимального управління спонукають до вивчення систем диференціальних рівнянь, що залежать від випадкових процесів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проста стохастична модель односекторної економіки розглядалась в роботі [2].

Мета роботи. Дослідити асимптотичну поведінку розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь із коефіцієнтами, що залежать від напівмарковського процесу зі зчисленною множиною станів [1].

Постановка проблеми. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dY(t)}{dt} = F(Y(t),X(t)), \quad dimY(t) = m, \tag{1}$$

де $X(t)$ – напівмарковський випадковий процес зі зчисленою множиною станів $\theta_1, \theta_2 \ldots$. Припустимо, що частинні системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dY_k(t)}{dt} = F_k(Y_k(t)), \quad F_k(Y) \equiv F(Y, \theta_k), \quad (k = 1,2,\ldots), \tag{2}$$

мають розв'язки, які можна продовжити при $t > 0$. Розв'язок системи (2) у формі Коші позначимо через

$$Y_k(t) \equiv R_k(t, Y(u)), \quad R_k(u, Y(u)) \equiv Y(u), \quad (k = 1,2,\ldots). \tag{3}$$

Нехай $ф = inf\{t \geq 0; X(t) \neq X(0)\}$ – момент першого стрибка процесу $X(t), t \geq 0$. Введемо умовні математичні сподівання випадкового розв'язку

$$M_k(t, Y) = P\{Y_k(t) \mid Y_k(0) = Y, X(0) = \theta_k\}, \; k = 1,2,\ldots \tag{4}$$

Зафіксуємо $k \in \{1,2,\ldots\}$ і покладемо

$$f_k(t, Y) = M_k(t, Y),$$

$$g_k(t, Y) = P_k\{Y_k(t) \mid Y_k(0)\} I_{\{0 \leq t < \tau\}} = R_k(t, Y) P_k\{t < \tau\},$$

$$G_{ks}(dt) = P_k\{X(\tau) = \theta_s, \tau \in dt\},$$

де $$P_k(\ldots) = P(\ldots \mid X(0) = \theta_k), \; k = 1,2,\ldots .$$

Покажемо, що має місце векторне рівняння відновлення

$$f(t, Y) = g(t, Y) + \int_0^t G(du) f(t - u, Y),$$

де $G(du)$ – матриця з елементами $G_{ks}(du)$, $f(t, Y)$ і $g(t, Y)$ – вектори-стовпці з компонентами $f_k(t, Y)$ і $g_k(t, Y)$ відповідно.

Дійсно за формулою повної ймовірності дістанемо систему інтегральних рівнянь

$$M_k(t, Y) = R_k(t, Y) P_k\{t < \tau\} + \int_0^t \sum_{s=1}^{\infty} P_k(X(\tau) - \theta_s, \tau \in du) M_s(t - u, R_k(u, Y)), \tag{5}$$

яка очевидно еквівалентна наведеному векторному рівнянню відновлення.

Якщо система рівнянь (1) лінійна і має вигляд

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(X(t)) Y(t), \quad A_k = A(\theta_k) \quad (k = 1,2,\ldots), \tag{6}$$

то система рівнянь (5) набуває такого вигляду

$$M_k(t)Y = e^{A_k t} Y P_k\{t < \tau\} + \int_0^t \sum_{s=1}^{\infty} P_k(X(\tau) = \theta_s, \tau \in du) M_s(t-u) e^{A_k u} Y \,. \tag{7}$$

Метод розв'язання. Для розв'язання поставленої задачі застосуємо аналітичний апарат – теорему марковського відновлення [2]. Припустимо, що напівмарковський випадковий процес залежить від малого параметру $\varepsilon > 0$. Перепозначимо

$$X(t) = X_\varepsilon(t), \quad \tau = \tau^\varepsilon, \quad Y(t) = Y_\varepsilon(t).$$

Нас цікавитиме асимптотична поведінка умовних математичних сподівань випадкового розв'язку системи (1) при $t \to \infty$, $\varepsilon \to 0$.

Нехай випадковий процес $X_\varepsilon(t), t \geq 0$ збігається до деякого випадкового процесу $X_0(t), t \geq 0$ з моментом першого стрибка τ^0 в розумінні

$$\begin{aligned} &\lim_{e\to 0} P_k\{X_e(t_1) = u_{s_1}, \ldots, X_e(t_n) = u_{s_n}, t_1, t_2, \ldots t_n < \phi^{e}\} = \\ &= P_k\{X_0(t_1) = u_{s_1}, \ldots, X_0(t_n) = u_{s_n}, t_1, t_2, \ldots t_n < \phi^{0}\} \end{aligned} \tag{8}$$

в точках неперервності $t_1, t_2, \ldots t_n$ граничного розподілу ймовірностей, $n = 1,2,\ldots; \theta_{s_i} \in \{\theta_1, \theta_2, \ldots\}, i = 1,2,\ldots$ для всіх $k = 1,2,\ldots$.

Вважатимемо, що $X_\varepsilon(0) = X(0)$.

Позначимо $m_k = P_k \tau^0$ і вимагатимемо, щоб

$$\sup \int_0^t P_k(\phi^{e} \in dt) t \underset{T\to\infty}{\to} 0 \,, \tag{9}$$

$$\inf_k m_k > 0 \,, \tag{10}$$

сукупність розподілів ймовірностей

$$P_k\{\phi^{e} \in dt\}, \tag{11}$$

$k = 1,2,\ldots$ нерешітчаста.

Припустимо, що існує така матриця $C = \left\| c^{ks} \right\|_{k,s=1}^{\infty}$, що

$$\lim_{e\to 0} \frac{1}{e}\left\{P_k\{X_e(\phi^{e}) = u_k\} - 1\right\} = c^{kk} \,, \tag{12}$$

$$\lim_{e\to 0} \sum_{s\neq k} \left\{\frac{1}{e} P_k\{X_e(\phi^{e}) = u_k\} - c^{ks}\right\} = 0 \,, \tag{13}$$

$$\sum_{s} c^{ks} = 0, \quad \sup_{k} \left| c^{kk} \right| < \infty . \tag{14}$$

Позначимо через $M^{\varepsilon}(t,Y), R(Y)$ – вектори-стовпчики з компонентами $M_k^{\varepsilon}(t,Y)$, $R_k(Y) = P_k \int_0^{\tau^0} R_k(u,Y)du$,

а через M – діагональну матрицю з елементами m_k на головній діагоналі.

Висновок. Теорема. *Нехай виконуються умови (8) – (14), тоді*

$$\lim_{\substack{e\to 0\\ t\to\infty\\ et\to u}} M^{\varepsilon}(t,Y) = e^{u\frac{C}{M}} M^{-1} R(Y)$$

в такому розумінні

$$\lim_{\substack{e\to 0\\ t\to\infty\\ et\to u}} \left\{ M_k^{\varepsilon}(t,Y) - \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{k\nu}(u) \frac{1}{m_\nu} R_\nu(Y) \right\} = 0 ,$$

для всіх $k = 1,2,\ldots$, *де* $\left\| p_{ks(u)} \right\|_{k,s=1}^{\infty} = exp\{uC\}$.

Аналогічно для системи диференціальних рівнянь (6)

$$\lim_{\substack{e\to 0\\ t\to\infty\\ et\to u}} \left\{ M_k^{\varepsilon}(t,Y) - \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{k\nu}(u) \frac{1}{m_\nu} T_\nu(Y) \right\} = 0 ,$$

де $T_k = P_k \int_0^{\tau^0} M_k(t) e^{A_k t} dt$, $k = 1,2,\ldots$, *або*

$$\lim_{\substack{e\to 0\\ t\to\infty\\ et\to u}} M^{\varepsilon}(t,Y) = e^{u\frac{C}{M}} M^{-1} T(Y) .$$

T *– вектор-стовпчик з компонентами* T_k.

Література

1. *Валеев К.Г., Карелова О.Л., Горелов В.И.* Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. – М.: Изд-во РУДН, 1996. – 258 с.

2. *Дегтярь С.В. Дегтярь В.Г.* Перехідні явища в теорії марковського відновлення // Вісник НТУ. – 2009. – № 19 – С.275 – 278.