УДК 59.376

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ УМОВ ПЛАСТИЧНОСТІ ДЛЯ МАТЕРІАЛІВ З РІЗНИМИ ГРАНИЦЯМИ ТЕКУЧОСТІ ПРИ РОЗТЯГУ І СТИСКУ

Доктор технічних наук Дехтяр А.С.

Розглянуто задачу про несність стиснуто – зігнутого стержня, зробленого з ідеального жорстко – пластичного матеріалу з неоднаковими границями текучості при розтягу і стиску. Водночас досліджено властивості умов текучості, спеціально розроблених для залізобетонних конструкцій. Проведено порівняння обох типів умов пластичності для того, щоби з'ясувати можливість обґрунтовано виконувати розрахунки несності залізобетонних конструкцій на основі більш зручних регулярних умов текучості для ідеальних середовищ

Simple problem for load carrying capacity of the bent — compressed bar is considered. Material of structure is ideal rigid – plastic with different limits of plasticity in compression and tension. Different yield conditions for ideal bodies are discussed. The specific yield conditions for the real reinforced concrete structures are also investigated. Comparison is made and a conclusion is done on the possibility of load carrying capacity computations for the reinforced concrete structures based on yield conditions for ideal rigid — plastic bodies.

Для розрахунків несної здатності конструкцій методами теорії граничної рівноваги необхідно мати своєму в розпорядженні умову пластичності (текучості). Вона зв'язує напруження або внутрішні зусилля з фізичними константами матеріалу. З умовою пластичності асоціюється закон течії, що встановлює напрям пластичної деформації як напрям зовнішньої нормалі до гіперповерхні текучості. Для розрахунків несності залізобетонних конструкцій існують умови пластичності, які розроблено спеціально.Крім того, застосовують також і умови пластичності для ідеальних жорсткопластичних середовищ. Тут зроблено спробу на простому прикладі порівняти умови текучості обох типів і встановити можливість заміни специфічних умов класичними умовами для ідеальних середовищ.

Постановка задачі. В розрахунках несної здатності тонкостінних оболонок зазвичай вважають, що поперечні сили мало впливають на перехід матеріалу в пластичний стан, тому умову текучості звичайно формулюють в шестивимірному просторі подовжніх і зсувних сил, згинальних і крутних моментів.

В загальному випадку умову текучості для оболонок можна представити рівнянням

$$F(N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}) = k, \qquad (1)$$

що зв'язує всі внутрішні зусилля. Таким шляхом враховується спільна дія всіх силових чинників під час переходу матеріалу в пластичний стан. Умову текучості вигляду (1) називають [1] умовою з повною взаємодією внутрішніх зусиль. Вона в шестивимірному просторі цих зусиль є опуклою замкнутою гіперповерхнею, що оточує початок координат.

Крім того, використовуються і умови текучості з неповною (частковою) взаємодією, тоді замість одного рівняння (1) використовуємо, наприклад, два рівняння

$$F_1(N_x, N_y, N_{xy}) = k_1; F_2(M_x, M_y, M_{xy}) = k_2. \qquad (2)$$

Перше з них зв'язує тільки мембранні, а друге – тільки згинальні компоненти напруженого стану. Іноді припускають, що між константами k_1 і k_2 існує той чи інший зв'язок. Наприклад, умова текучості В.І. Розенблюма [2] виходить з припущення про те, що $k_1^2 + k_2^2 = 1$.

Аналогічно (2) умова пластичності може бути представлена трьома рівняннями, що попарно зв'язує внутрішні зусилля кожного їх напрямків

$$F_1(N_x, M_x) = k_1; F_2(N_y, M_y) = k_2; F_3(N_{xy}, M_{xy}) = k_3. \qquad (3)$$

У ряді практичних задач теорія пластичності застосовується до конструкцій з матеріалу з неоднаковими границями текучості σ при розтягуванні і при стиску σ^{-}, причому найбільш важливий випадок, коли $\sigma \prec\prec \sigma^{-}$. Прийнято вважати, що такий ідеальний пластичний матеріал близький за властивостями до залізобетону. Крім того, для залізобетонних конструкцій умови пластичності можуть бути сформульовано спеціально . Для тонкостінних конструкцій найбільш відомі умови Генієва-Киссюка-Тюпіна [3] і Карпенка – Морлі [5,7] . Перша з них відноситься до умов типу (1) і має вигляд

$$\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x)-(R_b-R_{bt})(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)+3(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)-$$
$$\mu_x R_S(2\sigma_x-\sigma_y-\sigma_z)-\mu_y R_S(2\sigma_y-\sigma_z-\sigma_x\_-\mu_z(2\sigma_z-\sigma_x-\sigma_y)+R_S^2(\mu_x^2+\mu_y^2+\mu_z^2-\mu_x\mu_y-$$
$$-\mu_y\mu_z-\mu_z\mu_x)+(R_b-R_{bt})(\mu_x+\mu_y+\mu_z)R_S-R_bR_{bt}=0$$

Вона сформульовано в напруженнях, а для переходу до узагальнених напружень (внутрішніх зусиль) необхідно інтегрувати його по товщині оболонки. Інтегрування може виявитися ускладненим, проте можна спростити задачу, якщо постулювати повну пластифікацію матеріалу в момент, коли границь текучості досягають лише фіброві напруження [4]. Використовуючи таке припущення, можна отримати умову текучості залізобетонної оболонки в просторі внутрішніх зусиль

$$N_x^2-N_xN_y+N_y^2-3N_{xy}^2+12h^{-2}(M_x^2-M_xM_y+M_y^2 3M_{xy}^2)-\sigma_S h(\rho-1)(N_x-N_y)-$$
$$\mu_x R_S h(2N_x-N_y)-\mu_y R_S h(2N_y-N_x)+R_S^2h^2(\mu_x^2-\mu_x\mu_y+\mu_y^2)+R_S\sigma_S h^2(\rho-1)(\mu_x+\mu_y)- \quad (5)$$
$$\rho\sigma_S^2=0$$

Інша можливість полягає в тому, щоб для виділеного елемента оболонки сформулювати умову пластичності безпосередньо в термінах зусиль. Таким шляхом одночасно і незалежно один від одного побудували умови пластичності С.Т.Морлі [7] і М.І.Карпенко [5]

$$(M_{xy}-0{,}5tN_{xy})^2-(M_x-0{,}5tN_x-M_{tx})(M_y-0{,}5tN_y-M_{ty})\le 0; M_x-0{,}5tN_x=M_{tx}\le 0;$$
$$M_y-0{,}5tN_y-M_{ty}\le 0;(M_{xy}-0{,}5tN_{xy})^2-(-M_x-0{,}5tN_x-M_{tx}^*)(-M_y-0{,}5tN_y-M_{ty}^8)\le 0 \quad (6)$$
$$-M_x-0{,}5tN_x-M_{tx}^*\le 0;-M_y-0{,}5tN_y-M_{ty}^*\le 0$$

В роботі [6] дано геометричне представлення умов текучості, побудованих на підставі норм проектуванні СНиП П-В.1-62. Зрозуміло, умова (4.45) описує гіперповерхню в шестивимірному просторі, а умові (6) відповідають шість гіперплощин, отже замкнута поверхня текучості утворюється їх перетином, вона містить ребра і вершини. Такі ж властивості має і умова [6] воно також стосується умов з частковою взаємодією.

В розрахунках несної здатності жорсткопластичних конструкцій умова типу (1) зручніша від інших саме через свою регулярність. Застосування асоційованого закону течії не пов’язано з якими-небудь утрудненнями, оскільки до кожної точки гіперповерхні текучості може бути проведена єдина дотична площина і єдина нормаль. Умови типу (2), (3) і подібні їм призводять до сингулярних поверхонь, можуть містити особливі точки на ребрах і вершинах, нормаль в них виявляється неєдиною, тому для таких точок потрібен розгляд декількох режимів пластичної течії – громіздка робота, що погано піддається алгоритмізації.

Нижче на простому прикладі – в задачі про несну здатність прямолінійного стиснуто-зігнутого стержня різні умови пластичності порівнюються між собою, а також з умовою Надаї [4] для матеріалів з неоднаковими границями текучості при стику і розтягу і умовою, отриманою нижче. Мета порівняння полягає в тому, щоб з’ясувати, наскільки обґрунтованим є поширене припущення про придатність регулярних умов типу Надаї [4] для розрахунків несної здатності залізобетонних конструкцій.

Умови пластичності. Нехай стержень прямокутного поперечного перерізу закріплений і навантажений так, як показано на рис.1.

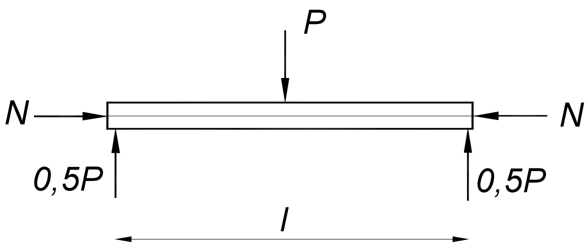

Рис.1

Стискальні сили прикладено по осі стержня. Задача про несну здатності такого стержня з ідеального жорсткопластичного матеріалу з однаковими границями текучості при розтягуванні і стиску добре вивчена [8] і умова текучості має вигляд

$$n^2 + m = 1\ , \tag{7}$$

де $n = NN_o^{-1}; m = MM_0^{-1}; N, M$ – відповідно осьова сила і згинальний момент, N_0, M_0 – граничні значення цих силових чинників. На координатній площині n, m умова (7) має вигляд параболи (рис.2), і можна помітити довантажувальний взаємний вплив внутрішніх зусиль. Дійсно, при

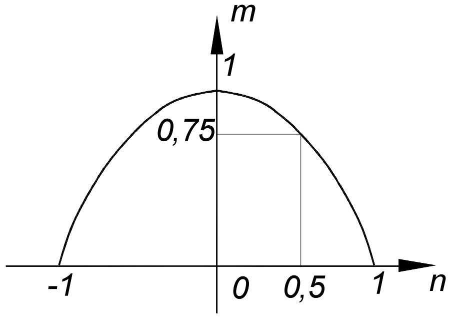

Рис.2

$n = 0{,}5$, тобто при $N = 0{,}5N_0$ несна здатність стержня вичерпується вже при $M = 0{,}75M_0$.

Припустимо тепер, що матеріал стержня має неоднакові границі текучості при розтягуванні σ і при стиску $\rho\sigma$, причому $\rho \succ\succ 1$. Приймемо далі, що в перетині, що досяг граничного стану, епюра нормальних напружень (рис.3,) може бути

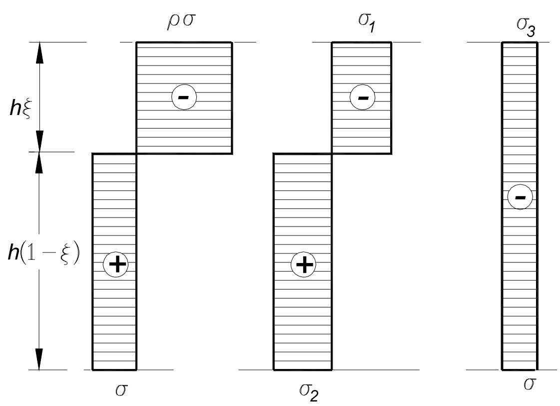

Рис.3

представлена сумою епюр згинальних і осьових напружень. Тоді

$$\sigma_1 + \sigma_3 = \rho\sigma; \sigma_2 - \sigma_1 = \sigma \ . \tag{8}$$

Врахуємо також умову статичної рівноваги

$$\xi\sigma_1 = (1-\xi)\sigma_2 \ . \tag{9}$$

Розв'язуючи спільно рівняння (8) і (9) щодо невідомих $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, знаходимо

$$\sigma_1 = \sigma(1+\rho)(1-\xi); \sigma_2 = \sigma\xi(1+\rho); \sigma_3 = (\rho - (1+\rho)(1-\xi) \tag{10}$$

Переходячи до внутрішніх зусиль, одержуємо

$$N = \sigma h(\rho - (1+\rho)(1-\xi)); M = 0{,}5\sigma h^2 \xi(1+\rho)(1-\xi). \tag{11}$$

Тут h – висота прямокутного перетину стержня (ширина умовно прийнята такою, що дорівнює 1), ξ – відносна висота стиснутої зони (рис.3).

Граничні значення внутрішніх зусиль представимо у такому вигляді

$$N_0 = \sigma h\rho; M_0 = 0{,}5\sigma h^2 \rho(1+\rho)^{-1} \ . \tag{12}$$

Можна переконатися в тому, що в частинному випадку матеріалу з однаковими границями текучості ($\rho = 1$) з (12) одержуємо відомі вирази

$$N_0 = \sigma h; M_0 = 0{,}25\sigma h^2.$$

Із співвідношень (11) виключимо величину ξ — висоту стиснутої зони перетину. Далі виразимо внутрішні зусилля N, M через їх граничні значення (12) і отримаємо після перетворень остаточний вираз для умови текучості

$$m + \rho n^2 - \rho n + n = 1 \ , \tag{13}$$

Перш, ніж перейти до детального аналізу цієї умови, піддамо її формальній перевірці. По-перше, за відсутності осьової сили ($n = 0$) знаходимо, як і належало би, $m = 1$. Так само за відсутності згинального моменту ($m = 0$) одержуємо квадратне рівняння

$$\rho n^2 - n(\rho - 1) - 1 = 0,$$

корені якого

$$n = 0{,}5((\rho-1) \pm ((\rho-1)^2 + 4\rho)^{0,5} \rho^{-1}.$$

Наприклад, при $\rho = 5$ знаходимо $n_1 = 1; n_2 = -0{,}2$, що відповідає п'ятикратному співвідношенню між граничними стискальним і розтягувальним осьовими зусиллями.

Нарешті, в окремому випадку для матеріалу з однаковими границями текучості при стиску і розтягуванні ($\rho = 1$) з (13) одержуємо відому умову пластичності В.Прагера [8].

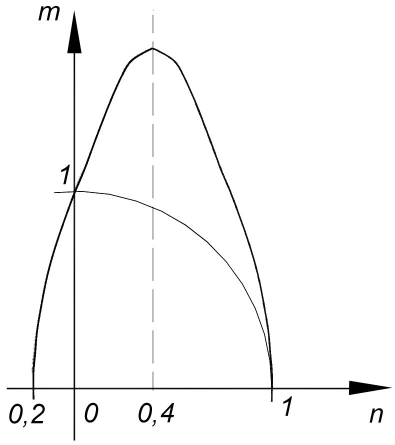

Рис.4

Обидві умови- (7) – для матеріалу з однаковими границями текучості і (13) для $\rho = 5$ — представлено на рис.4. Можна помітити, що дія нормальної сили істотно підвищує несну здатність стержня за згинальним моментом. Диференціюючи (13) по n, знаходимо точку максимума . Умова $dm / dn = 0$ приводить до співвідношення $n = 0{,}5(\rho - 1)\rho^{-1}$, і при $\rho = 5$ маємо $n = 0{,}4$. Підставляючи цю величину в умову текучості (13), одержуємо $m = 1{,}8$. Помічаємо, що зростання несної здатності залежить від збільшення співвідношення ρ між границями текучості матеріалу. Місце максимуму на графіку також залежить від ρ і із збільшенням ρ зміщується вправо.

Отриману вище умову пластичності (13) порівняємо з відомою умовою Надаї [4] для матеріалів з різними границями текучості при стиску і розтягуванні. В просторі внутрішніх зусиль тонкої оболонки воно має вигляд

$$n_x^2 - n_x n_y + n_y^2 + 3n_{xy}^2 + m_x^2 - m_x m_y + m_y^2 + 3m_{xy}^2 + (\rho - 1)(n_x + n_y) - \rho = 0 \qquad (14)$$

Утримуючи в (14) ті доданки, які стосуються даної задачі про стиснуто-зігнутий стержень, отримаємо

$$m^2 + n^2 - \rho n + n - \rho = 0. \qquad (15)$$

У такому вигляді ця умова не може бути прямо порівняна з умовою (13), зважаючи на незбіг прийнятих позначень. В [4] позначено $\rho = \sigma / \sigma^-$, тобто ρ — величина, обернена до такої ж величини в нашій умові (13). Крім того, позначення *n* в роботі [4] також відрізняється: $n = NN_0^+$, де N_0^+ – гранична осьова розтягувальна (а не стискальна) сила. На рис.5 умови текучості (13) і (15) подано в зіставному вигляді для частинного випадку $\rho = 5$. Можна помітити, що найбільша несна здатність за згинальним моментом виявляються при $n = 0{,}4$, і це збільшення становить $m = 1{,}33$.

Далі звернемося до умови Г.А.Генієва – В.Н.Киссюка_ Г.А.Тюпіна. [3]. Утримуючи необхідні доданки, одержимо умови пластичності для стиснуто-зігнутого залізобетонного стержня

$$N^2 + 12Mh^{-2} - N\sigma_S h(\rho - 1) - 2N_x \mu_x \sigma_S h - \rho^2 h^2 \sigma_S^2 = 0 \ . \qquad (16)$$

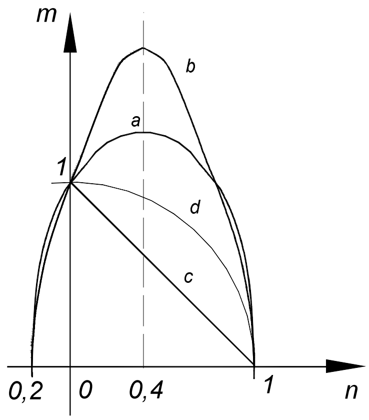

Рис.5

Тут σ_S – умовна границя текучості бетону при розтягуванні, k — відношення між границями текучості арматури і бетону, μ – коефіцієнт армування. Для зіставлення цієї умови текучості з двома попередніми приймемо, що робоча арматура розташовується по осі стержня і плече внутрішньої пари $0{,}5h$. Після перетворень одержуємо з (16)

$$n^2 + 3m_2\mu^2 k^2 \rho^{-2} - na - \rho^{-1} = 0, \qquad (17)$$

де
$$a = (\rho - 1)\rho^{-1} + 2\mu k \ .$$

Якщо прийняти $\mu = 0{,}03, \rho = 5, k = 20$, то з (17) виходить

$$n^2 + 0{,}17m^2 - 2n - 0{,}2 = 0.$$

Після масштабування отримаємо параболу, що збігається з лінією a (умова Надаї).

На відміну від умови текучості Надаї умову Карпенка — Морлі безпосередньо сформульовано в зусиллях (6).Даної задачі про стержень з шести рівнянь (18) стосується лише рівняння

$$M - 0{,}5tN - M_0 \leq 0 \ . \qquad (18)$$

Тут t – плече внутрішньої пари. Після перетворень отримаємо лінійне співвідношення

$$-2\mu k(1-m) + \rho n = 0 \ . \qquad (19)$$

В частинному випадку при $\mu = 0{,}03, \rho = 6, k = 100$ умова (19) набуває вигляду

$$n + m = 1 \ . \qquad (20)$$

Йому відповідає пряма c на рис.5, тобто не виявляється будь-яке збільшення несної здатності при спільній дії згину і стиску.

Огляд умов пластичності завершимо розглядом роботи [6], в ній А.М.Проценко і В.В.Власов графічно представили співвідношення норм проектування (рис.6). Після повороту і масштабування цю умову текучості (лінія 3) разом з рештою умов представлено на рис.7

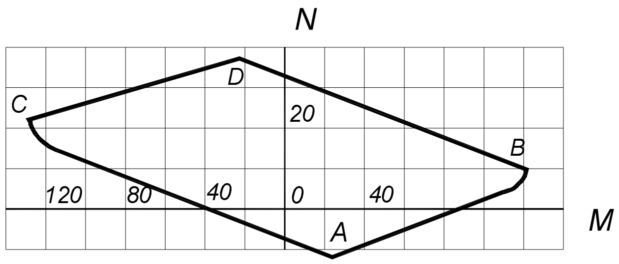

Рис.6

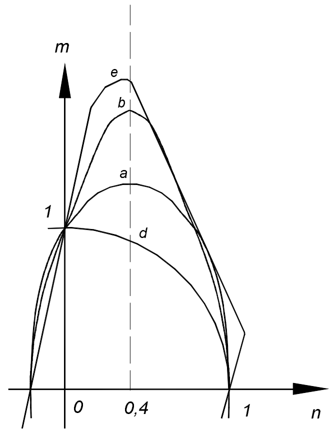

Рис.7

Висновки. Порівняння описаних тут умов пластичності для стиснуто-зігнутого стержня з ідеального жорсткопластичного матеріалу і залізобетону дозволяє зробити певні висновки.

1. Відзначена схожість між умовами (13), Надаї і Проценка -Власова свідчить про можливість розрахунки несної здатності залізобетонних конструкцій виконувати на основі певної регулярної умови текучості для ідеальних жорсткопластичних тіл.

2. Підвищення несної здатності стержня за згинальним моментом за рахунок осьового стиску спостерігалося і раніше. . Для балок і пластин воно відомо під назвою «аркового» або «склепінчастого» ефекту, підтверджується експериментально і спостерігається також і в конструкціях з матеріалу з однаковими границями текучості при стиску і розтягу, якщо обпирання виконано на нижніх волокнах опорних перерізів. Величина такого підвищення може лежати в межах між параболами *а* і *в*.

3. Серед розглянутих вище тільки умова Проценка — Власова припускає підвищення несної здатності за стискальною силою. При дії згинального моменту близько 0,4 M_0 воно становить (1,10…1,12) N_0 і майже не спостерігається в дослідах.

Література

1.Sawczuk A. Inzynierske metody analizy konstrukcji sprezysto-plastycznych//Mech. teor i stos.-1972,N 2

2. Розенблюм В.И. Приближенная теория равновесия пластических оболочек//.Прикл. математика и механика.-1954.-в.18, №3.-С.70-77

3. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона -М.: Стройиздат.-1974.-316 с.

4. Микеладзе М.Ш. Введение в теорию идеально – пластичных тонких оболочек.- Тбилиси: Мецниереба,1975.-156 с.

5. Карпенко Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами.-М.:Стройиздат, 1976.-196 с.

6. Morley C.T. On the yield criterion of an orthogonally reinforced concrete slab element // Journ. Mech. Phys. Solids.-1966/-14,N1

7. Проценко А.М., Власов В.В. Определение несущей способности железобетонных арок и куполов с помощью ЭВМ// Расчет пространственных конструкций.-1971.-вып.14.-С.42-49

8. Прагер В. Проблемы теории пластичности.-М.: ГИФМЛ.- 1958.-136 с.