Таблиця 1

Величина	Точна теорія [6]	Уточнена теорія р-ня (7)	Теорія типу Тимошенка р-ня (9)	Теорія Кірхгофа р-ня (10)
$\left.\frac{\sigma_{11}}{A}\right\|_{z=h/2}$	1,859	1,94 (4,36)	1,94 (4,36)	1,780 (4,25)
$\left.\frac{\sigma_{11}}{A}\right\|_{z=-h/2}$	-2,125	-2,144 (0,9)	-1,94 (8,71)	-1,780 (16,24)

Примітка. В дужках вказана відносна похибка в порівнянні з точним розв'язком в рамках теорії пружності.

Висновки. В роботі розглянуто задачі про вимушені коливання товстостінної пластини при розподіленому навантаженні в рамках прикладних теорій – теорія пластин з врахуванням поперечних зсувних та нормальних деформацій, теорія пластин типу Тимошенка та теорія пластин Кірхгофа. Проведено порівняльний аналіз отриманих результатів, який дозволяє визначати області використання прикладних теорій пластин при розв'язку динамічних задач.

Література

1. *Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А.* Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. – Киев: Изд. – полиграф. центр «Киевский уиверситет», 2005. – 536 с.
2. *Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А.* Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – Киев: Вища школа, 1986. – 191 с.
3. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
4. *Мейш В.Ф.* О численном решении двумерных динамических задач геометрически нелинейной теории дискретно подкрепленных цилиндрических оболочек типа Тимошенко // Прикладная механика. – 1997. – Т.33, №2. – С. 61–67.
5. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
6. *Власов Б.Ф.* Об одном случае изгиба прямоугольной толстой плиты // Вестник Московского ут-та. – 1957. — № 2. – С. 25 – 34.

УДК 539.3

В'ЯЗКО-ПРУЖНЕ ДЕФОРМУВАННЯ НЕОДНОРІДНИХ ГЕОЛОГІЧНИХ СТРУКТУР З МІКРОПОШКОДЖЕННЯМИ

Кандидат фізико-математичних наук Ляшенко Я.Г.

Запропоновано методику обчислення в'язко-пружних деформацій неоднорідних гірських порід. Використано модель нелінійного багатокомпонентного в'язко-пружного геологічного середовища, в якому внаслідок довготривалих природних процесів відбувається зміна властивостей, в тому числі накопичення пошкодженності.

The method of calculation of visco elastic deformations of heterogeneous geological environment is developed. The model of nonlinear multicomponent visco-elastic geological environment which properties is changing (for example accumulation of damage) by means of long-term nature processes is used.

Постановка проблеми. Важливими розрахунковими параметрами, що визначають тип конструкцій, розміри і технологію зведення виробок та підземних споруд, що будуються у гірських масивах, є характеристики деформівності та міцності геологічних середовищ. Гірські породи здатні деформуватись у часі без збільшення напружень, що спричинені об'ємними або поверхневими силами. Розглянуто нелінійну модель неоднорідного геологічного середовища, поведінка якого є залежною від наявності включень та мікропошкоджень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Значний вклад у розвиток теоретичних досліджень геологічних середовищ зроблено Єржановим, зокрема геологічні середовища з тріщинами докладно вивчались Качановим, Продайводою [1]. Було знайдено [2, 3] наближені значення для ефективних характеристик нелінійних ізотропних дисперсійних геологічних структур. Застосовуючи інформацію про мікроструктуру вищого порядку, можна і надалі намагатися поліпшити границі, тим самим підвищуючи достовірність моделювання та надійність експлуатації об'єкту в цілому. У роботах Талбота і Вілліса використовується новий метод розрахунку меж для ефективних властивостей нелінійних неоднорідних діелектриків і порівнюються результати з самоузгодженими оцінками. П.Кастанеда запропонував підхід [4], відповідно до якого наближені границі для ефективних властивостей нелінійних структур можна знайти в результаті введення структури лінійної, ідентичної за мікрогеометрією, але яка складається з лінійних, в сенсі фізичних властивостей, компонентів.

Мета роботи. Метою дослідження є розглянути залежність еквівалентних пружних сталих, функцій релаксації та повзучості від включень та мікропошкоджень геологічного матеріалу. Побудувати залежності модуля Юнга і модуля зсуву від параметру пошкодженості та спрогнозувати їх зміну у часі. Враховуючи неоднорідність структури геологічної породи та використовуючи розрахунки еквівалентних в'язкопружних характеристик, отримати прогнозовану залежність в'язко-пружних деформацій в залежності від геометрії включень та мікропошкоджень.

Основна частина. Матриця геологічного середовища припускається ізотропною і такою, що має в'язкі властивості повзучості. Залежність швидкості деформацій $\dot{\varepsilon}_{ij}$ від напружень σ_{ij} припускається степеневою [5,6], яка, зокрема, для тривимірного напружено-деформованого стану має вигляд

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2}\dot{\varepsilon}_0 (\sigma_e / \sigma_0)^{n-1} s_{ij} / \sigma_0 \quad . \tag{1}$$

Тут $\dot{\varepsilon}_0$ і σ_0 – величини швидкості деформації і напружень відлікового стану, s_{ij} — девіатор тензора напружень, σ_e — ефективні напруження. Показник зміцнення (жорсткості) *n* змінюється від одиниці до нескінченності.

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{mm}\sigma_{ij} ;$$

$$\sigma_e = (\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij})^{1/2} .$$

(1) можна записати у більш компактній формі

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2\eta}\sigma_e^{n-1} s_{ij} \tag{2}$$

де *h* — параметр в'язкості (повзучості), який визначається співвідношенням

$$\eta = \sigma_0^n / (3\dot{\varepsilon}_0) \cdot$$

Включення вважаємо осесиметричними і такими, що мають канонічну форму сфероїда і розміщеними в представницькому елементі багатокомпонентного матеріалу хаотичним чином.

Будемо використовувати наступні позначення для напружень на досить віддаленій границі ∂B області *B* неоднорідного геологічного середовища

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = T \; ; \; \sigma_{33} = S \; ; \; x \in \partial B \, , \tag{3}$$

де система координат x^i, яка збігається з головними вісями сфероїда.

Таким чином, якщо позначити

$$\sigma = S - T \, , \tag{4}$$

то

$$\sigma_e(x) = |\sigma| , \; x \in \partial B \, ; \tag{5}$$

$$\dot{\varepsilon}_{33}(x) = \dot{\varepsilon} \, ; \; \dot{\varepsilon} = \frac{1}{3\eta} |\sigma|^{n-1} \sigma \, , \; x \in \partial B \tag{6}$$

Розглянемо спочатку лінійну задачу

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \tag{7}$$

або

$$y_{ij} = л_{ijkl} e_{kl} \, ; \; e_{kl} = \dot{\varepsilon}_{kl} \tag{8}$$

Розглянемо сфероїд, сплюснутий або витягнутий, форма якого задана рівнянням

$$\frac{x_1^2}{b^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{a^2} = 1 \tag{9}$$

Закон (8) запишемо у вигляді

$$\sigma_{ij} = 2\eta (e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} e_{mm} \sigma_{ij}) \, , \tag{10}$$

де *n* — коефіцієнт Пуассона.

Якщо ввести тензор *Q*, який пов'язує напруження σ_{ij}^{∞} на віддаленій границі і швидкості деформацій включення

$$\overline{\sigma}_{ij} = Q_{ijkl} e_{kl}^{i} \, ; \; \overline{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^{\infty} \, , \tag{11}$$

то

$$Q_{ijkl} = \lambda_{ijkl} - \lambda_{ijmn} S_{mnkl} \, . \tag{12}$$

Тут S_{ijkl} – тензор Ешебі, який має складові

$$b\pi (1-\nu) S_{33} = 3a^2 I_{aa} + (1-2\nu) I_a \, ;$$

$$b\pi(1-\nu)S_{31} = 3b^2 I_{ab} - (1-2\nu)I_a\,;$$

$$b\pi(1-\nu)S_{13} = 3a^2 I_{ab} - (1-2\nu)I_b\,;$$

$$b\pi(1-\nu)S_{11} = 3b^2 I_{bb} + (1-2\nu)I_b\,;$$

$$b\pi(1-\nu)S_{12} = 3b^2 I_{ba} - (1-2\nu)I_b\,.$$

Величини ефективних параметрів повзучості ізотропного середовища з тріщинами обчислювались згідно з (10) із співвідношень, які виражаються через відповідні параметри повзучості середовища без тріщин і параметри пошкодженості, які залежать від радіусу тріщин і кількості їх на об'єм

$$\kappa^* = \alpha\kappa\,,\ \mu^* = \beta\mu\,;\ \gamma^* = \beta^4\gamma\,, \tag{13}$$

де

$$\alpha = [1+\omega(1-\nu^2)(1-2\nu)^{-1}]^{-1},\ \beta = [1+\omega(1-\nu)(1-\nu/5)(1-\nu/2)^{-1}]^{-1}. \tag{14}$$

Тут k- ефективний оператор об'ємного стиску, μ,ν,γ — інтегральні оператори зсуву, поперечної деформації Пуассона, а також оператор нелінійної повзучості середовища без тріщин. Параметр $\omega = \frac{8}{3}\frac{Na^3}{V}$ характеризує міру пошкодженості гірської породи**,** де a – радіус дископодібної тріщини, N – кількість тріщин в об'ємі V.

Висновки з даного дослідження і перспективи подальших досліджень в даному напрямку. В роботі розглянуто зміну напружено-деформованого стану гірських порід, що мають властивості повзучості, та які містять випадково розміщені включення. Вивчено мікроструктурні напруження, обчислено ефективні параметри та визначено їх залежність від форми, орієнтації і об'ємної концентрації включень. До того ж, як частинний випадок, розглянуто тріщинувате середовище, для моделювання якого пружні константи матеріалу включень прирівнено до нуля, а самі включення вироджені в поверхні. Враховуючи таку суттєву неоднорідність геологічної породи та наявність мікропошкоджень отримано залежність в'язко-пружних деформацій від часу та міри пошкодженості. В подальшому є необхідність використання нових моделей деформування таких геологічних середовищ, що знаходяться у стані повзучості із швидкостями, які залежать від структурних особливостей масиву та можливих геофізичних впливів.

Література

1. *Маслов Б.П., Продайвода Г.Т., Рева М.В.* Ідентифікація та оцінка достовірності визначальних параметрів електромагнітного поля у геологічних середовищах складної структури. // Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка: Геологія. – 2008. №3. – С.

2. *Вижва С.А., Маслов Б.П., Продайвода Г.Т.* Эффективные упругие свойства нелинейных многокомпонентных геологических еред // Геофизический журнал. – 2005. – №6, 27:86-96.

3. *Маслов Б.П., Ляшенко Я.Г.* Концентрація напружень в ізотропних в'язкопружних композитах з мікротріщинами. // Вісник Дон. ун-ту: Природничі науки. – 2002. — №2. – С. 50-53.

4. *Маслов Б.П.* Нелинейная ползучесть стохастически неоднородных сред // Прикладная механика. 1974. Т. 8, № 10. С. 64-69.

5. *Maslov B.P.* Thermal-stress concentration near inclusions in viscoelastic random composites // Journal of Engineering Mathematics. – 2008. N61. – P. 339-355.

6. *Теркот Д., Шуберт Дж.* Геологические приложения физики сполошных сред. – Мир, Москва, 1985.

7. *Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д.* Математическая теория пластичности. – Физматлит, Москва, 2003.