

УДК 539.3

ЕЛЕКТРОПРУЖНИЙ СТАН П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОЇ ПІВПЛОЩИНИ З ОТВОРАМИ ТА ТРІЩИНАМИ ПІД ДІЄЮ РІЗНИЦІ ПОТЕНЦІАЛІВ

Кандидат фізико-математичних наук Хорошев К.Г.,
кандидат фізико-математичних наук Глущенко Ю.А.

Розв'язана задача про узагальнений плоский електропружний стан багатозв'язаної п'єзоелектричної півплощини, що знаходиться під дією різниці електричних потенціалів. Представлені результати теоретичних досліджень та чисельного експерименту для півплощини з отвором та тріщиною.

The plane electroelastic problem for multiconnected piezoelectric half-plane situated only under electric potentials difference action is solved. Numerical investigations for electroelastic states of half-plane with circular hole and crack are carried out and analyzed.

Вступ. Плоску задачу електропружності для багатозв'язаної п'єзоелектричної площини вперше було розглянуто в роботі [1]. Подальші дослідження можна знайти в [2–3], в яких, як правило, вивчався вплив механічних навантажень на електропружний стан півплощини. В даній роботі на основі досліджень [1, 2, 4, 5] розв'язана плоска задача електропружності для п'єзоелектричної площини з отворами і тріщинами, коли на прямолінійній границі задано значення електричного потенціалу, на нескінченності – однорідний потік електричного поля, перпендикулярний прямолінійній границі.

Постановка задачі та методика розв'язання. Розглядається нижня півплощина з п'єзоелектричного матеріалу, яка має отвори та тріщини та знаходиться в узагальненому плоскому електропружному стані. В серединній площині пластинки маємо область S , обмежену прямолінійною границею L^+ і контурами отворів L_l ($l = \overline{1, L}$) та віднесена до системи декартових координат Oxy (рис. 1). Контури отворів та тріщин L_l не підкріплені та позбавлені електромеханічного навантаження. На прямолінійній границі нанесено тонкі електроди та задано значення φ^+ електричного потенціалу, прямолінійна границя не підкріплена та не завантажена. На нескінченності півплощина знаходиться під дією сталого поля $E_y^\infty = a$.

Також вважатимемо, що $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = E_x^\infty = \omega_3^\infty = 0$.

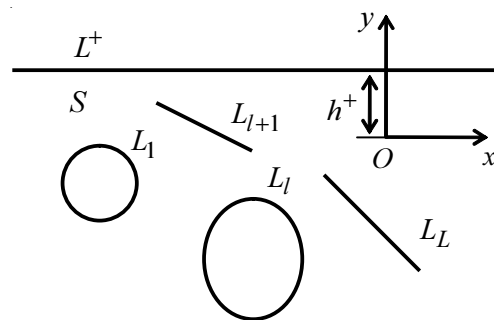


Рис. 1. Область S

Як відомо [1], задача зводиться до знаходження комплексних потенціалів $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 3}$), визначених в нижніх півплощинах S_k , які утворені з півплощини S афінними перетвореннями $z_k = x + \mu_k y$,

де $\mu_k (k = \overline{1, 3})$ – корені характеристичного рівняння [2]. При цьому прямолінійній границі L^+ та контурам отворів L_l відповідають прямолінійні границі L_k^+ та контури отворів L_{kl} .

Використовуючи результати досліджень [1, 2], для функцій $\Phi_k(z_k)$ запишемо

$$\Phi_k(z_k) = c_{k0} + \Gamma_k z_k + \Phi_{k0}(z_k) + \Phi_{k1}(z_k). \quad (1)$$

Тут Γ_k – сталі, що визначаються з системи рівнянь

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}, -r_k^0, -\mu_k r_k^0, q_k - \mu_k p_k) \Gamma_k = (0, 0, 0, 0, a, 0); \quad (2)$$

$\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}, \lambda_{8k}, r_k^0, p_k, q_k$, – відомі сталі, що залежать від фізико-механічних властивостей матеріалу [2]; c_{k0} – невідомі сталі; $\Phi_{k0}(z_k)$ – функції, голоморфні в нижніх півплощинах областей S_k ; $\Phi_{k1}(z_k)$ – функції, голоморфні в багатозв'язаних областях, що утворені точками, які лежать поза еліпсами L_{kl} , причому $\Phi_{k0}(\infty) = \Phi_{k1}(\infty) = 0$.

На прямолінійній границі L^+ механічні та електричні граничні умови мають вигляд [2]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ki}^0 \Phi_k(t_k) = 0 \quad (i = \overline{1, 2}), \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 r_k^0 \Phi_k(t_k) = \varphi^+. \quad (3)$$

Тут g_{ki}^0 – відомі сталі, що визначаються з умов навантаження [2].

Рівняння (3) в нескінченній точці прямолінійної границі вироджуються у

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ki}^0 c_{k0} = 0, \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 r_k^0 c_{k0} = \varphi^+ + ah.$$

З урахуванням останньої системи та рівнянь (1) і (3), отримано граничні умови на прямолінійній границі для визначення функцій $\Phi_{k0}(z_k), \Phi_{k1}(z_k)$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ki}^0 [\Phi_{k0}(t_k) + \Phi_{k1}(t_k)] = 0 \quad (i = \overline{1, 2}), \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 r_k^0 [\Phi_{k0}(t_k) + \Phi_{k1}(t_k)] = 0. \quad (4)$$

Для граничних умов на контурах отворів запишемо [2]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 g_{ki}^0 \delta_k [\Gamma_k + \Phi'_{k0}(t_k) + \Phi'_{k1}(t_k)] = 0 \quad (i = \overline{1, 3}), \quad (5)$$

де $\delta_k = dz_k / ds$, s – дугова координата контуру.

Граничним умовам (4) будемо задовольняти точно, методом інтегралів типу Коші, який ретельно описаний для такого типу задач в роботі [1]. Отже, якщо контури L_l не перетинають лінію L^+ та не торкаються її, то із рівнянь (4) методом інтегралів типу Коші знаходимо

$$\begin{aligned} \Phi_{k0}(z_k) = & -\bar{r}_k \bar{\Phi}_{k1}(z_k + (\bar{\mu}_k - \mu_k)h^+) - \bar{s}_{k+1} \bar{\Phi}_{k+1,1}(z_k + (\bar{\mu}_{k+1} - \mu_k)h^+) - \\ & - \bar{e}_{k+2} \bar{\Phi}_{k+2,1}(z_k + (\bar{\mu}_{k+2} - \mu_k)h^+). \end{aligned} \quad (6)$$

Тут $\bar{r}_k, \bar{s}_{k+1}, \bar{e}_{k+2}$ – відомі сталі [1].

Отже, задача звелась до знаходження функцій $\Phi_{k1}(z_k)$. Вигляд функцій $\Phi_{k0}(z_k)$, при якому точно задовольняються граничні умови на L^+ визначається формулою (6). Відобразимо зовнішність одиничного круга $|\zeta_{kl}| > 1$ на зовнішність контурів L_{kl} . Використовуючи розвинення функцій у ряди Лорана у відображених областях, для функції $\Phi_{k1}(z_k)$ маємо [2]

$$\Phi_{k1}(z_k) = \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \zeta_{kl}^{-n}(z_k), \quad (7)$$

де a_{kln} – невідомі сталі, що визначаються з граничних умов на контурах отворів (5).

Враховуючи (6) і (7) для функцій $\Phi_{k0}(z_k)$ отримуємо

$$\begin{aligned} \Phi_{k0}(z_k) = & - \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{r}_k \bar{a}_{kln} \bar{\zeta}_{kl}^{-n}(z_k + (\bar{\mu}_k - \mu_k)h^+) + \right. \\ & \left. + \bar{s}_{k+1} \bar{a}_{k+1,ln} \bar{\zeta}_{k+1,ln}^{-n}(z_k + (\bar{\mu}_{k+1} - \mu_k)h^+) + \bar{e}_{k+2} \bar{a}_{k+2,ln} \bar{\zeta}_{k+2,ln}^{-n}(z_k + (\bar{\mu}_{k+2} - \mu_k)h^+) \right). \end{aligned}$$

Невідомі сталі a_{kln} визначатимемо з граничних умов на контурах отворів (5) чисельним методом найменших квадратів, що добре описаний в роботі [2]. Для цього оберемо систему точок на контурах всіх отворів, складемо відповідний функціонал та, мінімізуючи його, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення a_{kln} . Після розв'язання цієї системи комплексні потенціали (1) будуть повністю визначеними, і за відомими формулами [2] можна буде знаходити значення напружень в будь-якій точці півплощини, а також значення коефіцієнтів інтенсивності напружень, напруженості й індукції (далі КІНІН) для кінців тріщини.

Результати аналізу чисельних досліджень. Проведені чисельні дослідження з їх аналізом розподілів значень напружень і КІНІН для п'єзокерамічної півплощини (матеріал PZT-5Н з віссю поляризації, паралельною осі Oz [6]) з круглим отвором або тріщиною (рис. 2), яка знаходиться під дією електричного поля $E_y = 1$ В/м. На прямолінійній границі задано нульове значення електричного потенціалу. Механічні зусилля відсутні, контури отворів не підкріплені та не електризовані.

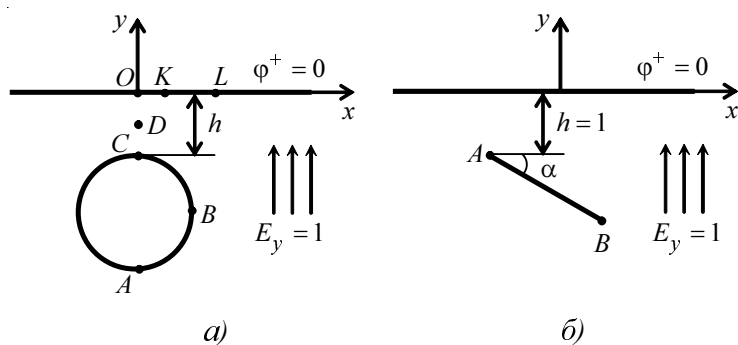


Рис. 2. Півплощина з отвором та тріщиною

В табл. 1 в залежності від довжини перемички, тобто відстані h (рис. 2, а), для півплощини з круговим отвором радіуса 1 м наведені значення напружень в точках $A(0; -h-2)$, $B(1; -h-1)$, $C(0; -h)$, $D(0; -h/2)$, $O(0; 0)$, $K(0,5; 0)$, $L(1,5; 0)$.

В табл. 2 в залежності від кута α нахилу тріщини до осі Ox приведені значення коефіцієнтів інтенсивності напружень та індукції для кінця A тріщини. При цьому вважалось, що довжина тріщина дорівнювала 2 м, а відстань $h = 1$ м.

З табл. 1, 2 та інших даних числових досліджень видно, що при дії різниці потенціалів значення напружень в точках перемички біля отвору та в точках прямолінійної границі зростають зі зменшенням перемички h . Значення КІНІН збільшуються при збільшенні α до деякого значення кута, а потім зменшуються. Так, наприклад, значення величини k_D^A збільшуються до $\alpha = 45^\circ$, а потім зменшуються до нуля. Якщо тріщина розташована паралельно силовим лініям електричного поля, то вона не створює додаткового електропружного поля в пластинці.

Таблиця 1. Результати для півплощини з отвором (рис. 2,а)

Значення h , м	Значення напружень в деяких характерних точках, Па							
	A	B	C	D		O	K	L
	σ_x	σ_y	σ_x	σ_x	σ_y	σ_x	σ_x	σ_x
10,00	-1,77	-1,53	-1,77	0,01	0,07	-0,06	-0,05	-0,04
5,00	-1,75	-1,52	-1,71	0,03	0,17	-0,18	-0,16	-0,07
1,00	-1,66	-1,30	-0,93	0,19	0,15	-0,80	-0,40	0,31
0,50	-1,64	-1,13	0,42	-0,01	0,01	-0,67	-0,40	0,15
0,10	-1,66	-0,96	-1,02	-0,64	-0,01	-0,30	-0,76	-0,04
0,01	-1,70	-0,96	-4,59	-2,33	-0,01	-0,11	-0,70	0,03

Таблиця 2. Результати для півплощини з тріщиною (рис. 2,б)

Величина	Значення кута α , град, нахилу тріщини до осі Ox							
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	85°	90°
k_1^A , Па \cdot м $^{-1/2}$	-0,023	-0,035	-0,026	-0,001	0,0001	0,001	0,0001	0
k_2^A , Па \cdot м $^{-1/2}$	-0,030	-0,005	0,014	0,017	0,001	0,003	0,001	0
k_D^A , мкКл \cdot м $^{-1/2}$	0	0,014	0,022	0,021	0,013	0,004	0,001	0
k_1^B , Па \cdot м $^{-1/2}$	-0,023	0,001	0,014	0,015	0,009	0,003	0,0001	0
k_2^B , Па \cdot м $^{-1/2}$	0,030	0,021	0,020	0,009	0,002	-0,001	0,0001	0
k_D^B , мкКл \cdot м $^{-1/2}$	0	0,014	0,022	0,021	0,013	0,004	0,001	0

Висновок. Розв'язана плоска задача електропружності для п'єзоелектричної площини з отворами і тріщинами, коли на прямолінійній границі задано значення електричного потенціалу, на нескінченності – однорідний потік електричного поля, перпендикулярний прямолінійній границі. Чисельними дослідженнями показано, що вплив отвору, тріщини на розподіл напружень в півплощині є суттєвим, і нехтувати ним при дослідженні не варто. Наближення отвору до прямолінійної границі викликає збільшення концентрацій напружень в точках перемички біля отвору та в точках прямолінійної границі. Якщо тріщина розташована перпендикулярно прямолінійній границі, то вона не створює додаткового електропружного поля в півплощині.

Література

1. Калоеров С.А., Глуценко Ю.А. Электроупругое состояние многосвязной пьезоэлектрической полуплоскости с отверстиями и трещинами // Дин. системы.– 2000.– Вып. 16.– С. 107–116.
2. Калоеров С.А., Баева А.И., Бороненко О.И. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 268 с.
3. Статические и динамические задачи электроупругости для составных многосвязных тел / Д.И. Бардозкас, А.И. Зобнин, Н.А. Сенник и др. – М.: КомКнига, 2005. – 376 с. (Математическое моделирование в задачах механики связанных полей, в 2 т. Т. 2)
4. Глуценко Ю.А., Хорошев К.Г. Электроупругое состояние конечной пьезоэлектрической пластинки с отверстиями и трещинами при заданных на контурах значениях потенциала // Вісн. Донец. ун-та. Сер. А. Природ. науки. – 2008. – № 1. – С. 211–218
5. Хорошев К.Г. Электроупругое состояние бесконечной многосвязной пьезоэлектрической пластинки при заданных на ее контурах значениях потенциала // Прикл. механика. – 2010. – Т. 46, № 6. – С. 88–97
6. Berlincourt D., Krueger H. H. A. Properties of Piezoelectricity Ceramics // Technical Publication TP-226. – www.morgan-electroceramics.com

УДК 539.3

ТЕОРЕТИЧНИЙ АНАЛІЗ ПРОЦЕСІВ СПУСКУ ТА ПІДЙОМУ БУРИЛЬНОЇ КОЛОНИ В КРИВОЛІНІЙНІЙ СВЕРДЛОВИНІ З ГЕОМЕТРИЧНИМИ НЕДОСКОНАЛОСТЯМИ

Кандидат технічних наук Худолій С.М.

На основі співвідношень теорії гнучких криволінійних стрижнів поставлена задача про пружне згинання бурильної колони в каналі криволінійної свердловини. Запропоновано методику розв'язання. Досліджено чутливість сил опору переміщенню колони до додаткових геометричних відхилень осьової лінії свердловини.

The problem about elastic bending of a drill string in the channel of a curvilinear bore-hole is stated on the basis of the theory of flexible curvilinear rods. The techniques for its solving are proposed. The resistance force sensitivity to the drill string moving inside the bore-hole with additional geometrical imperfections of its axial line is analysed

Постановка проблеми. Створення криволінійних свердловин з великим віддаленням дозволяє не тільки здійснювати прицільне досягнення віддалених підземних вмістилищ нафти і газу, а й істотно підвищити дебет свердловини і повноту відбору палива. Так, для вертикальних свердловин вдається витягти всього лише до 37% обсягу палива, для криволінійних свердловин цей показник збільшується до 55%. Проте технології буріння криволінійних свердловин пов'язані з підвищеною аварійністю і число безаварійних пробурених в світі свердловин складає тільки 67% [1]. Тому проблема практичного впровадження технологій буріння глибоких свердловин різної просторової орієнтації пов'язана з необхідністю теоретичного моделювання механічних явищ, супутніх бурінню, з метою попередження аварійних режимів. При цьому найбільш цікавими є питання визначення зовнішніх та внутрішніх зусиль, що діють на БК та сприяють її прихвату в криволінійній свердловині при функціонуванні та операціях спуску і підйому.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Для глибоких свердловин з гладкою осьовою лінією, через їх велику довжину і порівняно малу кривизну, внутрішні пружні моменти в трубі БК, а також викликані