УДК 539.3

РОЗВ'ЯЗАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТОВСТОСТІННОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО РЕЗЕРВУАРУ, ЯКИЙ ПЕРЕБУВАЄ ПІД ДІЄЮ ВНУТРІШНЬОГО ТА ЗОВНІШНЬОГО ТИСКУ

Гревцев О.К.,
Сорокина І.В.,
Бугера А.Р.

Постановка проблеми. Осесиметричні задачі теорії пружності належать до класу просторових задач, розв'язання яких має великі математичні труднощі.

Кінцевість розмірів обумовлює додаткові труднощі, пов'язані з необхідністю виконання граничних умов на бокових поверхнях та торцях тіла обертання.

Якщо не говорити про деякі тривіальні випадки, то немає жодного точного рішення осесиметричної задачі теорії пружності, яка строго і цілком задовольняла всім граничним умовам по боковим поверхнях і торцях тіла обертання [1]. Пропоноване авторами точне рішення осесиметричної задачі теорії пружності отримано вперше і не має аналогів у науковій літературі.

У цій роботі розглядається точне розв'язання осесиметричної задачі теорії пружності для полого циліндра з закритими кінцями (товстостінний резервуар), навантаженого рівномірно розподіленим тиском на його циліндричних та торцевих поверхнях, без яких-небудь спеціальних гіпотез, крім загальних гіпотез лінійної теорії пружності.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо аксіальне тіло обертання, чверть якого показана на рис. 1.

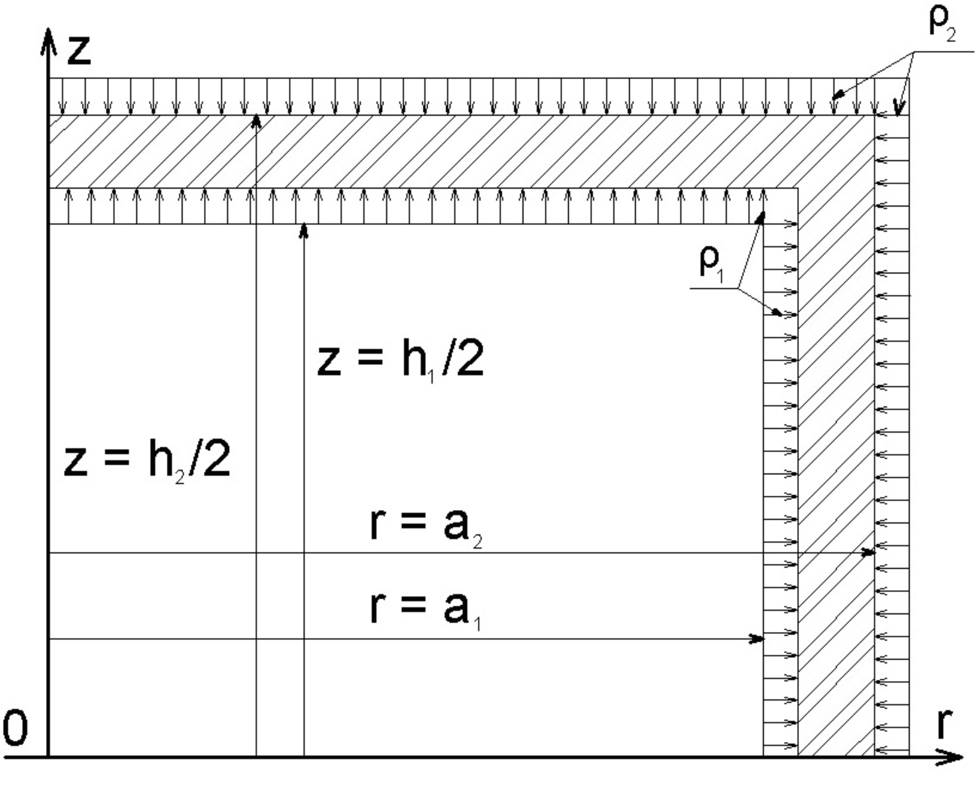

Рисунок 1. – Полий циліндр з закритими кінцями

Диференціальні рівняння рівноваги в циліндричних координатах (r, z) мають такий вигляд [2]:
в переміщеннях:

$$\Delta u_1 - \frac{u_1}{r^2} + \frac{e_{,1}}{(1-2\nu)} - \frac{2(1+\nu)\alpha\theta_{,1}}{(1-2\nu)} = 0; \tag{1}$$

$$\Delta u_3 + \frac{e_{,3}}{(1-2\nu)} - \frac{2(1+\nu)\alpha\theta_{,3}}{(1-2\nu)} = 0.$$

і напруженнях:

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{13,3} + \frac{(\sigma_{11} - \sigma_{12})}{r} = 0; \tag{2}$$

$$\sigma_{13,1} + \sigma_{33,3} + \frac{\sigma_{13}}{r} = 0.$$

У рівняннях (1) і (2) індекс після коми означає частинну похідну за відповідною координатою r або z; u_1 і u_3 – відповідно компоненти радіального і осьового переміщень; Δu - оператор Лапласа від переміщень $u_i (i = 1,3)$; $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{13}$ – відповідно компоненти радіальної, окружної, осьової і дотичної напружень.

Компоненти напружень визначаються за законом Гука [2]:

$$\sigma_{ij} = 2G(e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} e\delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-\nu} 2\theta\delta_{ij}), \text{ (i j=1,2,3)} \tag{3}$$

При відомих залежностях між деформаціями і переміщеннями:

$$e_{11} = u_{1,1};\ e_{22} = \frac{1}{r} u_1;\ e_{33} = u_{3,3};\ 2e_{13} = u_{1,3} + u_{3,1} \tag{4}$$

Тут σ_{ij} – символ Кронекера; α і ν – коефіцієнти лінійного теплового розширення і Пуасона; $e = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ – об'ємне розширення; $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль зсуву; E – модуль пружності.

Рішення системи рівнянь (1) беремо у вигляді:

$$u_1(r,z) = \frac{1+\nu}{1-\nu}[\psi_{,1} + \frac{1}{r}(A_5 z - A_3)] + r(A_4 z + \frac{1}{2} A_6); \tag{5}$$

$$u_3(r,z) = \frac{1+\nu}{1-\nu}(\psi_3 - A_5 \ln r) - A_4(\frac{\nu}{1-\nu} z^2 + \frac{r^2}{2}) - \frac{\nu}{1-\nu} z A_6 + A_7,$$

де A_i – довільні сталі інтегрування, а $\psi_{(r,z)}$ – функція, яку треба знайти.

Далі по переміщенням (5) за законом Гука (3) [2,3] визначаємо напруження :

$$\sigma_{13} = \frac{E}{1-\nu} \psi_{,13};\ \sigma_{33} = -\frac{E}{1-\nu} \frac{1}{r} (r\psi_{,1})_{,1}; \tag{6}$$

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu}[-\frac{1}{r}\psi_{,1} - \psi_{,33} - \frac{1}{r^2}(A_5 z - A_3) + A_4 z + \frac{1}{2} A_6];$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu}[-\psi_{,11} - \psi_{,33} + \frac{1}{r^2}(A_5 z - A_3) + A_4 z + \frac{1}{2} a_6].$$

Формула (5) і (6) є точними розв'язаннями рівнянь рівноваги (1) і (2), тому що після підстановки перетворюють останні на тотожності.

Граничні умови для напружень при осесиметричній деформації для полого циліндра з закритими кінцями будуть такими:

$$\sigma_{13} = 0, \text{ при } r = a_1;\ \sigma_{13} = 0, \text{ при } r = a_2;\ \sigma_{13} = 0, \text{ при } z = \frac{h_1}{2};\ \sigma_{13} = 0, \text{ при } z = \frac{h_2}{2} \tag{7}$$

$$\sigma_{11} = -P_2, \text{ при } r = a_2;\ \sigma_{11} = +P_1, \text{ при } r = a_1 \tag{8}$$

$$\sigma_{33} = -P_2 \text{, при } z = \frac{h_3}{2};\ \sigma_{33} = +P_1 \text{, при } z = \frac{h_1}{2}, \tag{9}$$

де a_1 і a_2 – внутрішній та зовнішній радіуси резервуара; $\frac{h_1}{2}$ і $\frac{h_3}{2}$ – внутрішня довжина полості і зовнішня довжина резервуара.

Для виконання граничних умов візьмемо частинну похідну по r від функції переміщень $\psi_{,1}(r,z)$ у вигляді:

$$\psi_{,1}(r,z) = \varphi(z)\frac{1}{r}(r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2), \tag{10}$$

де $\varphi(z)$ – довільна функція від z, яку потрібно визначити з граничних умов.

Деференцюючи похідну (10) по z і підставляючи у дотичну напругу σ_{13} з (6), знаходимо:

$$\sigma_{13} = \frac{E}{1-\nu}\psi_{,13} = \frac{E}{1-\nu}\varphi_{,3}\frac{1}{r}(r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2), \tag{11}$$

при цьому

$$\varphi_{13}(z)\Big|_{z = \frac{h_1(r)}{2}} = 0;\ \varphi_{13}(z)\Big|_{z = \frac{h_2(r)}{2}} = 0 \tag{12}$$

і граничні умови (7) виконуються.

Підставляючи похідну (10) в осьову напругу σ_{33} з (6), знаходимо:

$$\sigma_{33} = -\frac{E}{1-\nu}\varphi(z)\left[4r^2 - 2(a_1^2 + a_2^2)\right]. \tag{13}$$

Граничні умови (9) буде виконано, якщо

$$\varphi(z)\Big|_{z = \frac{h_1}{2}} = -P_1;\ \varphi(z)\Big|_{z = \frac{h_2}{2}} = P_2 \tag{14}$$

Для знаходження радіальної напруги з (6) знаходимо функцію $\Psi(r,t)$, для чого інтегруємо похідну (10) по r.

$$\Psi(r,t) = \varphi(z)\int_{a_1}^{r}\frac{1}{r}(r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2)dr + f(z), \tag{15}$$

де $f(z)$ – довільна функція інтегрування.

Використовуючи похідну (10) і двічі диференціюючи функцію (15) по z, а потім підставляючи у формулу (6), отримаємо:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu}\{-\varphi(z)\frac{1}{r^2}(r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2) - \varphi_{,33}(z)\int_{a_1}^{r}\frac{1}{r}(r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2) - f_{,33}(z) -$$

$$- \frac{1}{r^2}(A_5 z - A_3) + A_4 z + \frac{1}{2}A_6\} \tag{16}$$

Якщо виконати граничні умови (8), то знайдемо рівняння для визначення функції $\varphi_{/33}(z)$ і $f_{/33}(z)$

$$\varphi_{/33}(z) = \frac{1-\nu}{E\beta}\cdot\frac{P_1 + P_2}{a_2^2 - a_1^2} + \frac{A_5 z - A_3}{a_2^2 a_1^2 \beta}\text{, де} \tag{17}$$

$$\beta = \frac{a_1^2 a_2^2}{a_2^2 - a_1^2} \ln \frac{a_2}{a_1} - \frac{a_2^2 + a_1^2}{4} \quad , \tag{18}$$

та
$$- f_{,33}(z) = -P_1 \frac{1-\nu}{E} + \frac{1}{a_1^2} \cdot (A_5 z - A_3) - (A_4 z + \frac{1}{2} A_6), \tag{19}$$

Підстановка похідної (18) у формулу (16) дає:

$$\sigma_{11} = -P_1 + \frac{E}{1-\nu} \{-\varphi(z) \frac{1}{r^2} (r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2) - \varphi_{,33}(z) \int_{a_1}^{r} \frac{1}{r} (r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2) dr + \frac{(A_5 z - A_3)}{a_1^2 (1 - \frac{a_2^2}{r^2})} \}, \tag{20}$$

Аналогічно для окружного напруження будемо мати:

$$\sigma_{22} = -P_1 + \frac{E}{1-\nu} \{-\varphi(z)[3r^2(a_1^2 + a_2^2) - \frac{a_1^2 a_2^2}{r^2}] - \varphi_{/33}(z) \int_{a_1}^{r} \frac{1}{r} (r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2) dr + \frac{(A_5 z - A_3)}{a_1^2 (1 + \frac{a_1^2}{r^2})} \} \tag{21}$$

Далі інтегруючи рівняння (17), отримаємо:

$$-\varphi_{/3}(z) = \frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{P_1 + P_2}{(a_2^2 - a_1^2)\beta} z + \frac{A_5}{a_2^2 a_1^2 \beta} \frac{z^2}{2} - \frac{A_3}{a_2^2 a_1^2} z + C_1, \tag{22}$$

та
$$-\varphi(z) = \frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{(P_1 + P_2)}{(a_2^2 - a_1^2)\beta} \frac{z^2}{2} + \frac{A_5}{(a_2^2 - a_1^2)\beta} \frac{z^3}{6} - \frac{A_3}{a_2^2 a_1^2} \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2, \tag{23}$$

де A_5, A_3, C_1, та C_2 – довільні сталі інтегрування.

Скористаймося граничними умовами (12), виконання яких дає:

$$A_5 = \frac{C_1 8}{h_1 h_2} a_1^2 a_2^2 \beta \ \text{ і } \ A_3 = \frac{1-\nu}{E} \cdot (P_1 + P_2) \frac{a_2^2 a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} + \frac{2(h_1 + h_2)}{h_1 h_2} a_2^2 a_1^2 \beta C_1, \tag{24}$$

Підставляючи A_5 і A_3 з (24) у вираз (23), отримаємо:

$$-\varphi(z) = \frac{4z^3}{3h_1 h_2 C_1} - \frac{(h_1 + h_2) z^2}{h_1 h_2 C_1} + zC_1 + C_2 \tag{25}$$

Виконуючі граничні умови (9), знаходимо:

$$C_1 = -\frac{1-\nu}{E} (P_1 + P_2) \frac{12 h_1 h_2}{2(h_2^3 - h_1^3) - 3(h_2^2 - h_1^2) + 6(h_2 - h_1)}; \tag{26}$$

$$C_2 = -\frac{1-\nu}{E} P_1 \left[1 - \frac{2h_2^3 - 3h_2^2 (h_2 + h_1) + 6h_1 h_2^2}{2h_1^7 - 3h_1^2 (h_2 + h_1) + 6h_2 h_1^2} \right] - \frac{1-\nu}{E} P_2 \left[1 - \frac{2h_1^3 - 3h_1^2 (h_2 + h_1) + 6h_1^2 h_2}{2h_2^3 - 3h_2^2 (h_1 + h_2) + 6h_1 h_2^2} \right]. \tag{27}$$

Після підстановки (25) у (13), з урахуванням (26) та (27), отримаємо формулу для осьового напруження σ_{33}:

$$\sigma_{33}=\left[4r^2-2(a_1^2+a_2^2)\right]\left\{P_1\left[1-\frac{16z^3-12z(h_1+h_2)+12zh_1h_2}{2(h_2^3-h_1^3)-3(h_2^2-h_1^2)+6(h_2-h_1)}-\frac{2h_2^3-3h_2^2(h_1+h_2)+6h_1h_2^2}{2h_1^3-3h_2^2(h_1+h_2)+6h_1^2h_2}\right]-\right.$$

$$\left.-P_2\left[1+\frac{16z^3-12z(h_1+h_2)+12zh_1h_2}{2(h_2^3-h_1^2)-3(h_2^2-h_1^2)+6(h_2-h_1)}-\frac{2h_1^3-3h_1^2(h_1+h_2)+6h_1^2h_2}{2h_2^3-3h_2^2(h_1+h_2)+6h_1h_2^2}\right]\right\} \tag{28}$$

Знаходимо дотичне напруження σ_{13} з (11), враховуючи вирази (22) та (26):

$$\sigma_{13}=(P_1+P_2)\frac{1}{r}(r-a_1)(r-a_2)\left\{\frac{12\left[4z^2-2z(h_1+h_2)+h_1h_2\right]}{2(h_2^3-h_1^3)-3(h_2^2-h_1^2)+6(h_2-h_1)}\right\} \tag{29}$$

Підставляючи функції $\varphi(z)$ і $\varphi_{,33}(z)$ з (25) і (17), враховуючи вирази (18), (24), (26) та (27), знаходимо радіальне напруження σ_{11} з формули (20):

$$\begin{aligned}\sigma_{11}={}&P_1+[\{P_1[1-\frac{16z^3-12z(h_1+h_2)+12zh_1h_2}{2(h_2^3-h_1^3)-3(h_2^2-h_1^2)+6(h_2-h_1)}-\frac{2h_2^3-3h_2^2(h_2+h_1)+6h_1h_2^2}{2h_1^3-3h_1^2(h_2+h_1)+6h_1^2h_2}]-\\&-P_2[1+\frac{16z^3-12z(h_2+h_1)+12zh_1h_2}{2(h_2^3-h_1^3)-3(h_2^2-h_1^2)+6(h_2-h_1)}-\frac{2h_1^3-3h_1^2(h_2+h_1)+6h_1^2h_2}{2h_2^3-3h_2^2(h_2+h_1)+6h_1h_2^2}]\}[r^3-r(a_2^2+a_1^2)+\\&+\frac{a_2^2a_1^2}{r^2}]-(P_1+P_2)\frac{24z-6(h_2+h_1)}{2(h_2^3-h_1^3)-3(h_2^2-h_1^2)+6(h_2-h_1)}[r^4+a_1^4-2r^2(a_2^2+a_1^2)+2a_2^2a_1^2(1+\\&+\ln\frac{r}{a_1})]-(P_1+P_2)[\frac{24}{2(h_2^3-h_1^3)-3(h_2^2-h_1^2)+6(h_2-h_1)}]\frac{z(r^2+a_1^2)[4a_1^2\ln\frac{a_2}{a_1}-(a_2^4-a_1^4)}{r^2(a_2^2-a_1^2)}-\\&-(P_1+P_2)\frac{r^2+a_1^2}{a_2^2-a_1^2}\times\frac{a_2^2}{r^2}+(P_1+P_2)[\frac{6(h_2+h_1)}{2(h_2^3-h_1^3)-3(h_2^2-h_1^2)+6(h_2-h_1)}]\frac{(r^2+a_1^2)[4a_1^2\ln\frac{a_2}{a_1}-(a_2^4-a_1^4)]}{r^2(a_2^2-a_1^2)}]\end{aligned} \tag{30}$$

Аналогічно для окружного напруження будемо мати:

$$\begin{aligned}\sigma_{22}={}&P_1+[\{P_1[1-\frac{16z^3-12z(h_1+h_2)+12zh_1h_2}{2(h_2^3-h_1^3)-3(h_2^2-h_1^2)+6(h_2-h_1)}-\frac{2h_2^3-3h_2^2(h_2+h_1)+6h_1h_2^2}{2h_1^3-3h_1^2(h_2+h_1)+6h_1^2h_2}]-\\&-P_2[1+\frac{16z^3-12z(h_2+h_1)+12zh_1h_2}{2(h_2^3-h_1^3)-3(h_2^2-h_1^2)+6(h_2-h_1)}-\frac{2h_1^3-3h_1^2(h_2+h_1)+6h_1^2h_2}{2h_2^3-3h_2^2(h_2+h_1)+6h_1h_2^2}]\}[3r^2-(a_2^2+a_1^2)-\\&-\frac{a_2^2a_1^2}{r^2}]-(P_1+P_2)\frac{24z-6(h_2+h_1)}{2(h_2^3-h_1^3)-3(h_2^2-h_1^2)+6(h_2-h_1)}[r^4+a_1^4-2r^2(a_2^2+a_1^2)+2a_2^2a_1^2(1+\\&+\ln\frac{r}{a_1})]-(P_1+P_2)[\frac{24}{2(h_2^3-h_1^3)-3(h_2^2-h_1^2)+6(h_2-h_1)}]\frac{z(r^2+a_1^2)[4a_1^2\ln\frac{a_2}{a_1}-(a_2^4-a_1^4)}{r^2(a_2^2-a_1^2)}-\\&-(P_1+P_2)\frac{r^2+a_1^2}{a_2^2-a_1^2}\times\frac{a_2^2}{r^2}+(P_1+P_2)[\frac{6(h_2+h_1)}{2(h_2^3-h_1^3)-3(h_2^2-h_1^2)+6(h_2-h_1)}]\frac{(r^2+a_1^2)[4a_1^2\ln\frac{a_2}{a_1}-(a_2^4-a_1^4)]}{r^2(a_2^2-a_1^2)}]\end{aligned} \tag{31}$$

Висновки. Отже, запропонований у статті метод розв'язання осесиметричної задачі теорії пружності, на думку авторів, може знайти застосування при конструюванні товстостінних резервуарів, які перебувають під дією внутрішнього та зовнішнього тиску.
Рішення системи рівнянь, наведені у статі, отримані вперше і дають змогу визначити напруження у будь-якій точці тіла полого циліндра із закритими кінцями.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник: [в 3-х Т.]/ Под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко – М. : Машиностроение, 1968. – 463с. – 2Т.

2. Т и м о ш е н к о С. П., Г у д ь е р Дж. Теория упругости . – М. : Наука, 1979. – 560с.

3. Т и м о ш е н к о С. П. Курс теории упру гости. – К. : Наукова думка, 1972. – 501с.

РЕФЕРАТ

Гревцев О.К., Сорокина І.В., Бугера А.Р. / Розв'язання осесиметричної задачі теорії пружності для товстостінного циліндричного резервуару, який перебуває під дією внутрішнього та зовнішнього тиску // Вісник НТУ. – К. : НТУ. – 2012. – Вип. 26.

Метою статті є отримання точного рішення осесиметричної задачі теорії пружності для полого циліндра із закритими кінцями (товстостінний резервуар), навантаженого рівномірно розподіленим тиском на його циліндричних та торцевих поверхнях, без будь-яких спеціальних гіпотез, що використовуються в задачах плоско-напруженого стану або плоскої деформації, крім загальних гіпотез лінійної теорії пружності.Формули напружень отримані вперше і дають змогу визначити їх величину в будь-якій точці розглянутого аксіального тіла обертання.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ТЕОРІЯ ПРУЖНОСТІ; ОСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА; ПЛОСКОНАПРУЖЕНИЙ СТАН; ПЛАСКА ДЕФОРМАЦІЯ, ТОВСТОСТІННИЙ РЕЗЕРВУАР.

ABSTRACT

Grevtsev A.K., Sorokina I.V., Bugera A.R. / Solution of an axially symmetrical problem of elasticity theory for thick-walled cylindrical reservoir, wich is under interior and exterior pressur // Visnyk NTU. – K. : NTU. – 2012. – Vol. 26.

The aim of the artcle is solution of an axially symmetrical problem of elasticity theory for a hollow cylinder with closed end surfaces (thick-walled reservoir), loaded by evenly distributed pressure over its cylindrical and end surfaces, to exclude any special hypotheses used for problems of plane stress state or plane deformation, except for general hypotheses of a linear elasticity theory, is carried out.

Formulas for stress are derived for the first time and allow defining its value at any point of an axial body of revolution under consideration.

KEY WORDS: ELASTICITY THEORY; AXIALLY SYMMMETRICAL PROBLEM; PLANE STRESI STATE; PLANE DEFORMATION; THICK-WALLED RESERVOIR.

РЕФЕРАТ

Гревцев А.К., Сорокина И.В., Бугера А.Р. / Решение осесимметричной задачи теории упругости для толстостенного цилиндрического резервуара, находящегося под действием внутреннего и внешнего давления // Вестник НТУ. – К. : НТУ. – 2012. – Вып. 26.

Целью статьи является получение точного решения осесимметричной задачи теории упругости для полого цилиндра с закрытыми концами (толстостенный резервуар), нагруженного равномерно распределенным давлением на его цилиндрических и торцевых поверхностях, без каких-либо специальных гипотез, которые используются в задачах плоско-напряженного состояния или плоской деформации, кроме общих гипотез линейной теории упругости.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ; ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА; ПЛОСКО-НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ; ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ; ТОЛСТОСТЕННЫЙ РЕЗЕРВУАР.