УДК 539.3

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ ДЕЯКИХ ВАРІАНТІВ УТОЧНЕНОЇ ТЕОРІЇ ПЛАСТИН ТА ОБОЛОНОК НА ОСНОВІ СПІВСТАВЛЕННЯ З ТОЧНИМ РОЗВ'ЯЗКОМ

Рассказов О.О., доктор технічних наук
Бондарський О.Г., кандидат технічних наук

В інженерній практиці при розв'язуванні задач статичного згину, статичної стійкості і власних коливань багатошарових пластин та оболонок застосовуються методи, які ґрунтуються на деяких варіантах уточненої теорії, що враховує поперечний зсув у шарах конструкцій [1].

Ефективність застосування цих варіантів можна оцінити шляхом порівняння задачі власних коливань тришарових симетричних ізотропних пластин, які навантажені статичним синусоїдальним навантаженням.

Перший варіант уточненої теорії ґрунтується на системі гіпотез, які визначають закон зміни за товщиною поперечних дотичних, нормальних напружень і поперечних деформацій [1]

$$\sigma_{i3}\left(\alpha_1,\alpha_2,z,t\right)=G_{i3}(z)f_i'(z)\psi_i\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right),\;\; i=1,2;$$
$$\sigma_{33}\left(\alpha_1,\alpha_2,z,t\right)=q^{+}\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right)\frac{h_1-z}{h}+q^{-}\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right)\frac{h_{m+1}-z}{h}+\varphi(z)p\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right); \tag{1}$$
$$e_{33}\left(\alpha_1,\alpha_2,z,t\right)=f_3''(z)\cdot\psi_3\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right).$$

Виходячи із прийнятих гіпотез, отримані рівняння коливань багатошарової пластини

$$\begin{gathered}N_{11,1}+N_{12,2}-I_{11}\ddot{\upsilon}_1=0; N_{12,1}+N_{22,2}-I_{11}\ddot{\upsilon}_2=0;\\ -M_{11,11}-2M_{12,12}-M_{22,22}+(I_{11}-I_{33}\nabla^2)\ddot{w}+I_{34}(\ddot{\psi}_{1,1}+\ddot{\psi}_{2,2})=q;\\ M_{111,1}+M_{112,2}-Q_{11}+I_{34}\ddot{w}_{,1}-I_{44}\ddot{\psi}_1=0; M_{112,1}+M_{222,2}-Q_{22}+I_{34}\ddot{w}_{,2}-I_{44}\ddot{\psi}_2=0.\end{gathered} \tag{2}$$

У результаті певних перетворень отримана система диференційних рівнянь відносно функцій w,ψ_1,ψ_2, яка описує поперечні коливання пластини

$$\begin{gathered}D_{11}\nabla^2\nabla^2 w-P_{111}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\nabla^2\psi_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\nabla^2\psi_2\right)+\left(I_{11}-I_{33}\nabla^2\right)\ddot{w}+I_{34}\left(\frac{\partial\ddot{\psi}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\ddot{\psi}_2}{\partial x_2}\right)=q;\\ -P_{111}\frac{\partial}{\partial x_1}\nabla^2 w+P_{1111}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1^2}+P_{1166}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_2^2}+\left(P_{1112}+P_{1166}\right)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1\partial x_2}-P_{551}\psi_1+I_{34}\frac{\partial\ddot{w}}{\partial x_1}-I_{44}\ddot{\psi}_1=0;\\ -P_{111}\frac{\partial}{\partial x_2}\nabla^2 w+\left(P_{1112}+P_{1166}\right)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1\partial x_2}+P_{1166}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1^2}+P_{1111}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_2^2}-P_{551}\psi_2+I_{34}\frac{\partial\ddot{w}}{\partial x_2}-I_{44}\ddot{\psi}_2=0.\end{gathered} \tag{3}$$

Для коливань, що встановилися, компоненти переміщень представляємо у вигляді:

$$w=We^{i\omega t};\;\psi_j=\Psi_j e^{i\omega t};\;(j=1,2),$$

де ω - частота коливань.

Система диференційних рівнянь відносно функцій W,Ψ_1,Ψ_2, за відсутності зовнішніх навантажень, буде мати вигляд

$$\begin{gathered}D_{11}\nabla^2\nabla^2 W-P_{111}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\nabla^2\Psi_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\nabla^2\Psi_2\right)-\omega^2\left[\left(I_{11}-I_{33}\nabla^2\right)W+I_{34}\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_2}\right)\right]=0;\\ -P_{111}\frac{\partial}{\partial x_1}\nabla^2 W+P_{1111}\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x_1^2}+P_{1166}\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x_2^2}+\left(P_{1112}+P_{1166}\right)\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x_1\partial x_2}-P_{551}\Psi_1-\omega^2\left(I_{34}\frac{\partial W}{\partial x_1}-I_{44}\Psi_1\right)=0;\\ -P_{111}\frac{\partial}{\partial x_2}\nabla^2 W+\left(P_{1112}+P_{1166}\right)\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x_1\partial x_2}+P_{1166}\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x_1^2}+P_{1111}\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x_2^2}-P_{551}\Psi_2-\omega^2\left(I_{34}\frac{\partial W}{\partial x_2}-I_{44}\Psi_2\right)=0.\end{gathered} \tag{4}$$

Розв'язок системи (4) будемо шукати у вигляді

$$W = \sum_m \sum_n B_{1mn} \sin \lambda_m x_1 \sin \mu_n x_2; \quad \Psi_1 = \sum_m \sum_n B_{2mn} \cos \lambda_m x_1 \sin \mu_n x_2; \quad \Psi_2 = \sum_m \sum_n B_{3mn} \sin \lambda_m x_1 \cos \mu_n x_2; \quad (5)$$

Підставляємо (5) в рівняння (4) і, прирівнюючи до нуля множники при однакових гармоніках, отримаємо систему однорідних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів $B_{1mn}, B_{2mn}, B_{3mn}$. Прирівнюючи до нуля визначник цієї системи, отримаємо алгебраїчне рівняння для знаходження власних частот пластини при заданих значеннях m і n. Це рівняння розпадається на два і, після відповідних перетворень, буде мати вигляд

$$\begin{gathered}
\left[I_{11}I_{44} + \left(I_{33}I_{44} - I_{34}^2 \right)\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2 \right) \right]\omega^4 - \left[\left(D_{11}I_{44} + P_{1111}I_{33} - 2P_{111}I_{34} \right)\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2 \right) + P_{1111}I_{11} \right]\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2 \right)\omega^2 + \\
+ \left[D_{11}P_{551} + \left(D_{11}P_{1111} - P_{111}^2 \right)\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2 \right) \right]\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2 \right)^2 = 0; \\
\omega^2 - \frac{1}{I_{44}}\left[P_{1166}\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2 \right) + P_{551} \right] = 0.
\end{gathered} \quad (6)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (6) знайдемо три значення власних частот при заданих значеннях m і n:

$$\begin{gathered}
\omega_1^2 = b - \sqrt{b^2 - c}; \ \omega_2^2 = b + \sqrt{b^2 - c}; \\
\omega_3^2 = \frac{1}{I_{44}}\left[P_{1166}\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2 \right) + P_{551} \right],
\end{gathered} \quad (7)$$

де

$$\begin{gathered}
2b = \frac{\left(D_{11}I_{44} + P_{1111}I_{33} - 2P_{111}I_{34} \right)\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2 \right) + P_{111}I_{11}}{I_{11}I_{44} + \left(I_{33}I_{44} - I_{34}^2 \right)\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2 \right)}; \\
c = \frac{\left[\left(D_{11}P_{1111} - P_{111}^2 \right)\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2 \right) + D_{11}P_{551} \right]\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2 \right)^2}{I_{11}I_{44} + \left(I_{33}I_{44} - I_{34}^2 \right)\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2 \right)}.
\end{gathered} \quad (8)$$

Другий варіант уточненої теорії, в якому ефект поперечного обтиснення не враховуються, ґрунтується на припущеннях, що тангенціальні переміщення u_1, u_2 змінюються по товщині оболонки по деякому, відмінному від лінійного, закону, а поперечні зміщення постійні по товщині

$$\begin{gathered}
u_i(\alpha_1, \alpha_2, z, t) = v_i(\alpha_1, \alpha_2, t) + g_i(z)\chi_i(\alpha_1, \alpha_2, t); \\
u_3(\alpha_1, \alpha_2, z, t) = w(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad (i = 1, 2)
\end{gathered} \quad (9)$$

На основі (9) отримані рівняння малих коливань прямокутних пластин у переміщеннях:

$$\begin{gathered}
\left(L_{11} + \omega^2 I_0 \right)V_1 + L_{12}V_2 + L_{13}W + \left(L_{14} + \omega^2 I_1 \right)\chi_1 + L_{15}\chi_2 = 0; \\
L_{21}V_1 + \left(L_{22} + \omega^2 I_0 \right)V_2 + L_{23}W + L_{24}\chi_1 + \left(L_{25} + \omega^2 I_2 \right)\chi_2 = 0; \\
L_{31}V_1 + L_{32}V_2 + \left(L_{33} + \omega^2 I_0 \right)W + L_{34}\chi_1 + L_{35}\chi_2 = 0; \\
\left(L_{41} + \omega^2 I_1 \right)V_1 + L_{42}V_2 + L_{43}W + \left(L_{44} + \omega^2 I_{11} \right)\chi_1 + L_{45}\chi_2 = 0; \\
L_{51}V_1 + \left(L_{52} + \omega^2 I_2 \right)V_2 + L_{53}W + L_{54}\chi_1 + \left(L_{55} + \omega^2 I_{22} \right)\chi_2 = 0.
\end{gathered} \quad (10)$$

де L_{ij} - диференціальні оператори для прямокутних пластин [1].

За шарнірного опирання країв, розв'язок шукаємо у вигляді подвійних тригонометричних рядів. У результаті отримаємо наступне рівняння для визначення власних частот пластини

$$\det\left[\boldsymbol{L}\left(\lambda_j, \mu_k \right) + \omega^2 \boldsymbol{I} \right] = 0. \quad (11)$$

Для багатошарового пакета, коли всі шари ізотропні і розташовані симетрично відносно координатної поверхні, рівняння (11) розпадається на три рівняння:

$$\left(F_{11}\lambda_m^2 + F_{66}\mu_n^2 - \omega^2 I_0 \right)\left(F_{66}\lambda_m^2 + F_{11}\mu_n^2 - \omega^2 I_0 \right) + \left(F_{12} + F_{66} \right)^2 \lambda_m^2 \mu_n^2 = 0;$$

$$\left[H_{11}\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)-I_0\omega^2\right]\left[R_{1111}\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)+H_{111}-\omega^2 I_{11}\right]-H_{111}H_1\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)=0; \qquad (12)$$

$$R_{1166}\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)+H_{111}-\omega^2 I_{11}=0,$$

де перше – рівняння власних частот тангенціальних коливань багатошарової пластини; друге – рівняння власних частот згинальних коливань з врахуванням поперечного зсуву в шарах; третє – рівняння чисто зсувних коливань.

Розв'язуючи (12) відносно ω^2, знайдемо для обчислення власних частот тангенціальних коливань при кожному значенні хвильових чисел m і n два вирази

$$\omega_1^2=\frac{F_{66}}{I_0}\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right); \quad \omega_2^2=\frac{F_{11}}{I_0}\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right). \qquad (13)$$

Для власних частот згинальних і зсувних коливань із урахуванням поперечного зсуву при будь-якому m і n, визначимо три значення ω^2

$$\omega_{1,2}^2=\frac{1}{2I_0I_{11}}\Big\{\left(H_1I_1+R_{1111}I_0\right)\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)+I_0H_{111}\pm \pm\sqrt{\left(H_1I_1-R_{1111}I_0\right)^2\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)^2+2I_0H_{111}\left(H_1I_1-R_{1111}I_0\right)^2\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)+I_0^2H_{111}^2}\Big\}; \qquad (14)$$

$$\omega_3^2=\frac{1}{I_{11}}\left[R_{1166}\left(\lambda_m^2+\mu_n^2\right)+H_{111}\right].$$

У табл. 1 наведені значення нижчих частот власних коливань, які обчислені за допомогою формул (7) і (14) у порівнянні з відповідними величинами, які отримані на основі точного розв'язку, а також в результаті застосування класичної теорії [2] для квадратних тришарових пластин з жорстким заповнювачем $\left(\frac{G_н}{G_з}\le 15\right)$. Розміри пластини характеризуються відношеннями: $\delta_н/h=0{,}1$, $\delta_з/h=0{,}8$, $h/a=0{,}1$.

Таблиця 1. Значення частот власних коливань пластини

$\frac{\rho_H}{\rho_3}$	$\frac{G_H}{G_3}$	ω, Гц						
		трьохвимірна теорія [2]	класична теорія	Δ,%	формула (14)	Δ,%	формула (7)	Δ,%
1	1	0,09315	0,09632	3	0,09300	0,2	0,09298	0,2
1	2	0,11248	0,11749	4	0,11234	0,1	0,11236	0,1
1	5	0,15384	0,16549	7	0,15371	0,1	0,15373	0,1
1	15	0,22958	0,26955	17	0,22957	0	0,22961	0
2	15	0,20947	0,24607	17	0,20936	0,1	0,20941	0
3	15	0,19385	0,22781	17	0,19369	0,1	0,19373	0,1

Значення нижчих частот власних коливань, які обчислені за допомогою (7) і (14), а також значення отримані на основі застосування тривимірної теорії [2], практично співпадають для всіх розглянутих пластин. Відповідні значення, які отримані за класичною теорією відрізняються від точного розв'язку при $G_H/G_з=15$ на 17.5%.

У табл. 2 наведенні значення величин $\alpha=\frac{\rho_3\omega^2}{G_зk}$ (ω- частота власних коливань, ρ_3, G_3 - густина та модуль зсуву заповнювача, k - визначається через хвильові числа [3]), які обчислені за (7) і (14) за різних значеннях хвильових чисел m і n для тришарової квадратної пластини порівняно з даними праці [3], які отримані на основі тривимірної теорії. В табл. 2 наведенні також значення величин α які отримані за моделлю Рейснера [3].

Отже, добре співпадання з точним розв'язком значень частот власних коливань аж до довжини хвилі, яка наближено рівна товщині пакета $(m=n=40)$, дають рівняння, які приводять до формули (7). Розбіжність при цьому в обох випадках не перевищує 2%.

Значення величин α які знайдені на основі рівнянь (10) що приводяться до формули (14), і на основі моделі Рейснера, відрізняються від відповідних значень точного розв'язку менше ніж на 3% і

12% відповідно тільки при $m = n = 10$. За подальшого збільшення хвильових чисел відхилення стає значним в обох випадках.

Таблиця 2. Значення величини α

$m:n$	Точний розв'язок [3]	α					
		модель Рейснера [3]	Δ,%	формула (7)	Δ,%	формула (14)	Δ,%
1:1	0,233	0,228	2	0,234	0	0,236	1
5:5	0,511	0,477	7	0,512	0	0,524	2
10:10	0,561	0,494	12	0,560	0	0,545	3
20:20	0,676	0,499	26	0,681	1	0,550	19
40:40	1,129	0,500	-	1,144	1	0,551	-

Таким чином, найбільш близькими результатами до даних, які отримані при розв'язку вказаних задач в трьохвимірній постановці, дають рівняння першого із розглянутих варіантів уточненої теорії. Відповідні рівняння, що отримані на підставі другого варіанту уточненої теорії, більш прості і можуть застосовуватися для визначення з достатньою ступінню точності частот власних коливань у низькій частині спектра для випадку тонких і середньої товщини оболонок і пластин за довільних відношень G_H / G_3.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1986. – 191с.
2. Сриниваз, Йога Рао, Рао. Некоторые результаты точного расчета толстых многослойных плит при колебаниях и выпучивании //Прикл. механика.- 1970. -№3. –С.295-296.
3. Москаленко Н.В. О собственных колебаниях трехслойных плит // Механика и машиностроение. – 1962. -№4. –С.125-129.

РЕФЕРАТ

Рассказов О.О., Бондарський О.Г. Порівняльний аналіз ефективності застосування деяких варіантів уточненої теорії пластин та оболонок на основі співставлення з точним розв'язком. / Рассказов О.О., Бондарський О.Г.// Вісник Національного транспортного університету – К.: НТУ, 2012. – Вип. 25.

Порівнюються результати розв'язку задачі власних коливань квадратної тришарової пластини, отримані на основі деяких варіантів уточненої теорії.

В інженерній практиці при розв'язуванні задач статичного згину, статичної стійкості і власних коливань багатошарових пластин та оболонок застосовуються методи, які ґрунтуються на деяких варіантах уточненої теорії, що враховує поперечний зсув у шарах конструкцій.

Ефективність застосування цих варіантів можна оцінити шляхом порівняння задачі власних коливань тришарових симетричних ізотропних пластин, які навантажені статичним синусоїдальним навантаженням.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ЗАДАЧІ СТАТИЧНОГО ЗГИНУ, ДИФЕРЕЙЦІЙНІ РІВНЯННЯ, ТЕОРІЯ.

ABSTRACT

Rasskazov O.O., Bondarskiy O.H. Comparative analysis of the efficacy of some refined versions of the theory of plates and shells on the basis of comparison with the exact solution. / Rakazov O.O., Bondarskiy O.H / / Bulletin of National Transport University - K. NTU, 2012. - Vol. 25.

Compared the results of solving the problem of natural vibrations of three-layer square plate obtained from some variants refined theory.

In engineering practice in solving problems of static bending static stability and intrinsic vibrations of laminated plates and shells used methods are based on some variants of the specified theory that takes into account the transverse shear in the layers of structures.

The effectiveness of these options can be assessed by comparing the problem of natural vibrations of isotropic symmetric sandwich plates are loaded static sinusoidal load.

KEY WORDS: PROBLEM STATIC BENDING, DYFEREYTSIYNI RVNYANNYA, THEORY.

РЕФЕРАТ

Рассказов А.А., Бондарский А.Г. Сравнительный анализ эффективности применения некоторых вариантов уточненной теории пластин и оболочек на основе сопоставления с точным решением. Рассказов А.А., Бондарский А.Г./ / Вестник Национального транспортного университета - К.: НТУ, 2012. - Вып. 25.

Сравниваются результаты решения задачи собственных колебаний квадратной трехслойной пластины, полученные на основе некоторых вариантов уточненной теории.

В инженерной практике при решении задач статического изгиба, статической устойчивости и собственных колебаний многослойных пластин и оболочек применяются методы, основанные на некоторых вариантах уточненной теории, учитывающей поперечный сдвиг в слоях конструкций.

Эффективность применения этих вариантов можно оценить путем сравнения задачи собственных колебаний трехслойных симметричных изотропных пластин, которые нагружены статическим синусоидальным нагрузкой.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ЗАДАЧИ О СТАТИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ, ДИФЕРЕЙЦИАЛЬНИЕ УРОВНЕНИЯ, ТЕОРИЯ.

УДК 539.3

РІВНОВАГА ШАРУВАТИХ ПОРОЖНИСТИХ, ГОФРОВАНИХ В ПОПЕРЕЧНОМУ ПЕРЕРІЗІ, ЦИЛІНДРІВ З ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИМ СЕРЕДНІМ ШАРОМ

Рожок Л.С., кандидат фізико-математичних наук

Вступ. В аерокосмічних та інших механічних застосуваннях, використовуються оболонкові конструкції з коловим та не коловим поперечним перерізом. Оболонкам з хвилеподібним поперечним перерізом притаманні деякі специфічні особливості в розподілі параметрів жорсткості, що має позитивний вплив на характеристики елементів конструкцій різного призначення. Відхилення форми поперечного перерізу від колової вимагає застосування просторової моделі. Поєднання аналітичних методів та стійких чисельних методів дає змогу отримувати розв'язки задач подібного класу з достатнім ступенем достовірності.

До розв'язування задачі про напружений стан шаруватих порожнистих циліндрів з гофрованим поперечним перерізом, застосовується підхід, що базується на застосування дискретних рядів Фур'є, методу відокремлення змінних та чисельного методу дискретної ортогоналізації.

Постановка і метод розв’язування задачі. Розглядаються порожнисті циліндри під дією зовнішнього навантаження $q = q_0 \sin\frac{\pi s}{l}$, складені з шарів без проковзування та відриву, для яких виконуються умови спряження [1]

$$\begin{aligned} &\sigma_\gamma^i = \sigma_\gamma^{i+1}, \tau_{s\gamma}^i = \tau_{s\gamma}^{i+1}, \tau_{t\gamma}^i = \tau_{t\gamma}^{i+1}; \\ &u_\gamma^i = u_\gamma^{i+1}, u_s^i = u_s^{i+1}, u_t^i = u_t^{i+1} \ (i = 0, 1, \ldots, P). \end{aligned} \tag{1}$$

Першу квадратичну форму в ортогональній криволінійній системі координат запишемо у вигляді

$$dS^2 = ds^2 + H_2^2(\psi, \gamma) d\psi^2 + d\gamma^2, \tag{2}$$

де s, ψ, γ ортогональні криволінійні координати: s - довжина дуги по твірній, ψ - полярний кут в поперечному перерізі, γ - нормальна координата по товщині циліндра.

Поперечний переріз задається в полярній системі координат

$$\rho = r_0 + \alpha \cos m\psi \qquad (0 \le \psi \le 2\pi), \tag{3}$$

де ρ - полярний радіус, r_0 - радіус середнього кола, б- амплітуда, m - частота гофрування.