

Presented are the numerical results in the form of stress and strain fields.

KEYWORDS: HOLLOW TRANSVERSALLY-ISOTROPIC CYLINDERS, CORRUGATED CROSS SECTION, DISCRETE FOURIER SERIES, DISCRETE ORTHOGONALIZATION METHOD, STRESS STATE.

#### РЕФЕРАТ

Рожок Л.С. Равновесие слоистых полых, гофрированных в поперечном сечении, цилиндров с трансверсально-изотропным средним слоем. / Лилия Степановна Рожок // Вестник НТУ. – К.: НТУ. – 2012. – Вып. 26.

Решение задачи о равновесии слоистых полых, гофрированных в поперечном сечении, цилиндров с трансверсально-изотропным средним слоем дано в пространственной постановке при определенных условиях на торцах.

При этом используются: метод разделения переменных вдоль образующей и направляющей цилиндра, метод аппроксимации функций дискретными рядами Фурье и устойчивый численный метод дискретной ортогонализации.

Приводятся результаты расчетов в виде распределения полей перемещений и напряжений.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ПОЛЫЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫЕ ЦИЛИНДРЫ, ГОФРИРОВАННОЕ ПОПЕРЕЧНОЕ СЕЧЕНИЕ, ДИСКРЕТНЫЕ РЯДЫ ФУРЬЕ, МЕТОД ДИСКРЕТНОЙ ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ, НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ.

УДК 539.3

#### ДОСЛІДЖЕННЯ ЕЛЕКТРОПРУЖНОГО СТАНУ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОЇ ПІВПЛОЩИНИ З ДВОМА КРУГОВИМИ ОТВОРАМИ АБО ПРЯМОЛІНІЙНИМИ ТРІЩИНАМИ<sup>3</sup>

Хорошев К.Г., кандидат фізико-математичних наук

Глуценко Ю.А., кандидат фізико-математичних наук

Розв'язанню плоскої задачі електропружності для багатозв'язної п'єзоелектричної півплощини присвячено роботи [1–3]. В даній статті, що є логічним завершенням [3], проведені дослідження електропружного стану п'єзоелектричної півплощини з двома однаковими круговими отворами або прямолінійними тріщинами, коли на границі півплощини задано значення електричного потенціалу, на нескінченності діє однорідний потік електричного поля, перпендикулярний цій границі.

Постановка задачі та методика дослідження. Розглядається нижня півплощина з п'єзоелектричного матеріалу, яка має два кругові отвори або дві прямолінійні тріщини, що паралельні границі півплощини, та знаходиться в узагальненому плоскому електропружному стані. В серединній площині пластинки маємо область  $S$ , обмежену прямолінійною границею і контурами отворів або тріщин та віднесена до системи декартових координат  $Oxy$  (рис. 1). Контури отворів та тріщин не підкріплені та позбавлені електромеханічного навантаження. На прямолінійній границі нанесено тонкі електроди та задано значення  $\varphi^+ = 0$  В електричного потенціалу, вона не підкріплена та не завантажена. На нескінченності діє лише стале електричне поле  $E_y^\infty = a$  В/м.

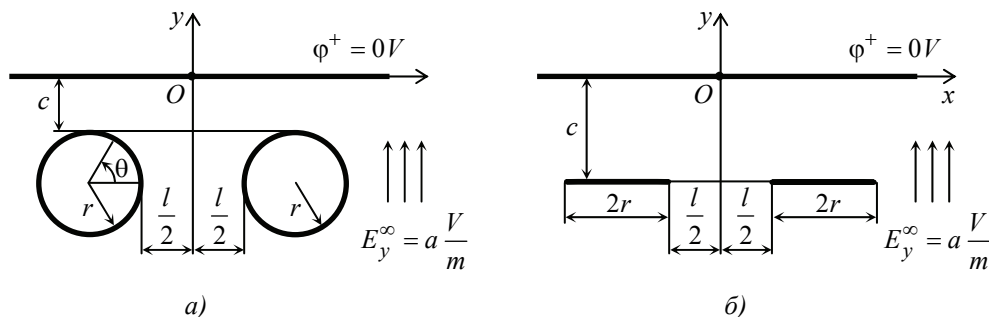


Рис. 1. Півплощина з двома отворами або тріщинами

Алгоритм розв'язання поставленої задачі представлений в роботі [3], в якій з використанням комплексних потенціалів  $\Phi_k(z_k)$  ( $k=1, 2, 3$ ) розв'язана задача електропружності для п'єзоелектричної півплощини з довільною кількістю отворів та тріщин. Згідно з [3], в якій треба прийняти, що кількість отворів  $L=2$ , для функцій  $\Phi_k(z_k)$  запишемо

$$\Phi_k(z_k) = c_{k0} + \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_{kln} \zeta_{kl}^{-n}(z_k) - \bar{r}_k \bar{a}_{kln} \bar{\zeta}_{kl}^{-n}(z_k + (\bar{\mu}_k - \mu_k)h^+) - \bar{s}_{k+1} \bar{a}_{k+1,ln} \bar{\zeta}_{k+1,ln}^{-n}(z_k + (\bar{\mu}_{k+1} - \mu_k)h^+) - \bar{e}_{k+2} \bar{a}_{k+2,ln} \bar{\zeta}_{k+2,ln}^{-n}(z_k + (\bar{\mu}_{k+2} - \mu_k)h^+) \right).$$

Таблиця 1. Властивості матеріалів

Величина	П'єзоматеріали				
	M1	M2	M3	M4	M5
$s_{11}^{D,T}/s_0, s_{33}^{D,T}/s_0$	8,7	10,7	10,9	14,4	14,05
$s_{22}^{DT}/s_0$	7,1	9,0	7,9	9,46	8,9
$s_{12}^{D,T}/s_0, s_{23}^{D,T}/s_0$	-1,9	-2,68	-2,1	-2,98	-3,05
$s_{13}^{DT}/s_0$	-3,0	-4,24	-5,42	-7,71	-7,27
$s_{44}^{D,T}/s_0, s_{66}^{D,T}/s_0$	17,5	22,9	19,3	25,2	23,7
$s_{55}^{D,T}/s_0$	29,9	29,9	32,7	44,3	42,6
$g_{21}^T/g_0, g_{23}^T/g_0$	-5,2	-15,1	-11,1	-11,4	-9,11
$g_{22}^T/g_0$	12,6	38,1	26,1	24,8	19,7
$g_{16}^T/g_0, g_{34}^T/g_0$	20,2	50,3	39,4	38,2	26,8
$\beta_{11}^{\sigma,T}/\beta_0, \beta_{33}^{\sigma,T}/\beta_0$	77,93	114,1	76,61	65,31	36,1
$\beta_{22}^{\sigma,T}/\beta_0$	66,47	251,1	86,92	66,46	33,23

Тут  $z_k = x + \mu_k y$ ;  $c_{k0}$  – деякі довільні сталі, що не впливають на розв'язок задачі [4];  $\Gamma_k$  – сталі, що визначаються з відомої системи рівнянь [3];  $\mu_k, \bar{r}_k, \bar{s}_{k+1}, \bar{e}_{k+2}$  – відомі сталі, що залежать від фізико-механічних властивостей матеріалу [1, 2];  $\zeta_{kl}$  – відомі конформні відображення зовнішності одиничного кола  $|\zeta_{kl}| > 1$  на зовнішність контурів  $L_{kl}$  [2];  $a_{kln}$  – невідомі сталі, які визначаються чисельним методом найменших квадратів [2] з відповідних граничних умов на контурах отворів [3]. Після розв'язання задачі комплексні потенціали будуть повністю визначеними, і за відомими формулами [2] можна знаходити значення напружень в будь-якій точці півплощини, а також значення коефіцієнтів інтенсивності напружень, індукції й напруженості (далі КІНІН) для кінців тріщини.

Результати аналізу чисельних досліджень. Проведені чисельні дослідження з їх аналізом розподілів значень напружень і КІНІН для пластинок, вироблених з одного з п'ятих п'єзокерамік, чий осі поляризації паралельні осі  $Oy$ : 1) M1 – ВаTiO<sub>3</sub>; 2) M2 – PZT-2; 3) M3 – PZT-4; 4) M4 – PZT-5A [5]; 5) M5 – PZT-5H [6]. Необхідні для досліджень величини наведені в табл. 1. Тут  $s_0 = 10^{-6}$  МПа<sup>-1</sup>,  $g_0 = 10^{-3}$  м<sup>2</sup>·Кл<sup>-1</sup>,  $\beta_0 = 1$  МН·м<sup>2</sup>·Кл<sup>-2</sup>.

*Півплощина з двома отворами (Рис 1а).* На рис. 2–4 представлені результати для півплощини з двома круговими отворами радіуса  $r = 1$  м при фіксованій відстані  $l = 0,5$  м між отворами. На рис. 2, 4 дані графіки розподілення напружень  $\sigma_x/a^*$ , Па, ( $a^* = a \cdot 1$  м/В) в точках поблизу прямолінійної границі в залежності від координати  $x$  для півплощин, виготовлених з матеріалів М1–М5 при різних розташуваннях отворів відносно прямолінійної границі. На рис. 2 наведені графіки для півплощин, виготовлених з матеріалу М2 (суцільна лінія) і М5 (пунктирна лінія), коли  $c = 0,1; 0,5; 2,0$  м, де  $c$  – відстань між отворами та прямолінійною границею. На рис. 4 – для півплощин, виготовлених з матеріалу М1, М3, М4, якщо  $c = 0,1$  м (суцільна лінія) і  $c = 2,0$  м (пунктирна лінія). Графіки розподілення нормальних напружень  $\sigma_\theta/a^*$ , Па, в точках поблизу контуру лівого отвору в залежності від центрального кута  $\theta$ , рад, для півплощин, виготовлених з матеріалу М2 (суцільна лінія) і М5 (пунктирна лінія), у випадку  $c = 0,1; 0,5; 2,0$  м дані на рис. 3. Як видно з рис. 2–4, зі зменшенням відстані між отворами та прямолінійною границею, напруження збільшуються за модулем в точках поблизу прямолінійної границі, і зменшуються в точках поблизу перемички між отворами.

На рис. 5 дані графіки розподілення нормальних напружень  $\sigma_\theta/a^*$ , Па, в точках поблизу контуру лівого отвору в залежності від центрального кута  $\theta$ , рад, для півплощин, виготовлених з матеріалу М2 (суцільна лінія) і М5 (пунктирна лінія) у випадку фіксованої відстані  $c = 0,5$  м і різних значень  $l$ : 0,1 м і 1 м. Рис. 5 та інші отримані дані показують, що при зближенні отворів максимальні значення напружень в точках поблизу отворів за модулем збільшуються, зона міжотворної перемички поблизу прямолінійної границі розвантажується.

*Півплощина з двома тріщинами (Рис 1б).* В табл. 2 дані значення КІНІН  $k_2^\pm$  для кінців лівої тріщини півплощини з двома прямолінійними тріщинами довжини  $2r = 2$  м, розташованими паралельно прямолінійній границі. При цьому вважалось, що півплощина виготовлена з матеріалів М1–М5, значення КІНІН з верхнім індексом «+» стосуються правої вершини тріщини, значення КІНІН з верхнім індексом «-» – лівої вершини тріщини. Результати наведені в табл. 2 для двох випадків: 1) для півплощин з тріщинами з фіксованою відстанню  $c = 0,5$  м між прямолінійною границею та тріщинами та різними значеннями  $l$  між тріщинами; 2) для півплощин з тріщинами, що мають фіксовану перемичку  $l = 0,5$  м та різними значеннями  $c$  між прямолінійною границею та тріщинами.

Як видно з табл. 2 та інших отриманих даних, у випадку півплощин з тріщинами з фіксованою відстанню  $c = 0,5$  м між прямолінійною границею та тріщинами при зменшенні довжини перемички  $l$  значення КІНІН  $k_2^+$  з модулем зростають,  $k_2^-$  – зменшуються, концентрація напружень в точках перемички зростає. У випадку півплощин з тріщинами, що мають фіксовану перемичку  $l = 0,5$  м, при зменшенні відстані  $c$  значення КІНІН  $k_2^\pm$  зростають.

Таблиця 2. Значення КІНІН для лівої тріщини півплощини з двома тріщинами (Рис. 1б)

Матеріал	КІНІН, Па·м <sup>-0,5</sup>	Значення $l$ , м при фіксованому $c = 0,5$ м			Значення $c$ , м при фіксованому $l = 0,5$ м		
		1	0,5	0,1	1	0,5	0,1
М1	$k_2^+ / a^*$	0,0099	0,0112	0,0130	0,0073	0,0112	0,0138
	$k_2^- / a^*$	-0,0090	-0,0080	-0,0023	-0,0024	-0,0080	-0,0175
М2	$k_2^+ / a^*$	0,1981	0,2202	0,2472	0,1222	0,2202	0,2849
	$k_2^- / a^*$	-0,1597	-0,1421	-0,0407	-0,0405	-0,1421	-0,3573
М3	$k_2^+ / a^*$	0,1342	0,1505	0,1728	0,0920	0,1505	0,1893
	$k_2^- / a^*$	-0,1154	-0,1003	-0,0273	-0,0266	-0,1003	-0,2392
М4	$k_2^+ / a^*$	0,0627	0,0704	0,0811	0,0442	0,0704	0,0877
	$k_2^- / a^*$	-0,0550	-0,0483	-0,0134	-0,0134	-0,0483	-0,1113
М5	$k_2^+ / a^*$	-0,1859	-0,2088	-0,2417	-0,1313	-0,2088	0,2601
	$k_2^- / a^*$	0,1645	0,1433	0,0380	0,0365	0,1434	0,3302

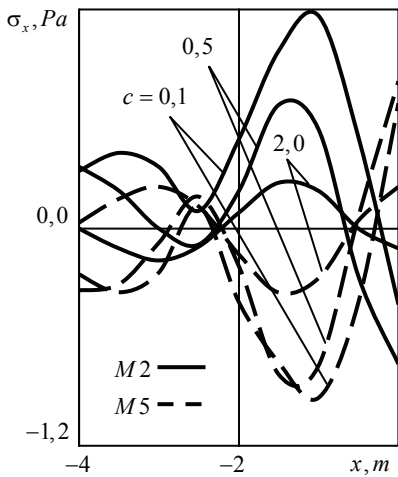


Рис. 2. Значення напружень  $\sigma_x^* = \sigma_x / a^*$  на прямолинійній границі півплощини з двома отворами при фіксованій відстані  $l = 0,5$  м між ними (матеріал: M2, M5)

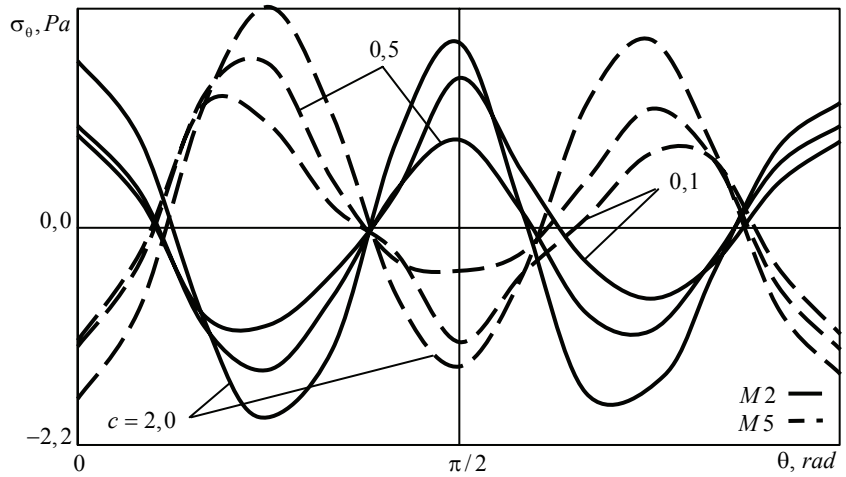


Рис. 3. Значення напружень  $\sigma_\theta^* = \sigma_\theta / a^*$  поблизу контуру лівого отвору півплощини з двома отворами при фіксованій відстані  $l = 0,5$  м між ними (матеріал: M2, M5)

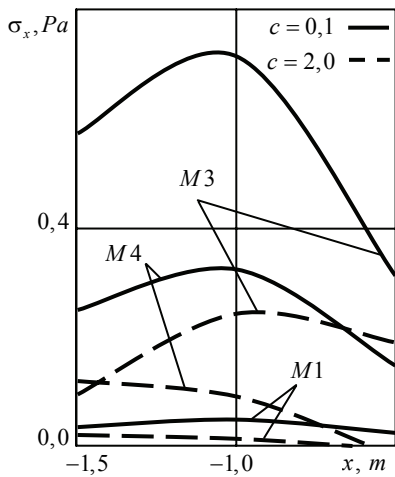


Рис. 4. Значення напружень  $\sigma_x^* = \sigma_x / a^*$  на прямолинійній границі півплощини з двома отворами при фіксованій відстані  $l = 0,5$  м між ними (матеріал: M1, M3, M4)

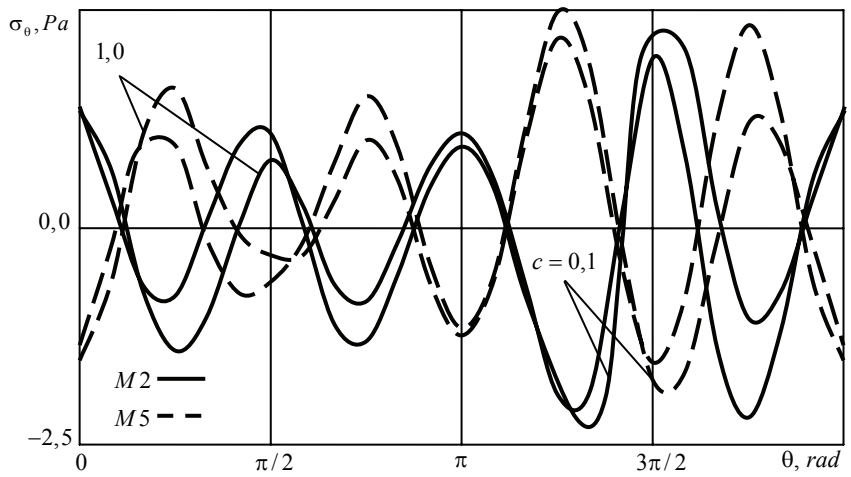


Рис. 5. Значення напружень  $\sigma_\theta^* = \sigma_\theta / a^*$  поблизу контуру лівого отвору півплощини з двома отворами при фіксованій відстані  $c = 0,5$  м між прямолинійною границею та отворами (матеріал: M2, M5)

**Висновок.** Досліджено електропружний стан п'єзоелектричної півплощини з двома однаковими круговими отворами або прямолинійними тріщинами, коли на прямолинійній границі задано значення електричного потенціалу, на нескінченності – однорідний потік електричного поля, перпендикулярний прямолинійній границі. Отримано нові фізико-механічні закономірності розподілу напружень та КІНІН в залежності від геометричних характеристик півплощин. Чисельними дослідженнями показано, що вплив отворів, тріщин на розподіл напружень в півплощині є суттєвим, і нехтувати ним при дослідженні не варто. Зі зменшенням відстані між отворами та прямолинійною границею напруження збільшуються за модулем в точках поблизу прямолинійної границі і зменшуються в точках біля перемички між отворами. У випадку наближення тріщин до прямолинійної границі концентрація напружень в точках міжтріщинової перемички збільшується. При зближенні отворів максимальні значення напружень в точках поблизу отворів за модулем збільшуються, зона міжотворної перемички поблизу прямолинійної границі розвантажується. Якщо відстань між тріщинами зменшується, значення КІНІН  $k_2^\pm$  зростають.

## ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Калоеров С.А. Электроупругое состояние многосвязной пьезоэлектрической полуплоскости с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Ю.А. Глущенко // Дин. системы.– 2000.– Вып. 16.– С. 107–116.
2. Калоеров С.А. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей / Калоеров С.А., Баева А.И., Бороненко О.И. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 268 с.
3. Хорошев К.Г. Электропружний стан п'єзоелектричної півплощини з отворами та тріщинами під дією різниці потенціалів / К.Г. Хорошев, Ю.А. Глущенко // Вісник НТУ. –2011. – В.24, Ч.2. – С.333-337
4. Глущенко Ю.А. Электроупругое состояние конечной пьезоэлектрической пластинки с отверстиями и трещинами при заданных на контурах значениях потенциала / Ю.А. Глущенко, К.Г. Хорошев // Вісн. Донец. ун-та. Сер. А. Природ. науки. – 2008. – № 1. – С. 211–218
5. Мэзон У. Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультразвукике / Мэзон У. – М.: Изд-во иностр. лит., 1952. – 447 с
6. Berlincourt D. Properties of Piezoelectricity Ceramics / D. Berlincourt, H. H. A. Krueger // Technical Publication TP-226. – www.morgan-electroceramics.com

## РЕФЕРАТ

Хорошев К.Г., Глущенко Ю.А. Дослідження електропружного стану п'єзоелектричної півплощини з двома круговими отворами або прямолінійними тріщинами / Костянтин Григорович Хорошев, Юлія Анатоліївна Глущенко // Вісник НТУ. – К.: НТУ. – 2012. – Вип. 26.

Стаття присвячена дослідженню електропружного стану п'єзоелектричної півплощини з двома однаковими круговими отворами або прямолінійними тріщинами, коли на прямолінійній границі задано значення електричного потенціалу, на нескінченності – однорідний потік електричного поля, перпендикулярний прямолінійній границі. Дослідження базується на відомій чисельно-аналітичній методиці, пов'язаній з використанням комплексних потенціалів електропружності, методів теорії функції комплексної змінної, методу найменших квадратів.

Отримані нові фізико-механічні закономірності розподілу напружень та коефіцієнтів інтенсивності напружень, індукції й напруженості (КІНІН) в залежності від геометричних характеристик півплощин. Дослідженнями показано, що вплив отворів, тріщин на розподіл напружень в півплощині є суттєвим, і нехтувати ним при дослідженні не варто. Зі зменшенням відстані між отворами та прямолінійною границею значення напружень збільшуються за модулем в точках поблизу прямолінійної границі і зменшуються в точках біля перемички між отворами. У випадку наближення тріщин до прямолінійної границі концентрація напружень в точках міжтріщинової перемички зростає. При зближенні отворів максимальні значення напружень в точках поблизу отворів за модулем збільшуються, зона міжотворної перемички поблизу прямолінійної границі розвантажується. Якщо відстань між тріщинами зменшується, значення КІНІН  $k_2^{\pm}$  зростають.

Результати дослідження можуть бути використані при проектуванні та використанні п'єзоелектричних елементів, що містять концентратори напружень типу отвір або тріщина.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** ЕЛЕКТРОПРУЖНІСТЬ, ПІВПЛОЩИНА, ОТВОРИ, ТРІЩИНИ, КІНІН

## ABSTRACT

Khoroshev K.G., Glushchenko Yu.A. Investigations of the electroelastic state of a piezoelectric half-plane with two identical holes or rectilinear cracks / Kostiantyn Khoroshev, Yulia Glushchenko // Visnyk NTU. – K.: NTU. – 2012. – Vol. 26.

The paper is devoted to investigations of the electroelastic state of a piezoelectric half-plane with two identical holes or rectilinear cracks when values of the electric potential on the rectilinear boundary of the half-plane and the homogenous electric flow perpendicular to the rectilinear boundary on infinity are given. The investigations based on a famous numerically-analytical technique used the complex potentials of electroelasticity, methods of theory of functions of a complex variable, the least-square method.

New electromechanical regularities of the stress and the stress, electric displacements and tensions intensity factors (SIF) distribution depending on geometric characteristics of the half-plane are obtained. The investigations have shown that influence of the holes and cracks on the stress distribution in the half-plane is essential, and ignore it in the study is not necessary. The values of the stresses are increasing in magnitude at points near the rectilinear boundary and they are decreasing at points near the bridge between the holes with decreasing distance between the holes and the rectilinear boundary. In the case of the cracks moving to the rectilinear boundary the stress concentration at points of the bridge between the cracks is increasing. When

the holes are coming closer the maximum values of the stresses at points near the holes are increasing in magnitude, zone of the bridge near the rectilinear boundary is being unloaded. While the distance between the cracks is decreasing the values of SIF  $k_2^\pm$  are increasing.

The results of the investigations can be used in the design and use of piezoelectric elements containing stress concentrators such hole or crack.

KEYWORDS: ELECTROELASTICITY, HALF-PLANE, HOLES, CRACKS, SIF.

#### РЕФЕРАТ

Хорошев К.Г., Глущенко Ю.А. Исследование электроупругого состояния пьезоэлектрической полуплоскости с двумя круговыми отверстиями или прямолинейными трещинами / Константин Григорьевич Хорошев, Юлия Анатольевна Глущенко // Вестник НТУ. – К.: НТУ. – 2012. – Вып. 26.

Статья посвящена исследованию электроупругого состояния пьезоэлектрической полуплоскости с двумя одинаковыми круговыми отверстиями или прямолинейными трещинами, когда на прямолинейной границе заданы значения электрического потенциала, на бесконечности – однородный поток электрического поля, перпендикулярный прямолинейной границе. Исследование основывается на известной численно-аналитической методике, связанной с использованием комплексных потенциалов электроупругости, методов теории функции комплексного переменного, метода наименьших квадратов.

Получены новые физико-механические закономерности распределения напряжений и коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности (КИНИН) в зависимости от геометрических характеристик полуплоскостей. Исследованиями показано, что влияние отверстий, трещин на распределение напряжений в полуплоскости является существенным, и пренебрегать им при исследовании не стоит. С уменьшением расстояния между отверстиями и прямолинейной границей значения напряжений увеличиваются по модулю в точках вблизи прямолинейной границы и уменьшаются в точках у перемычки между отверстиями. В случае приближения трещин до прямолинейной границы концентрация напряжений в точках перемычки между трещинами растет. При сближении отверстий максимальные значения напряжений в точках вблизи отверстий по модулю увеличиваются, зона перемычки между отверстиями вблизи прямолинейной границы разгружается. Если расстояние между трещинами уменьшается, значение КИНИН  $k_2^\pm$  растут.

Результаты исследования могут быть использованы при проектировании и использовании пьезоэлектрических элементов, содержащих концентраторы напряжений типа отверстие или трещина.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ЭЛЕКТРОУПРУГОСТЬ, ПОЛУПЛОСКОСТЬ, ОТВЕРСТИЯ, ТРЕЩИНЫ, КИНИН