

ANALIZA MATEMATYCZNA ISTNIENIA JEDNEGO PUNKTU PRZEGIĘCIA
UNORMOWANEJ KRZYWEJ UDZIAŁU MATERIAŁOWEGO ABBOTTA FIRESTONE

MICHALSKI Jacek, Dr inż., Politechnika Rzeszowska, Rzeszów, Polska

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ІСНУВАННЯ ОДНІЄЇ ТОЧКИ ПЕРЕГІНУ НОРМОВАНОЇ
КРИВОЇ ЕББОТТА ФАЄРСТОУНА (ГРАФІЧНОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ ШОРСТКОСТІ)

МІХАЛЬСЬКІ Яцек, Доктор інженер, Жешовська Політехніка, Жешув, Польща

MATHEMATICAL ANALYSIS OF THE EXISTENCE OF ONE CURVE INFLECTION POINT
NORMS FOR PARTICIPATION BEARING AREA CURVE OF ABBOTT-FIRESTONE

MICHALSKI Jacek, PhD., Rzeszow University of Technology, Rzeszow, Poland

Wprowadzenie. Ważnym parametrem funkcyjnym chropowatości po obróbce ubytkowej i uszlachetniającej oraz eksploatacji jest udział materiałowy (nazywany; współczynnikiem długości nośnej chropowatości profilu/powierzchni) oraz przebieg jego wartości w zależności od poziomu przecięcia profilu/powierzchni, określony krzywą udziału materiałowego Abbotta Firestone (nazywaną, krzywą nośności) oraz związany z nią rozkład rzędnych profilu [1-6]. Wyniki wielu badań dowodzą, że eksploatacyjne wskaźniki maszyn i urządzeń polepszają się, gdy powierzchnie dwóch współpracujących ze sobą elementów charakteryzują się odpowiednim przebiegiem tych krzywych [7-10]. Z tego też punktu widzenia matematyczne udowodnienie istnienia jednego punktu przegięcia proponowanej postaci matematycznej $R(x)$ [11-14] oraz jednoznaczność jej określenia za pomocą jej trzech parametrów A , x_0 i B nabiera ważnego znaczenia poznawczego i użytecznego.

Analiza literatury. W pracy [11] przedstawiono sposób aproksymacji unormowanej krzywej udziału materiałowego funkcją trzyparametrową, minimalizującą maksymalną odległość punktów dyskretnych otrzymanych z pomiaru krzywej nośności profilu chropowatości powierzchni od tej funkcji. Zamieszczono metodykę obliczenia błędu dopasowania, uzyskując w 98% z 500 analizowanych powierzchni po gładzeniu, błąd aproksymacji mniejszy od błędu pomiaru odciętych i rzędnych krzywej Abbotta Firestone. Stwierdzono skorelowanie parametrów opis unormowanej krzywej Abbotta Firestone parametrami A , x_0 , B ze współrzędnymi charakterystycznych jej punktów i pochyleniem. Ma miejsce silnie skorelowane parametrów: średniej arytmetycznej rzędnych profilu R_a i wysokość najwyższego wzniesienia profilu R_p , wyznaczonych z odpowiedniego pola powierzchni krzywej Abbotta Firestone oraz z zarysu profilu chropowatości powierzchni. Występują coraz większe ich różnice, im mniejsze są od 1 μm parametry R_a i R_p [12]. Analiza krzywej Abbotta Firestone umożliwiła jej opis za pomocą współczynnika niepełności R_p/R_t , pochylenia unormowanego R_k/R_t i odciętej x_{rk} krzywej Abbotta Firestone - charakteryzującej przechodzenia obszaru wzniesień do obszaru wgłębień nierówności powierzchni. Określono także interpretację fizyczną proponowanego opisu i jego poprawność [13]. Zmieszczono [14] poprawność opisu krzywej nośności chropowatości powierzchni gładzi cylindrów parametrami wynikającymi z trzech odmiennych metodyk obliczeniowych za pomocą: niezależności pochylenia rdzenia chropowatości od udziału nośnego wgłębień, korelacji między parametrami, istotności różnic między wartościami średnimi, składowych głównych, rozróżnialności procesu technologicznego gładzenia, rozrzutu oceny w grupach cylindrów o zbliżonych cechach wytwarzania oraz przydatności w procesie konstruowania, wytwarzania, eksploatacji i modelowania. Zaistniała możliwość matematycznego obliczenia wysokości i udziału materiałowego dla dowolnego/charakterystycznego punktu/obszaru krzywej Abbotta Firestone z opracowanego modelu matematycznego [11-14].

Metody opisu krzywej Abbotta Firestone zostały przedstawione w [11, 13]. Opis krzywej czterema parametrami k_3 , k_2 , k_1 , k_0 funkcji wielomianu 3 stopnia jest także stosowany [15]. Szerokie zastosowanie znalazło przedstawienie krzywej Abbotta Firestone w układzie modeli stochastycznych Greenwooda-Williamsona oraz Minkowskiego i Nayaka [16, 17, 18]. Krzywa Abbotta Firestone, umożliwia także przedstawienie różnych właściwości geometrycznych powierzchni w tym trójwymiarowych. Można analizować na jej podstawie pochylenie zboczy profilu/powierzchni, wysokości wierzchołków/szczytów,

promienie zaokrąglenia wierzchołków/szczytów [19, 20]. Stwarza to lepsze możliwości oceny powierzchni od tradycyjnego jej zastosowania, oczywiście do rozkładu rzędnych/amplitud.

Przebieg zmienności oraz istnienie jednego punktu przegięcia aproksymującej funkcji $R(x)$ udział materiałowy Abbotta Firestone. Rozważmy następujące funkcje $f_1(x)$, $f_2(x)$ (rys. 1) opisujące udział materiałowego (krzywą nośności) chropowatości powierzchni po obróbce ubytkowej lub eksploatacji [11-14]:

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} [A(\operatorname{ctg} \pi x_0 - \operatorname{ctg} \pi x)] \right\}$$

$$f_2(x) = \frac{\operatorname{tg}(Bx)}{\operatorname{tg} B},$$

gdzie A , B , x_0 są parametrami.

Zakładamy tutaj, że zmienna x przebiega przedział $(0,1)$, natomiast $x_0 \in (0,1)$, $A \in (0,1)$, $B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ponadto rozpatrywać będziemy również funkcję $R(x)$ opisującą także krzywą udziału nośnego, która jest kombinacją wypukłą funkcji f_1 i f_2 . Dokładniej, z uwzględnieniem wag wpływu funkcji składowych f_1 i f_2 tj. funkcję $R(x) = 0,7f_1(x) + 0,3f_2(x)$ (rys. 2).

Zajmiemy się w dalszym ciągu zbadaniem podstawowych elementów związanych z przebiegiem zmienności rozważanych funkcji $f_1(x)$, $f_2(x)$ oraz $R(x)$ w zależności od parametrów A , B , x_0 (rys. 1). Analizę rozpoczniemy od zbadania pierwszej i drugiej pochodnej funkcji $f_1(x)$.

Mamy:

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{\pi A}{\sin^2 \pi x}}{1 + A^2 (\operatorname{ctg} \pi x_0 - \operatorname{ctg} \pi x)^2} = \frac{\frac{A}{\sin^2 \pi x}}{1 + A^2 (\operatorname{ctg} \pi x_0 - \operatorname{ctg} \pi x)^2} =$$

$$= A \sin^2 \pi x_0 \cdot \frac{1}{\sin^2 \pi x \cdot \sin^2 \pi x_0 + A^2 \sin^2 \pi (x - x_0)}.$$

Nietrudno zauważyć, że $f_1'(x) > 0$ dla $x \in (0,1)$ oraz dla wszystkich dopuszczalnych wartości parametrów A , B , x_0 . Oznacza to, że funkcja f_1 jest ściśle rosnąca na przedziale $(0, 1)$.

Podobnie:

$$f_1'(x) = A \sin^2 \pi x_0 \pi \cdot \frac{-\left\{ \sin^2 \pi x_0 \cdot 2 \sin \pi x \cos \pi x \cdot \pi + A^2 \cdot 2 \sin \pi (x - x_0) \cos \pi (x - x_0) \cdot \pi \right\}}{\left[\sin^2 \pi x \cdot \sin^2 \pi x_0 + A^2 \sin^2 \pi (x - x_0) \right]^2} =$$

$$= -A \pi \sin^2 \pi x_0 \frac{\sin^2 \pi x_0 \cdot \sin 2\pi x + A^2 \sin 2\pi (x - x_0)}{\left[\sin^2 \pi x \cdot \sin^2 \pi x_0 + A^2 \sin^2 \pi (x - x_0) \right]^2}.$$

Przeanalizujmy teraz $f_1'(x)$.

Zauważmy, że:

$$x_0 \in (0,1) \Rightarrow \pi x_0 \in (0, \pi) \Rightarrow \sin^2 \pi x_0 > 0 \Rightarrow -A \pi \sin^2 \pi x_0 < 0 \quad (1)$$

Znajdziemy najpierw miejsca zerowe $f_1''(x)$:

$$f_1''(x) = 0 \Leftrightarrow \sin^2 \pi x_0 \sin 2\pi x + A^2 \sin 2\pi (x - x_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \pi x_0 \cdot \sin 2\pi x + A^2 \sin(2\pi x - 2\pi x_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \pi x_0 \cdot \sin 2\pi x + A^2 \sin 2\pi x \cdot \cos 2\pi x_0 - A^2 \cos^2 2\pi x \cdot \sin 2\pi x_0 = 0.$$

Stąd:

$$\left(A^2 \cos 2\pi x_0 + \sin^2 \pi x_0 \right) \sin 2\pi x - A^2 \sin 2\pi x_0 \cdot \cos 2\pi x = 0,$$

$$\left(A^2 \cos 2\pi x_0 + \sin^2 \pi x_0 \right) \sin 2\pi x = A^2 \sin 2\pi x_0 \cdot \cos 2\pi x,$$

$$\frac{\sin 2\pi x}{\cos 2\pi x} = \frac{A^2 \sin 2\pi x_0}{A^2 \cos 2\pi x_0 + \sin^2 \pi x_0},$$

$$\operatorname{tg} 2\pi x = \frac{A^2 \sin 2\pi x_0}{A^2 \cos 2\pi x_0 + \sin^2 \pi x_0}.$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$x = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{A^2 \sin 2\pi x_0}{A^2 \cos 2\pi x_0 + \sin^2 \pi x_0} \right) + \frac{k}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2. \quad (2)$$

Zauważmy dalej, że:

$$A^2 \cos 2\pi x_0 + \sin^2 \pi x_0 = A^2 (\cos^2 \pi x_0 - \sin^2 \pi x_0) + \sin^2 \pi x_0 = A^2 \cos^2 \pi x_0 + (1 + A^2) \sin^2 \pi x_0.$$

Stąd widać, że wyrażenie w mianowniku ułamka, stojącego pod arcus tangens w (2), jest kombinacją wypukłą $\sin^2 \pi x_0$ oraz $\cos^2 \pi x_0$. Ponieważ $\sin^2 \pi x_0 \geq 0$ oraz $\cos^2 \pi x_0 \geq 0$ i równocześnie nie może być $\sin^2 \pi x_0 = 0$ i $\cos^2 \pi x_0 = 0$ (bo $\sin^2 \pi x_0 + \cos^2 \pi x_0 = 1$) więc wspomniane wyrażenie w mianowniku jest dodatnie. Zatem znak wyrażenia:

$$\frac{A^2 \sin 2\pi x_0}{A^2 \cos 2\pi x_0 + \sin^2 \pi x_0}, \quad (3)$$

zależy tylko od znaku wyrażenia w liczniku.

Zauważmy teraz, że liczba x obliczona ze wzoru (2) jest punktem podejrzanym o realizację punktu przegięcia.

Dla $k=0, 1$ lub 2 odpowiednio oznaczmy te liczby przez x_0^*, x_1^*, x_2^* . Ogólnie, niech x_k^* oznacza liczbę otrzymaną z (2) dla ustalonego $k \in \mathbb{Z}$.

Zauważmy następnie, że ułamek (3) można przekształcić do postaci:

$$\frac{2A^2 \operatorname{tg} 2\pi x_0}{A^2 + (1 - A^2) \operatorname{tg}^2 \pi x_0}. \quad (4)$$

Oznaczmy dalej $y = \operatorname{tg} \pi x_0$ i rozważmy funkcję:

$$h(y) = \frac{2A^2 y}{A^2 + (1 - A^2) y^2}.$$

Nietrudno wywnioskować, że gdy x_0 przebiega przedział $(0, 1)$, wówczas y przebiega przedział $(-\infty, +\infty)$. Ze względu na nieparzystość funkcji $h=h(y)$, wystarczy ją zbadać tylko na przedziale $[0, +\infty)$. Mamy:

$$h'(y) = \frac{A^2 - (1 - A^2) y^2}{[A^2 + (1 - A^2) y^2]^2} \cdot 2A^2.$$

Stąd:

$$h'(y) > 0 \Leftrightarrow y < \frac{A}{\sqrt{1 - A^2}}$$

a zatem funkcja h jest rosnąca na przedziale $\left[0, \frac{A}{\sqrt{1 - A^2}}\right)$.

Ponadto

$$h'(y) < 0 \Leftrightarrow y > \frac{A}{\sqrt{1 - A^2}}$$

a więc funkcja h jest malejąca na przedziale $\left(\frac{A}{\sqrt{1 - A^2}}, +\infty\right)$.

Ponadto

$$h'(0) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{A}{\sqrt{1 - A^2}}.$$

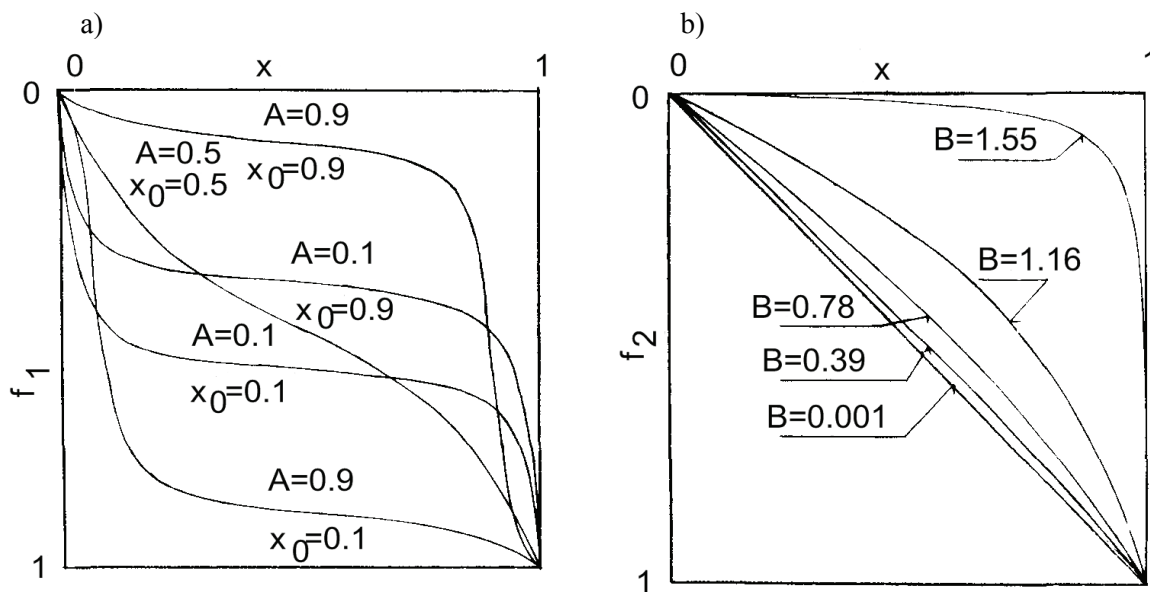
Zatem funkcja $h(y)$ osiąga maksimum lokalne (zarazem globalne) w punkcie $y = \frac{A}{\sqrt{1-A^2}}$ zaś minimum lokalne (globalne) w punkcie $y = -\frac{A}{\sqrt{1-A^2}}$.

Wynoszą one:

$$h_{\max} = h\left(\frac{A}{\sqrt{1-A^2}}\right) = \frac{A}{\sqrt{1-A^2}} \text{ oraz } h_{\min} = h\left(-\frac{A}{\sqrt{1-A^2}}\right) = -\frac{A}{\sqrt{1-A^2}}.$$

Ponadto mamy:

$$A \rightarrow 1 \Rightarrow \pm \frac{A}{\sqrt{1-A^2}} \rightarrow +\infty \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq -\frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{A}{\sqrt{1-A^2}} \leq \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg}(hy) \leq \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{A}{\sqrt{1-A^2}} \rightarrow \frac{1}{4}.$$



Rys. 1. Rodziny funkcji składowych stosowanych do aproksymacji krzywej nośności profilu: a) funkcja $f_1(x)$ dla wybranych wartości parametrów A, x_0 , b) funkcja $f_2(x)$ dla B zmiennego $\langle 0,001, 1,55 \rangle$ z krokiem $\sim 0,39$

Stąd otrzymujemy:

$$-\frac{1}{4} < x_0^* < \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{4} < x_1^* < \frac{3}{4}, \\ \frac{3}{4} < x_2^* < \frac{5}{4}. \quad (5)$$

Teraz, biorąc pod uwagę to, że odległość pomiędzy liczbami x_0^*, x_1^*, x_2^* są równe $1/2$ otrzymujemy następujący wniosek:

Wniosek Funkcja $f_1(x)$, rysunek 1a, może mieć co najwyżej dwa punkty przegięcia w przedziale $(0,1)$.

W dalszym ciągu przeanalizujemy dokładniej mogące się tutaj pojawić przypadki.

Założmy najpierw, że $x_0 \in (0,1)$. Wtedy $\sin 2\pi x_0 > 0$ co implikuje, że ułamek (3) jest dodatni a więc do przedziału $(0,1)$ należy również punkt x_1^* (dokładniej: $x_1^* \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$) natomiast punkt x_2^* znajduje

się już poza przedziałem $(0, 1)$. Oznacza to, że w tym przypadku $f_1(x)$ ma dwa punkty x_0^* i x_1^* podejrzane o realizację punktów przegięcia. Załóżmy teraz, że $x \in (0, x_0^*)$. Wtedy z (2) otrzymujemy:

$$2\pi x < 2\pi x_0^* = \operatorname{arctg} \left(\frac{A^2 \sin 2\pi x_0}{A^2 \cos 2\pi x_0 + \sin^2 \pi x_0} \right),$$

skąd:

$$\operatorname{tg} 2\pi x < \frac{A^2 \sin 2\pi x_0}{A^2 \cos 2\pi x_0 + \sin^2 \pi x_0}.$$

Stąd i z faktu, że $0 < 2\pi x < 2\pi x_0^* < \frac{\pi}{2}$ mamy:

$$(A^2 \cos 2\pi x_0 + \sin^2 \pi x_0) \sin 2\pi x < A^2 \sin 2\pi x_0 \cdot \cos 2\pi x.$$

Ostatecznie:

$$f_1'(x) > 0 \text{ dla } x \in (0, x_0^*).$$

W podobny sposób pokażemy, że $f_1''(x) < 0$ dla $x \in (x_0^*, x_1^*)$ a także $f_1''(x) < 0$ dla $x \in (x_0^*, 1)$.

Reasumując, otrzymujemy:

Jeżeli $x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, to funkcja $f_1(x)$ ma dokładnie dwa punkty przegięcia x_0^* oraz x_1^* na przedziale $(0, 1)$. Ponadto, f_1 jest wypukła na przedziałach $(0, x_0^*)$ i $(x_1^*, 1)$ oraz wklęsła na przedziale (x_0^*, x_1^*) .

Oczywiście analizując dokładnie związki (2), (4) i (5) łatwo zauważyć, że gdy A jest niewielkie (blisko 0) to x_0^* jest także bliskie 0. Gdy $A \rightarrow 1$ to $x_0^* \rightarrow \frac{1}{4}$.

Nietrudno też przewidzieć, że gdy $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, to wtedy $x_0^* < 0$ a więc punktami przegięcia są punkty o odciętych x_1^* oraz x_2^* , przy czym $\frac{1}{4} < x_1^* < \frac{1}{2}$ zaś $\frac{3}{4} < x_2^* < 1$. Ponadto funkcja f_1 jest wklęsła na przedziale $(0, x_1^*)$ oraz $(x_2^*, 1)$ oraz wypukła na przedziale (x_1^*, x_2^*) . Stąd otrzymujemy wniosek.

Jeżeli $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, to funkcja $f_1(x)$ ma dokładnie dwa punkty przegięcia x_1^* i x_2^* na przedziale $(0, 1)$. Ponadto, f_1 jest wklęsła na przedziałach $(0, x_1^*)$ i $(x_2^*, 1)$ oraz wypukła na przedziale (x_1^*, x_2^*) .

Pozostał jeszcze do przeanalizowania przypadek $x_0 = \frac{1}{2}$. Wtedy z (3) mamy, że $x_0^* = 0$. Dalej, na podstawie (2) otrzymujemy:

$$x_1^* = \frac{1}{2}, \quad x_2^* = 1.$$

Ponadto, nietrudno sprawdzić, że f_1 jest wklęsła na przedziale $(0, 1/2)$ i wypukła na przedziale $(1/2, 1)$. Zatem:

Jeżeli $x_0 = \frac{1}{2}$, to funkcja $f_1(x)$ ma dokładnie jeden punkt przegięcia o odciętej równej $1/2$. Jest ona wklęsła na przedziale $(0, 1/2)$ oraz wypukła na przedziale $(1/2, 1)$.

Zajmiemy się w dalszym ciągu analizą funkcji $f_2(x)$.

Zauważmy gdy $B \rightarrow 0$, to otrzymujemy:

$$f_2(x) = f_2^o(x) = \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(Bx)}{\operatorname{tg} B} = \lim_{B \rightarrow 0} x \frac{\operatorname{tg}(Bx)}{Bx} \cdot \frac{B}{\operatorname{tg} B} = x.$$

Z drugiej strony, przy $B \rightarrow \frac{\pi}{2}$ otrzymujemy:

$$f_2(x) = f_2^{\frac{\pi}{2}}(x) = \lim_{B \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f_2(x) = \lim_{B \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\operatorname{tg}(Bx)}{\operatorname{tg}B} = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0 \\ 1, & \text{dla } x = 1 \end{cases}.$$

Dalej mamy:

$$f_2'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}B} \cdot \frac{B}{\cos^2(Bx)} = \frac{B}{\operatorname{tg}B} \cdot \frac{1}{\cos^2(Bx)}.$$

Ponieważ parametr B przebiega, zgodnie z założeniem, przedział $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, to łatwo widać, że $f_2'(x) > 0$ dla $x \in (0, 1)$. Stąd wynika, że f_2 jest funkcją ściśle rosnącą na przedziale $(0, 1)$.

Dalej mamy:

$$f_2''(x) = \frac{B^2}{\operatorname{tg}B} \cdot \frac{\sin 2Bx}{\cos^4(Bx)}.$$

Pochodną tą można również przedstawić w postaci:

$$f_2''(x) = \frac{2B^2 \cos B}{\sin B} \cdot \frac{\sin Bx}{\cos^3 Bx}.$$

Zauważmy, że z przyjętych założeń (a mianowicie: $x \in (0, 1)$, $B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$) wynika łatwo, że $f_2''(x) > 0$ dla $x \in (0, 1)$. Ponadto przypomnijmy, że $f_2'(x) > 0$, a więc funkcja f_2 jest rosnąca i wypukła na przedziale $(0, 1)$. Dalej mamy: $f_2(0) = 0$ oraz $f_2(1) = 1$. Zatem wykres funkcji $f_2(x)$ ma kształt jak na rysunku 1b.

Zajmijmy się w dalszym ciągu dyskusją drugiej pochodnej funkcji $R(x)$, a więc funkcją:

$$R''(x) = 0,7f_1''(x) + 0,3f_2''(x).$$

Podstawiając obliczone wcześniej wartości $f_1''(x)$ oraz $f_2''(x)$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} R''(x) &= -0,7A\pi \sin^2 \pi x_0 \frac{\sin^2 \pi x_0 \cdot \sin 2\pi x + A^2 \sin 2\pi(x - x_0)}{[\sin^2 \pi x \cdot \sin^2 \pi x_0 + A^2 \sin^2 \pi(x - x_0)]^2} + 0,3 \frac{B^2}{\operatorname{tg}B} \cdot \frac{\sin 2Bx}{\cos 4Bx} = \\ &= \frac{-0,7\pi A \sin^2 \pi x_0 \sin B \cos^2 Bx [\sin^2 \pi x_0 \cdot \sin 2\pi x + A^2 \sin 2\pi(x - x_0)]x}{\sin B \cos^3 Bx [\sin^2 \pi x \cdot \sin^2 \pi x_0 + A^2 \sin^2 \pi(x - x_0)]^2} + \\ &+ \frac{0,6B^2 \cos B \cdot \sin Bx [\sin^2 \pi x_0 \cdot \sin^2 \pi x + A^2 \sin^2 \pi(x - x_0)]^2}{\sin B \cos^3 Bx [\sin^2 \pi x \cdot \sin^2 \pi x_0 + A^2 \sin^2 \pi(x - x_0)]^2} \end{aligned}$$

Stąd widoczne jest, że funkcja $R''(x)$ ma niezwykle złożoną postać, przez co niemożliwym staje się jej analiza klasycznymi metodami rachunku różniczkowego. Fakt ten spowodowany jest również tym, że funkcja $R''(x)$ zależna jest od trzech niezależnych od siebie parametrów A , B oraz x_0 .

Niemniej jednak, korzystając ze wcześniej ustalonych faktów podamy teraz pewne wnioski dotyczące zachowania się funkcji $R''(x)$ a tym samym funkcji $R(x)$.

Będziemy rozważać trzy przypadki.

Przypadek 1^o $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Wtedy jak pokazaliśmy wcześniej, funkcja $f_1(x)$ ma dwa punkty przegięcia $x_1^*, x_2^* \in (0, 1)$, $x_1^* < x_2^*$. Ponadto, f_1 jest wklęsła na przedziałach $(0, x_1^*)$ i $(x_2^*, 1)$ oraz wypukła na przedziale (x_1^*, x_2^*) . Ponieważ wypukłość funkcji f_1 oznacza w naszym przypadku dodatniość drugiej pochodnej f_1'' oraz funkcja f_2'' jest dodatnia na całym przedziale $(0, 1)$, zatem uwzględniając to, że $R''(x)$

jest wypukłą kombinacją funkcji f_1'' i f_2'' otrzymujemy, że na przedziale (x_1^*, x_2^*) funkcja $R''(x)$ jest dodatnia. Oczywiście z uwagi na to, że $f_2''(x_1) > 0$ oraz $f_2''(x_2) > 0$ otrzymujemy, że $R''(x)$ jest dodatnia na pewnym przedziale (\bar{x}_1, \bar{x}_2) zawierającym przedział $[x_1^*, x_2^*]$.

Mamy więc:

Wniosek: Istnieje taki przedział $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \subset (0, 1)$, że $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \supset [x_1^*, x_2^*]$ oraz funkcja $R(x)$ jest wypukła na przedziale (\bar{x}_1, \bar{x}_2) .

Oznacza to, że funkcja $R(x)$ ma punkty przegięcia w przedziałach $(0, \bar{x}_1)$ oraz $(\bar{x}_2, 1)$, o ile są to przedziały niepuste.

Zauważmy dalej, że:

$$R''(0) = 0,7 f_1''(0) + 0,3 f_1'(0) = 0,7 f_1''(0) = -0,7 A \sin^2 \pi x_0 \frac{A^2 \sin(-2\pi x_0)}{A^4 \sin^4 \pi x_0} = \frac{0,7\pi \sin^2 \pi x_0}{A \sin^4 \pi x_0} \sin 2\pi x_0.$$

Z założenia wynika, że $2\pi x_0 \in (\pi, 2\pi)$, a więc $\sin 2\pi x_0 < 0 \Rightarrow R''(0) < 0$. Stąd i z ciągłości funkcji $R''(x)$ otrzymujemy, że $R''(x)$ jest ujemne na pewnym przedziale na prawo od 0. Oznacza to, że funkcja $R(x)$ jest wklęsła na tym przedziale, zatem musi mieć punkt przegięcia \bar{x}_1^* , gdzieś w przedziale $(0, \bar{x}_1)$.

Wniosek: Funkcja $R(x)$ jest wklęsła na pewnym przedziale $(0, \bar{x}_1^*) \subset (0, \bar{x}_1) \subset (0, \bar{x}_1^*)$ oraz ma punkt przegięcia w punkcie \bar{x}_1^* .

Zauważmy, że kwestia, czy w przedziale $(\bar{x}_2, 1)$ funkcja $R(x)$ jest wklęsła, jest do rozstrzygnięcia znacznie trudniejsza. Możliwe są tylko odpowiedzi w przypadkach szczególnych.

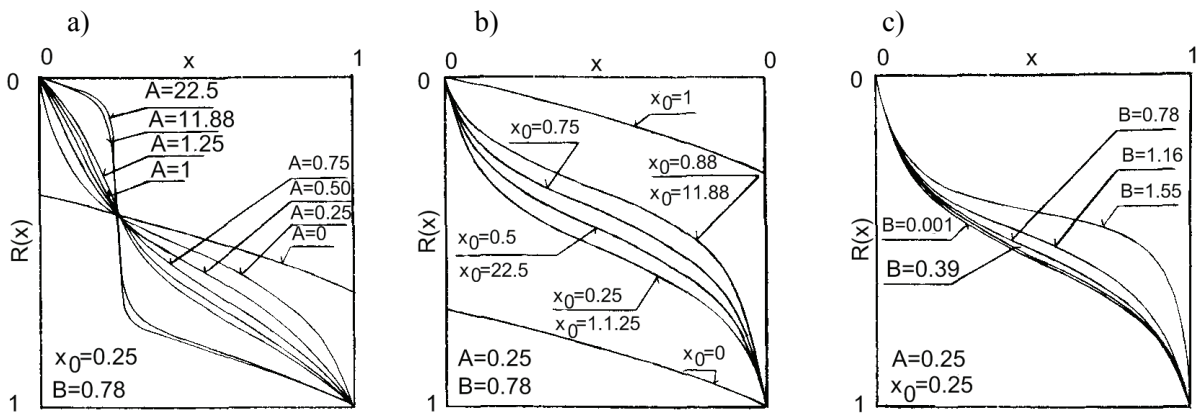
Żałóżmy najpierw, że B jest liczbą bliską zera. Wtedy, jak ustaliliśmy wcześniej, $f_2(x) \cong x$ więc $R''(x) \cong 0,7 f_1''(x)$.

Zatem $R''(x)$ zachowuje się w przybliżeniu tak, jak $f_1''(x)$, więc ma na przedziale $(\bar{x}_2, 1)$ punkt przegięcia $\cong \bar{x}_1^*$, a ponadto jest wklęsła w tym przedziale (rys. 2c, zwłaszcza dla sytuacji $A=0,25, x_0=0,25, B=0,001$).

Jeżeli natomiast B jest liczbą bliską $\pi/2$, to $f_2''(1)$ jest liczbą bardzo dużą, więc to implikuje, że wtedy $R''(1) > 0$. Oznacza to, że $R(x)$ jest wypukła w pobliżu $x=1$, i może więc nie mieć ona punktu przegięcia w przedziale $(\bar{x}_1, 1)$. Fakt ten zilustrowany jest odpowiednim wykresem komputerowym, gdy $x_0=0,75, A=0,25, B=0,78$ (rys. 2b).

Przypadek 2⁰ $x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

Wtedy rozumując podobnie jak poprzednio łatwo wnioskujemy, że funkcja $R(x)$ jest wypukła na przedziale $(0, \bar{x}_1) \supset (0, x_1^*)$ oraz na przedziale $(\bar{x}_2, 1) \supset (x_2^*, 1)$. Może, więc być



Rys. 2. Wpływ parametrów A , x_0 , B na kształt krzywej nośności: a) $x_0 = 0,25$, $B = 0,78$, $A = 0 \div 1,25$ z krokiem $0,25$ oraz $A = 11,87$, $A = 22,5$, b) $A = 0,25$, $B = 0,78$, $x_0 = 0 \div 1,25$ z krokiem $0,25$ oraz $x_0 = 11,87$, $x_0 = 22,5$, c) $A = 0,25$, $x_0 = 0,25$, $B = 0,001 \div 1,55$ z krokiem $\sim 0,39$

ewentualnie wklęsła na przedziale (\bar{x}_1, \bar{x}_2) . I tak, np. w przypadku, gdy B jest liczbą bliską 0 mamy, że $R''(x) \cong 0,7f_1''(x)$, a więc funkcja $R(x)$ ma dwa punkty przegięcia x_1^* i x_2^* .

Przypadek 3⁰ $x_0 = 0,5$

Wtedy, na podstawie poprzednio ustalonych faktów wnioskujemy, że $R(x)$ jest funkcją wypukłą na przedziale $(\bar{x}, 1) \supset (\frac{1}{2}, 1)$ oraz może być funkcją wklęsłą na przedziale $(0, \bar{x}) \supset (0, \frac{1}{2})$. Wynika stąd, że w rozważanym przypadku funkcja R może mieć tylko jeden punkt przegięcia \bar{x} .

Podsumowanie. Funkcja f_1 jest ściśle rosnąca na przedziale $(0, 1)$ i może mieć co najwyżej dwa punkty przegięcia w przedziale $(0, 1)$. Jeżeli $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$, to funkcja $f_1(x)$ ma dokładnie dwa punkty przegięcia x_0^* oraz x_1^* na przedziale $(0, 1)$. Ponadto, f_1 jest wypukła na przedziałach $(0, x_0^*)$ i $(x_1^*, 1)$ oraz wklęsła na przedziale (x_0^*, x_1^*) . Jeżeli $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$, to funkcja $f_1(x)$ ma dokładnie dwa punkty przegięcia x_1^* i x_2^* na przedziale $(0, 1)$. Ponadto, f_1 jest wklęsła na przedziałach $(0, x_1^*)$ i $(x_2^*, 1)$ oraz wypukła na przedziale (x_1^*, x_2^*) . Jeżeli $x_0 = \frac{1}{2}$, to funkcja $f_1(x)$ ma dokładnie jeden punkt przegięcia o odciętej równej $1/2$. Jest ona wklęsła na przedziale $(0, 1/2)$ oraz wypukła na przedziale $(1/2, 1)$.

Z dokonanej analizy wynika, że f_2 jest funkcją ściśle rosnącą na przedziale $(0, 1)$.

Aproksymowana funkcja unormowanej krzywej Abbotta Firestone $R''(x)$, zależna jest od trzech niezależnych od siebie parametrów A , x_0 oraz B , ma niezwykle złożoną postać. Niemożliwym jest jej analiza klasycznymi metodami rachunku różniczkowego.

Istnieje taki przedział $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \subset (0, 1)$, że $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \supset [x_1^*, x_2^*]$ oraz funkcja $R(x)$ jest wypukła na przedziale (\bar{x}_1, \bar{x}_2) . Oznacza to, że funkcja $R(x)$ ma punkty przegięcia w przedziałach $(0, \bar{x}_1)$ oraz $(\bar{x}_2, 1)$, o ile są to przedziały niepuste.

Funkcja $R(x)$ jest wklęsła na pewnym przedziale $(0, \bar{x}_1^*) \subset (0, \bar{x}_1) \subset (0, \bar{x}_1^*)$ oraz ma punkt przegięcia w punkcie \bar{x}_1^* .

LITERATURA

- [1] Abbott, E.J.; F.A. Firestone: Specifying surface quality: a method based on accurate measurement and comparison. Mechanical Engineering Vol. 55, 569-572, 1933.
- [2] Górecka R., Polanski Z.: Metrologia warstwy wierzchniej. Warszawa, WNT, 1985 r.

- [3] Nowicki B.: Struktura geometryczna. Chropowatość i falistość powierzchni. Warszawa, WNT, 1991 r.
- [4] Oczó K.E., Liubimov V.: Struktura geometryczna powierzchni - podstawy klasyfikacji z atlasem charakterystycznych powierzchni kształtowanych. Rzeszów, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej 2003 r.
- [5] Pawlus P.: Topografia powierzchni: pomiar, analiza, oddziaływanie. Rzeszów, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, 2005 r.
- [6] Adamczak S.: Pomiary geometryczne powierzchni - Zarysy kształtu, falistość i chropowatość. Warszawa, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2008 r.
- [7] Kragelskij I.V., Demkin N.B.: Opredelenie faktičeskoj ploščadi kasanija. Trenie i iznos v mašinách. Sbornik XIV. Moskwa, Izd. AN SSSR, 1960 r.
- [8] Solski P., Ziemia S.: Zużycie elementów maszyn spowodowane tarciem. Biblioteka Mechaniki Stosowanej, Warszawa, PAN-PWN, 1969 r.
- [9] Johnson K. L.: Contact Mechanics. Cambridge, Cambridge University Press, 1985r.
- [10] Pawlus P.: Struktura geometryczna powierzchni cylindrów podczas eksploatacji silnika spalinowego. Rzeszów, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, 1999 r.
- [11] Michalski J., Pawlus P.: Description of the bearing length curve of the inner surface of piston engine cylinders. Wear, Vol. 157 (2), 207-214, 1992.
- [12] Michalski J.: Badania krzywej nośności profilu chropowatości powierzchni po obróbce ubytkowej. Postępy Technologii Maszyn i Urządzeń, Vol. 4, 21-38, 1992.
- [13] Michalski J., Pawlus P.: Characterization of the shape of the roughness profile ordinate distribution of honed cylinder surfaces. Wear, Vol. 161 (1-2), 135-143, 1993.
- [14] Michalski J.: Badania krzywej nośności chropowatości powierzchni cylindrów po gładzeniu. Redakcja Wydawnictw Uczelnianych Politechniki Rzeszowskiej, IX Konferencja Międzynarodowa, Metody obliczeniowe i badawcze w rozwoju pojazdów samochodowych i maszyn roboczych samojezdnych, Zarządzanie i marketing w motoryzacji, Rzeszów, 261-268, 1998.
- [15] Prostrednik D., Osanna P.H.: The Abbott curie – Well known In metrology but not on technical drawings. International Journal Machine Tools and Manufacture, Vol. 38 (5-6), 741-745, 1998.
- [16] Anderberg C., Pawlus P., Rosén B.-G., Thomas T.R.: Alternative descriptions of roughness for cylinder liner production. Journal of Materials Processing Technology Vol. 209 (4), 1936-1942, 2009.
- [17] Schmähling J., Hamprecht F.A.: Generalizing the Abbott-Firestone curve by two new surface descriptors. Wear Vol. 262 (11-12), 1360-1371, 2007.
- [18] Pawlus P., Graboń W.: The method of truncation parameters measurement from material ratio curve. Precision Engineering Vol. 32 (4), 342-347, 2008.
- [19] Whitehouse D.J.: Assessment of surface finish profiles produced by multi-process manufacture. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture Vol. 199 (4), 263-270, 1985.
- [20] Whitehouse D.J.: Handbook of surface metrology. Bristol, Institute of Physics Publishing, 1994 r.

STRESZCZENIE

MICHALSKI Jacek. Analiza matematyczna istnienia jednego punktu przegięcia unormowanej krzywej udziału materiałowego Abbotta Firestone / MICHALSKI Jacek // Wisnyk Narodowego Uniwersytetu Transportu. Naukowe i techniczne Kolekcja: w 2 częściach. Część 1: Seria «Techniczny nauki». – K: NUT, 2014. – Wyp. 30.

Analizowano aproksymowaną równaniem matematycznym unormowaną krzywą udziału materiałowego Abbotta Firestone. Proponowana funkcja $R(x)$ jest kombinacją wypukłą dwóch składowych funkcji $f_1(x)$ oraz $f_2(x)$, z odpowiednimi wagami ich wpływu. Określono analitycznie przedziały wypukłości i wklęsłości. Główną uwagę zwrócono na analityczne udowodnienie istnienia jednego punktu przegięcia proponowanej postaci matematycznej $R(x)$.

SŁOWA KLUCZOWE: UNORMOWANA KRZYWA UDZIAŁU MATERIAŁOWEGO $R(x)$ ABBOTTA FIRESTONE, APROKSYMACJA, PUNKT PRZEGIĘCIA, WYPUKŁOŚĆ I WKŁĘŚŁOŚĆ, WŁAŚCIWOŚCI FUNKCJI SKŁADOWYCH $f_1(x)$ I $f_2(x)$

РЕФЕРАТ

МІХАЛЬСЬКІ Яцек. Математичний аналіз існування однієї точки перегину нормованої кривої Ебботта Фаєрстоуна (графічної характеристики шорсткості) / МІХАЛЬСЬКІ Яцек // Вісник

Національного транспортного університету. Науково-технічний збірник: в 2 ч. Ч. 1: Серія «Технічні науки». – К. : НТУ, 2014. – Вип. 30.

Проаналізовано апроксимовану математичним рівнянням нормовану криву Еббота Фаєрстоуна. Запропонована функція $R(x)$ є опуклою комбінацією двох складових функцій $f_1(x)$ і $f_2(x)$, з відповідними вагами впливу. Аналітично визначені інтервали опуклості і увігнутості. Основна увага приділяється аналітичним доказам існування єдиної точки перегину запропонованої математичної форми $R(x)$.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: НОРМОВАНА КРИВА ЕББОТА ФАЄРСТОУНА, АПРОКСИМАЦІЯ, ТОЧКА ПЕРЕГИНУ, ОПУКЛІСТЬ І УВІГНУТІСТЬ, ВЛАСТИВОСТІ СКЛАДОВИХ ФУНКЦІЙ $f_1(x)$ І $f_2(x)$.

SUMMARY

MICHALSKI Jacek. Mathematical analysis of the existence of one curve inflection point norms for participation bearing area curve of Abbott-Firestone / MICHALSKI Jacek // Visnyk National Transport University. Scientific and Technical Collection: In Part 2. Part 1: Series «Technical sciences». – Kyiv: National Transport University, 2014. – Issue 30.

We analysed a mathematical equation approximated normalized bearing area curve Abbott-Firestone. The proposed feature $R(x)$ is a convex combination of the two components of the function $f_1(x)$ and $f_2(x)$, with the respective weights of impact. Analytically determined intervals protrusions and depressions. The main attention was paid to the analysis to prove the existence of a single point of inflection of the proposed mathematical form $R(x)$.

KEY WORDS: NORMALIZED BEARING AREA CURVE ABBOTT-FIRESTONE, APPROXIMATION, AN INFLECTION POINT, CONVEXITY AND CONCAVITY, PROPERTIES OF THE COMPONENT FUNCTIONS $f_1(x)$ AND $f_2(x)$

AUTOR:

MICHALSKI Jacek, Dr inż., Politechnika Rzeszowska, Katedra Silników Spalinowych i Transportu, Al. Powstańców Warszawy 12, tel.: +48 17 865 1100, 35-959, Rzeszów, Polska

АВТОР:

МІХАЛЬСЬКІ Яцек, доктор інженер, Жешовська Політехніка, Кафедра двигунів внутрішнього згоряння і транспорту, Бульвар Повстанців Варшави 12, tel.: +48 17 865 1100, 35-959, Жешув, Польща

AUTHOR:

MICHALSKI Jacek, PhD., Rzeszow University of Technology, Department of Internal Combustion Engines and Transport, Warsaw Insurgents Boulevard 12, tel.: +48 17 865 1100, 35-959, Rzeszow, Poland

РЕЦЕНЗЕНТИ:

ЛЕЙДА Казімеж, доктор габілітований, професор, Жешовська Політехніка, завідувач кафедри двигунів внутрішнього згорання і транспорту, Жешув, Польща.

Левківський О.П., доктор технічних наук, професор, Національний Транспортний Університет, професор кафедри виробництва, ремонту та матеріалознавства, Київ, Україна.

REVIEWERS:

LEJDA Kazimierz, Doctor of Sciences, Professor, Rzeszow Polytechnic, Head of Department of Internal Combustion Engines and Transport, Rzeszow, Poland.

Levkivskiyi O.P, Doctor of Sciences, Professor, National Transport University, Professor of Department of Manufacturing, Repair and Materials Engineering, Kyiv, Ukraine.