

УДК 539.3  
UDC 539.3

**БІФУРКАЦІЙНІ ВИПИНАННЯ ТА МАЛІ ЗГИНАЛЬНІ КОЛИВАННЯ БУРИЛЬНОЇ КОЛОНИ В КАНАЛІ ГОРИЗОНТАЛЬНОЇ СВЕРДЛОВИНИ**

*Андрусенко О.М.*, кандидат технічних наук, Національний транспортний університет, Київ, Україна

**BIFURCATION BUCKLING AND SMALL BENDING VIBRATION OF A DRILL STRING IN THE CHANNEL OF A HORIZONTAL BORE-HOLE**

*Andrusenko E.N.*, Ph.D., National Transport University, Kiev, Ukraine

**БИФУРКАЦИОННЫЕ ВЫПУЧИВАНИЯ И МАЛЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БУРИЛЬНОЙ КОЛОННЫ В КАНАЛЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СКВАЖИНЫ**

*Андрусенко Е.Н.*, кандидат технических наук, Национальный транспортный университет, Киев, Украина

**Вступ.**

Найбільш типовою позаштатною ситуацією при бурінні є втрата стійкості й пружне біфуркаційне випинання колони. Задача про дослідження цього ефекту для вертикальних і похилих свердловин розглядалась у роботах [1-5] без урахування фрикційних ефектів, що викликані обертанням бурильної колони. Вплив цих сил досліджено в роботі [6]. У даній роботі розглянута задача про стійкість та коливання бурильної колони, що обертається на дні прямолінійної горизонтальної свердловини. Враховані сили фрикційної взаємодії колони зі стінкою свердловини та в'язі, що реалізуються за рахунок їх контакту. Досліджено вплив сил інерції внутрішнього потоку промивної рідини на характер випинання колони в критичних станах і моди її вільних коливань. Встановлено, що в результаті впливу коріолісових сил інерції цього потоку коливання колони можуть бути реалізовані лише у формі біжучих хвиль, причому швидкості розповсюдження цих хвиль у напрямку руху потоку й проти нього мають різні значення.

**1. Розв'язувальні співвідношення критичної рівноваги й коливань горизонтальної бурильної колони.** Розглянемо стан квазістатичної рівноваги бурильної колони (рис. 1) при її стаціонарному обертанні з кутовою швидкістю  $\omega$  на дні горизонтальної прямолінійної свердловини.

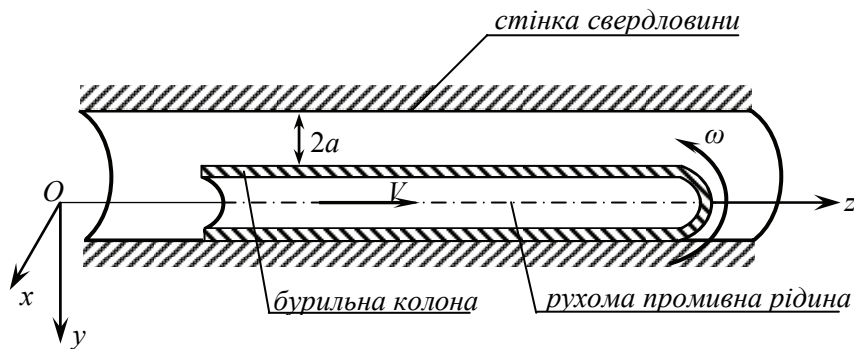


Рисунок 1 – Бурильна колона на дні горизонтальної свердловини

Колона стиснута осьювою силою  $F_z$ , її поздовжні рухи відсутні. Міжтрубний зазор системи дорівнює  $a$ . Завдяки його наявності, колона може згинатися та здійснювати поперечні коливання, залишаючись у контакті циліндричною поверхнею свердловини. У результаті цих рухів між колоною та стінкою свердловини генерізуються орієнтовані в окружному напрямку розподілені кулонівські сили тертя ковзання  $f^{тер} \leq \mu f^{конт}$ , де  $\mu$  – коефіцієнт сухого тертя,  $f^{конт}$  – розподілені сили контактного тиску.

По досягненні величиною  $f^{тер}$  граничного значення  $\mu f^{конт}$  дотичні поверхні приходять у відносний рух і реалізується динамічне тертя-ковзання, при якому сила тертя зберігає своє граничне значення  $\mu f^{конт}$ , яке не залежить від швидкості  $v$ .

Прийmemo, що в даному випадку БК обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  та в зоні контакту елементарні ділянки поверхні БК ковзають по поверхні свердловини зі стаціонарною позитивною відносною швидкістю  $v^{cm}$ . При цьому  $f^{тер} = \mu f^{конт}$ . Нехай потім при втраті стійкості чи малих коливаннях швидкість  $v^{cm}$  отримала малі прирости  $\pm \delta v$ , але при цьому повна швидкість  $v = v^{cm} \pm \delta v$  зберегла позитивне значення. У цьому випадку сила  $f^{тер} = \mu f^{конт}$  залишиться незмінною. Ця властивість збереження силою тертя свого постійного значення при малих переміщеннях і швидкостях коливань використовується нижче при постановці задач про згинанні БК.

Під дією сил тертя труба, що обертається, перекохується вгору по поверхні свердловини і займає деяке граничне положення, в якому розподілена сила  $\vec{f}^{конт}$  контактного тиску зменшується, а внаслідок цього зменшується і сила тертя-зчеплення  $\vec{f}^{тер}$ , що переходить потім у силу тертя-ковзання. У цьому положенні діюча на трубу розподілена сила  $\vec{f}^{тяж}$  тяжіння врівноважується силами  $\vec{f}^{конт}$ ,  $\vec{f}^{тер}$  та БК знаходиться в стані рівноваги. Однак якщо на трубу діє осьова стискаюча сила  $\vec{F}_z$ , то при деякому її значенні цей стан може виявитися нестійким і відбудеться випинання колони. Задача дослідження цього ефекту істотно відрізняється від задачі ейлерової втрати стійкості стержня, оскільки на колону крім того діють сили інерції внутрішнього потоку рідини і по всій її довжині накладені додаткові в'язі, що обмежують її переміщення по поверхні свердловини. Тому для аналізу стійкості БК, що обертається, спочатку визначимо положення її рівноваги, а потім будемо досліджувати його стійкість.

У стаціонарному стані БК, що обертається, відхилена від вісі  $Oy$  на кут  $\theta$  (вона прямолінійна), і на неї діють сили  $\vec{f}^{тяж}$ ,  $\vec{f}^{конт}$  і  $\vec{f}^{тер}$ . Оскільки при цьому БК зберегла свою прямолінійність, додаткові сили інерції від рухомого потоку промивної рідини залишаються рівними нулю. Спроекувавши зазначені сили на нормаль та дотичну до поверхонь БК та свердловини в точці їх контакту, отримаємо

$$\begin{aligned} f^{конт} - f^{тяж} \cos \theta &= 0, \\ f^{тер} - f^{тяж} \sin \theta &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Відповідно до закону тертя Кулона при ковзанні  $f^{тер} = \mu f^{конт}$ . Тоді з (1) випливає, що

$$\begin{aligned} f^{конт} &= f^{тяж} \cos \theta, \\ f^{тер} &= f^{тяж} \sin \theta. \end{aligned} \quad (2)$$

Підставляючи вираз для  $f^{тер}$  у другу рівність системи (1), отримаємо

$$\mu \cos \theta - \sin \theta = 0 \quad \text{або} \quad \text{tg} \theta = \mu. \quad (3)$$

Таким чином, в результаті обертання БК, що лежить на дні каналу горизонтальної свердловини, залишається прямолінійною і відхиляється під дією сил тертя від свого нижнього положення на кут  $\theta$ , рівний куту тертя  $\text{arctg} \mu$ , що узгоджується з загальним уявленням про рівновагу тіла на похилій шорсткуватій площині. Для перевірки стійкості цього стану складемо рівняння пружної рівноваги елемента труби довжиною  $dz$  в збуреному стані. Відзначимо, що в цьому стані до описаних вище зовнішніх сил, що діють на БК, додаються також розподілені сили інерції внутрішнього потоку промивної рідини. Рівняння рівноваги моментів відносно нормалі до контактуючих поверхонь запишеться у вигляді:

$$d \delta M - \delta Q dz - F_z a d \delta \theta = 0. \quad (4)$$

Тут символ  $\delta$  позначає приріст відповідної величини, викликаний малим пружним згинанням труби БК в результаті малої зміни кута нахилу  $\delta\theta(z)$  кожного її елемента;  $d$  – символ, що позначає приріст відповідний функції, пов'язаний з приростом  $dz$  її аргументу  $z$ ;  $M(z)$  – внутрішній згинальний момент;  $Q(z)$  – внутрішня перерізуюча сила.

При втраті стійкості колона набуває викривленої конфігурації, її елементи займають нові положення, сили тертя і гравітації змінюються на величини  $\delta f^{тер}$ ,  $\delta f^{тяж}$  та промивна рідина починає рухатися всередині викривленого каналу, генеруючи додаткову відцентрову силу інерції  $\delta f^{pid}$ .

З умови балансу всіх сил, прикладених до елемента в окружному напрямку, дотичному до контактуючих поверхонь, маємо

$$d\delta Q - \delta f^{тер} dz + \delta(f^{тяж} \sin \theta) dz + \delta f^{pid} dz = 0. \quad (5)$$

Перетворимо рівняння (4), (5) до вигляду

$$\delta Q = \frac{d\delta M}{dz} - aF_z \frac{d\delta\theta}{dz}, \quad \frac{d}{dz} \delta Q - \delta f^{тер} + \delta(f^{тяж} \sin \theta) + \delta f^{pid} = 0. \quad (6)$$

Використовуючи вираз

$$\delta M = EI \frac{d^2}{dz^2} (a\delta\theta) \quad (7)$$

і рівності, що випливають з (1), (2)

$$\begin{aligned} \delta f^{тер} &= \mu \delta f^{конт} = \mu \delta(f^{тяж} \cos \theta) = -\mu f^{тяж} \sin \theta \cdot \delta\theta, \\ \delta(f^{тяж} \sin \theta) &= f^{тяж} \cos \theta \cdot \delta\theta, \end{aligned} \quad (8)$$

а також рівність, що визначає силу інерції від потоку рідини [7]

$$\delta f^{pid} = V^2 \gamma_{pid} a \frac{d^2 \delta\theta}{dz^2},$$

одержимо рівняння пружного критичного стану БК

$$aEI \frac{d^4 \delta\theta}{dz^4} - aF_z \frac{d^2 \delta\theta}{dz^2} + V^2 \gamma_{pid} a \frac{d^2 \delta\theta}{dz^2} + f^{гр} (\mu \sin \theta + \cos \theta) \delta\theta = 0. \quad (9)$$

Тут  $V$  – швидкість руху рідини,  $\gamma_{pid}$  – погонна густина.

За допомогою (3) виразимо в (9) кут  $\theta$  через  $\mu$ . Тоді

$$\theta = \arctg \mu, \quad \sin \theta = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}, \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \quad (10)$$

Вважаючи кут  $\delta\theta$  малим, введемо величину  $\delta u = a\delta\theta$ , що представляє собою функцію малого пружного переміщення елементів БК у площині, дотичній до стичних поверхонь.

Виконавши в (9) заміни (10) і підстановку  $\delta u = a\delta\theta$ , побудуємо остаточне розв'язувальне рівняння

$$EI \frac{d^4 \delta u}{dz^4} - F_z \frac{d^2 \delta u}{dz^2} + V^2 \gamma_{pid} \frac{d^2 \delta u}{dz^2} + \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{a} f^{тяж} \delta u = 0. \quad (11)$$

Воно визначає критичний стан БК, що обертається, на дні каналу горизонтальної свердловини в стані, відхиленому від нижнього положення на кут  $\theta = \arctg \mu$ . Відзначимо, що при  $\mu = 0$  і  $V = 0$  це співвідношення зводиться до відомого рівняння [8]

$$EI \frac{d^4 \delta u}{dz^4} - F_z \frac{d^2 \delta u}{dz^2} + \frac{f^{мяжс}}{a} \delta u = 0, \quad (12)$$

побудованому в припущенні відсутності сил тертя між БК і стінкою свердловини.

Обидва ці рівняння аналогічні рівнянням рівноваги балки на пружній основі з коефіцієнтом постелі  $k = f^{мяжс} \sqrt{1 + \mu^2} / a$  для (11) і  $k = f^{мяжс} / a$  для (12), хоча скельна порода прийнята абсолютно жорсткою і грає роль в'язі, накладеної на переміщення БК.

**2. Критичні стани БК, що обертаються в горизонтальній циліндричній порожнині свердловини.** Рівняння (11) є однорідним, тому має тривіальний розв'язок  $\delta u(z) \equiv 0$  при будь-яких значеннях осевої сили  $F(z)$ . Значення  $F(z)$ , при яких це рівняння має нетривіальні розв'язки  $\delta u(z) \neq 0$ , є біфуркаційними. У цих станах БК втрачає стійкість своєї прямолінійної форми і випинається. Розглянемо спочатку випадок втрати стійкості БК необмеженої довжини  $L = \infty$ . Ненульовий розв'язок рівняння (11) представимо у вигляді (рис. 2)

$$\delta u_\lambda(z) = \delta c \sin(\pi z / \lambda). \quad (13)$$

Тут  $\lambda$  – довжина напівхвилі втрати стійкості.

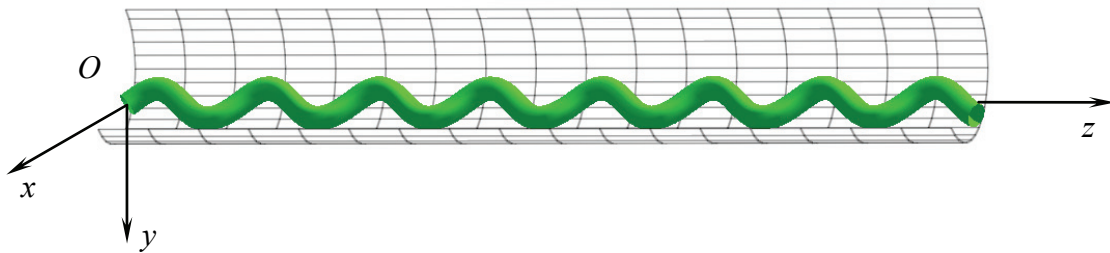


Рисунок 2 – Бурильна колона після втрати стійкості у горизонтальній циліндричній свердловині

Підставивши (13) у (11), отримаємо характеристичне рівняння

$$EI \frac{\pi^4}{\lambda^4} + (F_z - V^2 \gamma_{pid}) \frac{\pi^2}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{1 + \mu^2}}{a} = 0, \quad (14)$$

що визначає власні значення  $(F_z - V^2 \gamma_{pid})_\lambda$  при обраному  $\lambda$

$$(F_z - V^2 \gamma_{pid})_\lambda = \left[ \pi^2 EI / \lambda^2 + \lambda^2 f^{мяжс} \sqrt{1 + \mu^2} / (\pi^2 a) \right]. \quad (15)$$

Критичне значення різниці  $F_z - V^2 \gamma_{pid}$  досягається при  $\lambda$ , що мінімізує цю величину. З умови

$$d(F_z - V^2 \gamma_{pid})_\lambda / d\lambda = 0 \quad (16)$$

отримуємо критичне значення різниці

$$(F_z - V^2 \gamma_{pid})^{sp} = -2 \sqrt{EI f^{мяжс} \sqrt{1 + \mu^2} / a}. \quad (17)$$

Відповідне йому  $\lambda$  дорівнює

$$\lambda^{kp} = \pi^4 \sqrt[4]{EI a / \sqrt{1 + \mu^2} \cdot f^{мяж}}. \quad (18)$$

Якщо довжина  $L$  БК обмежена і на її кінцях здійснюються умови шарнірного закріплення, то нетривіальні розв'язки рівняння (11) слід шукати у вигляді

$$\delta u_n(z) = \delta c \sin(n\pi z / L) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (19)$$

Представивши (19) в (11), отримаємо

$$\left(F_z - V^2 \gamma_{pid}\right)^{kp} = -EI \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \frac{\sqrt{1 + \mu^2}}{a} f^{мяж} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (20)$$

Таким чином, кожному значенню  $n$  в рівності (20) відповідає своє значення різниці  $\left(F_z - V^2 \gamma_{pid}\right)^{kp}$ . Оскільки практичний інтерес представляє тільки найменше за модулем значення цієї величини, необхідно праву частину в (20) мінімізувати по  $n$ . Для цього необхідно обчислити похідну  $d\left(F_z - V^2 \gamma_{pid}\right)/dn$  і прирівняти її до нуля. В результаті отримаємо

$$n^{kp} = \frac{L}{\pi} \sqrt[8]{1 + \mu^2} \cdot \sqrt[4]{\frac{f^{мяж}}{EI a}}. \quad (21)$$

Оскільки знайдене значення  $n^{kp}$  в загальному випадку не є цілим, для практичного використання необхідно взяти два найближчих до  $n^{kp}$  цілих  $n$  і вибрати з них те, яке забезпечує найменше величини  $\left(F_z - V^2 \gamma_{pid}\right)^{kp}$ .

Як приклад розглянемо випадок  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па,  $I = 1,555 \cdot 10^{-5}$  м<sup>4</sup>,  $f^{мяж} = 316,35$  Н/м,  $\mu = 0,32$ ,  $a = 0,04$  м,  $L = 500$  м. При цих значеннях за формулою (21) знайдено  $n^{kp} = 36,03$ , після чого підраховані  $\left(F_z - V^2 \gamma_{pid}\right)_{36}^{kp} = -3,293 \cdot 10^5$  Н,  $\left(F_z - V^2 \gamma_{pid}\right)_{37}^{kp} = 3,302 \cdot 10^5$  Н. Звідси випливає, що критичне значення цього параметра дорівнює  $\left(F_z - V^2 \gamma_{pid}\right)_{36}^{kp}$ , а число півхвиль у формі бифуркационного випинання становить  $n = 36$  при довжині  $\lambda = L/n = 13,89$  м.

Важливо відзначити, що в поставленій задачі про стійкість БК у каналі горизонтальної свердловини осьова сила  $F_z$  і величина  $V^2 \gamma_{pid}$  складають один визначальний параметр і надають однаковий вплив на стійкість колони. Причому, оскільки права частина рівності (20) завжди від'ємна, то від'ємною повинна бути і різниця  $\left(F_z - V^2 \gamma_{pid}\right)^{kp}$ . Оскільки  $V^2 \gamma_{pid}$  теж від'ємна, то можлива ситуація, коли втрата стійкості БК настає і при розтягувальній осьовій силі  $F_z < V^2 \gamma_{pid}$ . Якщо ж сила  $F_z < 0$  – стискаюча, то потік рідини тільки знижує величину критичної сили  $F_z$ .

**3. Власні коливання БК.** Вище показано, що БК, що обертається в горизонтальній свердловині, під дією постійних сил тертя, орієнтованих у окружному напрямку, перекочується вгору по поверхні свердловини і встановлюється у стан стаціонарного обертання під кутом  $\theta = \text{arctg } \mu$ . Досліджуємо малі згинні коливання БК відносно цього стану. Прийmemo, що швидкості ковзання БК по поверхні свердловини в результаті коливань не перевищують швидкість її ковзання, викликану обертанням, тому при коливаннях додаткові сили тертя не виникають. У цьому випадку для побудови рівняння динаміки достатньо в ліву частину співвідношення (12) додати доданок

$$\mathcal{F}^{in} = \gamma_{mp} a \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial t^2} = \gamma_{mp} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2}, \quad (22)$$

що визначає силу інерції  $\delta f^{in}$ . Тут  $\gamma_{mp}$  – погонна густина труби БК. У підсумку одержимо рівняння вільних коливань

$$EI \frac{d^4 \delta u}{dz^4} - F_z \frac{d^2 \delta u}{dz^2} + V^2 \gamma_{pi\delta} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial z^2} + 2V \gamma_{pi\delta} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial z \partial t} + \frac{\sqrt{1 + \mu^2}}{a} f^{мяж} \delta u + (\gamma + \gamma_{pi\delta}) \frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} = 0. \quad (23)$$

Безпосередньою підстановкою

$$\delta u(z, t) = \delta c \sin\left(\frac{\pi z}{\lambda}\right) \sin kt, \quad (24)$$

можна переконатися, що коливання колони з внутрішнім потоком не можуть відбуватися у формі стоячих хвиль (24), тому їх потрібно шукати в формі біжучих гармонійних хвиль.

$$\delta u(z, t) = \delta c \sin\left(\frac{\pi z}{\lambda} - kt\right), \quad (25)$$

Тут  $\pi/\lambda$  – хвильове число,  $k$  – циклічна частота. Ці параметри визначають фазову швидкість поширення гармонійної хвилі

$$v = k \lambda / \pi \quad . \quad (26)$$

Для отримання залежності між  $k$  і  $\lambda$  необхідно в рівнянні (23) замість змінної  $\delta u(z, t)$  підставити праву частину рівності (25). В результаті отримаємо дисперсійне рівняння

$$EI \frac{\pi^4}{\lambda^4} + (F_z - V^2 \gamma_{pi\delta}) \frac{\pi^2}{\lambda^2} + 2V \gamma_{pi\delta} \frac{\pi}{\lambda} k + \frac{\sqrt{1 + \mu^2}}{a} f^{мяж} - (\gamma + \gamma_{pi\delta}) k^2 = 0. \quad (27)$$

Воно має розв'язок у формі

$$k_{1,2} = \frac{V \gamma_{pi\delta}}{(\gamma + \gamma_{pi\delta})} \cdot \frac{\pi}{\lambda} \pm \sqrt{\left[ \frac{V \gamma_{pi\delta}}{(\gamma + \gamma_{pi\delta})} \cdot \frac{\pi}{\lambda} \right]^2 + \frac{\left[ EI \frac{\pi^4}{\lambda^4} + (F_z - V^2 \gamma_{pi\delta}) \frac{\pi^2}{\lambda^2} + \frac{\sqrt{1 + \mu^2}}{a} f^{мяж} \right]}{\gamma + \gamma_{pi\delta}}}. \quad (28)$$

З його допомогою вираз для фазової швидкості

$$v_{1,2} = \frac{V \gamma_{pi\delta}}{(\gamma + \gamma_{pi\delta})} \pm \sqrt{\left( \frac{V \gamma_{pi\delta}}{(\gamma + \gamma_{pi\delta})} \right)^2 + \frac{\left[ EI \frac{\pi^2}{\lambda^2} + (F_z - V^2 \gamma_{pi\delta}) + \frac{\lambda^2 \sqrt{1 + \mu^2}}{\pi^2 a} f^{мяж} \right]}{\gamma + \gamma_{pi\delta}}}. \quad (29)$$

На рис. 3 наведені дисперсійні криві (28) у діапазоні  $10 \leq \lambda \leq 50$  м для випадку  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па,  $r_1 = 0,08415$  м,  $r_2 = 0,07415$  м,  $I = \pi(r_1^4 - r_2^4)/4$ ,  $\gamma = 39$  кг/м,  $\gamma_{pi\delta} = 26$  кг/м,  $\mu = 0,32$ ,  $f^{мяж} = 307$  Н/м,  $a = 0,04$  м,  $V = 20$  м/с,

$$F_z = 0,5 \cdot \left( -2 \sqrt{EI f^{мяж} \sqrt{1 + \mu^2} / a + V^2 \gamma_{pi\delta}} \right) \text{ (криві } k_{1,1}, k_{2,1}),$$

$$F_z = 0,75 \cdot \left( -2 \sqrt{EI f^{мяж} \sqrt{1 + \mu^2} / a + V^2 \gamma_{pi\delta}} \right) \text{ (криві } k_{1,2}, k_{2,2}),$$

$$F_z = 0,95 \cdot \left( -2\sqrt{EI f^{тяж} \sqrt{1 + \mu^2/a} + V^2 \gamma_{рід}} \right) \text{ (криві } k_{1,3}, k_{2,3}).$$

Вони дають можливість простежити як значення  $F_z$  впливає на характер цих кривих.

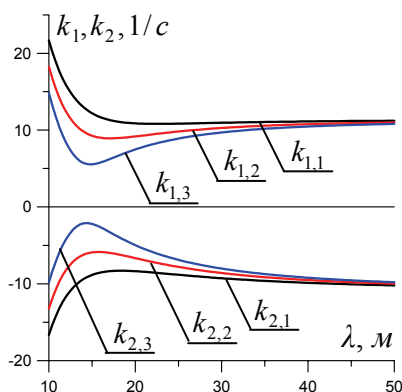


Рисунок 3 – Дисперсійні криві при фіксованому  $V = 20$  м/с

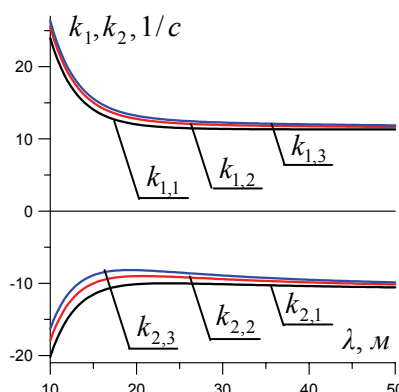


Рисунок 4 – Дисперсійні криві при фіксованому  $F_z = -0,5\sqrt{EI f^{тяж} \sqrt{1 + \mu^2/a}}$

Розглянуто також випадок, коли величина  $F_z$  була фіксована ( $F_z = -0,5\sqrt{EI f^{тяж} \sqrt{1 + \mu^2/a}}$ ), а швидкість рідини  $V$  приймала значення  $V = 15, 30$  і  $40$  м/с (відповідно криві  $k_{1,1}, k_{1,2}, k_{1,3}, k_{2,1}, k_{2,2}, k_{2,3}$  на рис. 4).

Відзначимо три важливі властивості, якими володіють ці розв'язки. По-перше, вільні коливання бурильної колони, яка обертається, з внутрішнім потоком рідини і лежить на дні горизонтальної свердловини, можуть бути реалізовані тільки у формі біжучих гармонійних хвиль.

По-друге, оскільки фазова швидкість хвилі залежить від довжини напівхвилі  $\lambda$ , виявляється, що згинні гармонійні хвилі з різними довжинами поширюються уздовж осі БК з різними швидкостями. Це означає, що згинна хвиля довільної форми при переміщенні змінює свій профіль, тобто диспергує, а без дисперсії можуть поширюватися тільки синусоїдальні (косинусоїдальні) хвилі. Причому швидкості цих хвиль зростають зі збільшенням поздовжньої розтягуючої сили  $F_z$  і зменшенням міжтрубного зазору  $a$ .

По-третє, як випливає з рівності (29), для кожного напрямку і значення швидкості  $V$  течії промивної рідини й кожного значення довжини напівхвилі  $\lambda$  існує два різні значення фазової швидкості  $v_1$  і  $v_2$ . Це означає, що одна і та ж гармонійна хвиля може розповсюджуватися з двома різними швидкостями. Причому, так як другий доданок під коренем в правій частині рівності (28), як правило, по модулю більше першого доданка, то швидкості  $v_1$  і  $v_2$  відрізняються знаками. Тому дві встановлені хвилі з однаковими довжинами поширюються в протилежних напрямках уздовж осі БК з різними за модулем швидкостями.

Висновки.

У зв'язку з розробкою нових технологій видобутку вуглеводневих палив із сланцевих порід у нафтогазовій промисловості все більша увага приділяється задачам буріння похилих і горизонтальних свердловин. Специфіка процесів проходки таких свердловин полягає в тому, що на їх перебіг істотно впливають сили контактної і фрикційної взаємодії між поверхнею бурильної колони і стінкою свердловини, що виникають у таких випадках. У даній роботі поставлена задача про біфуркаційні випинання і малі згинні коливання бурильної колони, що обертається, яка лежить в каналі горизонтальної свердловини. З урахуванням сил тертя і додаткових реакцій в'язів виведені диференціальні рівняння, для яких побудовані розв'язки задач на власні значення про стійкість і вільні коливання колон скінченної й необмеженої довжини.

Робота виконана в рамках держбюджетної теми 0112U000137 «Математичне моделювання процесів безаварійного буріння в сланцевих породах і в шельфових зонах морських акваторій».

## ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Sawaryn S. J., Thorogood J. L. A compendium of directional calculations based on the minimum curvature method. SPE Drill. Complet. 2005. P. 24 – 36. March.

2. Mitchell R.F., Samuel R. How good is the torque / drag model? SPE Drilling & Completion. 2009. P. 62 – 7. March.
3. Gulyayev V.I., Andrusenko E.N. Theoretical simulation of geometrical imperfections influence on drilling operations at drivage of curvilinear bore-holes. J. Petr. Sci. Eng. 2013. No. 112. P. 170 – 177.
4. Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Solovjov I.L., Gorbunovich I.V. The buckling of elongated rotating drill strings. J. Petr. Sci. Eng. 2009. No. 67. P. 140 – 148.
5. Gulyayev V.I., Khudoliy S.N., Andrusenko E.N. Sensitivity of resistance forces to localized geometrical imperfections in movement of drill strings in inclined bore-holes. Interact. Multiscale Mech. 2011. No. 4 (1). P. 1 – 16.
6. Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Andrusenko E.N., Shlyun N.V. Modeling the energy-saving regimes of curvilinear bore-hole drivage. J. of Offshore Mechanics and Arctic Engineering. 2015. V. 137. No. 1. P. 011402-1 – 011402-8. February.
7. Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Andrusenko E.N., Shlyun N.V. Critical buckling of drill strings in curvilinear channels of directed bore-holes. J. of Petroleum Science and Engineering. 2015. V. 129. P. 168 – 177. March.
8. Гуляев В.И., Андрусенко Е.Н. Нелинейное изгибание бурильных колонн в вертикальных скважинах. Проблемы прочности. 2013. №3. С. 120 – 134.

#### REFERENCES

1. Sawaryn S. J., Thorogood J. L. A compendium of directional calculations based on the minimum curvature method. SPE Drill. Complet. 2005. P. 24 – 36. March.
2. Mitchell R.F., Samuel R. How good is the torque / drag model? SPE Drilling & Completion. 2009. P. 62 – 7. March.
3. Gulyayev V.I., Andrusenko E.N. Theoretical simulation of geometrical imperfections influence on drilling operations at drivage of curvilinear bore-holes. J. Petr. Sci. Eng. 2013. No. 112. P. 170 – 177.
4. Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Solovjov I.L., Gorbunovich I.V. The buckling of elongated rotating drill strings. J. Petr. Sci. Eng. 2009. No. 67. P. 140 – 148.
5. Gulyayev V.I., Khudoliy S.N., Andrusenko E.N. Sensitivity of resistance forces to localized geometrical imperfections in movement of drill strings in inclined bore-holes. Interact. Multiscale Mech. 2011. No. 4 (1). P. 1 – 16.
6. Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Andrusenko E.N., Shlyun N.V. Modeling the energy-saving regimes of curvilinear bore-hole drivage. J. of Offshore Mechanics and Arctic Engineering. 2015. V. 137. No. 1. P. 011402-1 – 011402-8. February.
7. Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Andrusenko E.N., Shlyun N.V. Critical buckling of drill strings in curvilinear channels of directed bore-holes. J. of Petroleum Science and Engineering. 2015. V. 129. P. 168 – 177. March.
8. Gulyayev V.I., Andrusenko E.N. Non-linear bending of drill strings in vertical bore-holes. Strength of Materials. 2013. No. 3. P. 120 – 134.(Rus).

#### РЕФЕРАТ

Андрусенко О.М. Біфуркаційні випинання та малі згинальні коливання бурильної колони в каналі горизонтальної свердловини / О.М. Андрусенко // Вісник Національного транспортного університету. Серія «Технічні науки». Науково-технічний збірник. – К. : НТУ, 2016. – Вип. 1 (34).

У даній роботі поставлена задача про біфуркаційні випинання і малі згинальні коливання бурильної колони, що обертається, яка лежить в каналі горизонтальної свердловини. З урахуванням сил тертя і додаткових реакцій в'язів виведені диференціальні рівняння, для яких побудовані розв'язки задач на власні значення про стійкість і вільні коливання колон скінченної й необмеженої довжини.

Об'єкт дослідження - явище пружного деформування бурильної колони в каналі горизонтальної свердловини при виконанні технологічних операцій буріння.

Мета роботи полягає в постановці і розв'язанні нових задач будівельної механіки про нелінійне деформування бурильних колон горизонтальних свердловин.

Для дослідження механіки пружного згинання бурильних колон у горизонтальних свердловинах використовувались методи будівельної механіки гнучких криволінійних стержнів; методи диференціальної геометрії та теорії поверхонь; основні положення теорії механічних систем із в'язями, що обмежують їх переміщення; числовий метод Рунге-Кутти.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** БУРИЛЬНА КОЛОНА, ГОРИЗОНТАЛЬНА СВЕРДЛОВИНА, ОБЕРТАННЯ, ТЕРТЯ, СТІЙКІСТЬ, КОЛИВАННЯ, МОДЕЛЮВАННЯ.



### ABSTRACT

Andrusenko E.N. Bifurcational buckling and small bending vibration of a drill string in the channel of a horizontal bore-hole. Visnyk National Transport University. Series «Technical sciences». Scientific and Technical Collection. – Kyiv: National Transport University, 2016. – Issue 1 (34).

In this paper, the problem about bifurcational buckling and small bending vibration of a rotating drill string lying in the channel of a horizontal bore-hole is stated. With allowance made for friction forces and additional constraint reactions, differential equations are deduced, their eigen-value solutions describing stability and vibration of the drill string of finite and infinite lengths are received.

The investigation object is the phenomenon of the drill string deforming in the channels of horizontal bore-holes during drilling and ascending – descending operations.

To analyze mechanics of elastic bending of drill strings in horizontal bore-holes with the methods of structural mechanics, theory of curvilinear flexible rods, differential geometry and surface theory are used.

**KEYWORDS:** DRILL STRING, HORIZONTAL HOLE, ROTATION, FRICTION, STABILITY, VIBRATION, MODELING.

### РЕФЕРАТ

Андрусенко Е.Н. Бифуркационные выпучивания и малые изгибные колебания бурильной колонны в канале горизонтальной скважины / Е.Н. Андрусенко // Вестник Национального транспортного университета. Серия «Технические науки». Научно-технический сборник. – К. : НТУ, 2016. – Вып. 1 (34).

В данной работе поставлена задача о бифуркационных выпучиваниях и малых изгибных колебаниях вращающейся бурильной колонны, которая лежит в канале горизонтальной скважины. С учётом сил трения и дополнительных реакций связей выведены дифференциальные уравнения, для которых построены решения задач на собственные значения об устойчивости и сводных колебаниях колонн конечной и неограниченной длины.

Объект исследования - явление упругого деформирования бурильной колонны в канале горизонтальной скважины при выполнении технологических операций бурения.

Цель работы заключается в постановке и решении новых задач строительной механики о нелинейном деформировании бурильных колонн в горизонтальных скважинах.

Для исследования механики упругого изгиба бурильных колонн в горизонтальных скважинах использовались методы строительной механики гибких криволинейных стержней; методы дифференциальной геометрии и теории поверхностей; основные положения теории механических систем со связями, ограничивающие их перемещения; численный метод Рунге-Кутты.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** БУРИЛЬНАЯ КОЛОННА, ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ СКВАЖИНА, ВРАЩЕНИЕ, ТРЕНИЕ, УСТОЙЧИВОСТЬ, КОЛЕБАНИЯ, МОДЕЛИРОВАНИЕ.

#### **АВТОР:**

Андрусенко Елена Николаевна, кандидат технических наук, Национальный транспортный университет, доцент кафедры вищої математики, e-mail: a.andrusenko@gmail.com , тел. +380672981387, Україна, 01010, м. Київ, вул. Кіквідзе 42, к. 511.

#### **AUTHOR:**

Andrusenko Elena Nikolaevna, Ph.D., National Transport University, associate professor department of high mathematics, e-mail: a.andrusenko@gmail.com , tel. +380672981387, Ukraine, 01010, Kiev, Kikvidze str. 42, of. 511.

#### **АВТОР:**

Андрусенко Елена Николаевна, кандидат технических наук, Национальный транспортный университет, доцент кафедры высшей математики, e-mail: a.andrusenko@gmail.com, тел. +380672981387, Украина, 01010, г. Киев, ул. Киквидзе 42, к. 511.

#### **РЕЦЕНЗЕНТИ:**

Гайдайчук В.В., доктор технических наук, профессор, Київський національний університет будівництва і архітектури, завідувач кафедри теоретичної механіки, Київ, Україна.

Лоза І.А., доктор фізико-математичних наук, професор, Національний транспортний університет, завідувач кафедри теоретичної механіки, Київ, Україна.

#### **REVIEWERS:**

Gaidaichuk V.V., Ph.D., Engineering (Dr.), professor, Kyiv National University of Structures and Architecture, Head of Department of Theoretical Mechanics, Kyiv, Ukraine.

Loza I.A., Ph.D., Physics and Mathematics (Dr), professor, National Transport University, Head of Department of Theoretical Mechanics, Kyiv, Ukraine.