

УДК 539.3
UDC 539.3

**MODEL FOR FREE VIBRATION ANALYSIS OF THE THICK-WALLED
MULTILAYER ANISOTROPIC SHELLS**

Marchuck O.V., Eng.D., National Transport University, Kyiv, Ukraine
Gnedash S.V., National Transport University, Kyiv, Ukraine
Levkivskiy S.A., National Transport University, Kyiv, Ukraine
Didychenko I.M., National Transport University, Kyiv, Ukraine

**МОДЕЛЬ РОЗРАХУНКУ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ
ТОВСТОСТІННИХ ШАРУВАТИХ АНІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК**

Марчук О.В., доктор технічних наук, Національний транспортний університет, Київ, Україна
Гнедаш С.В., Національний транспортний університет, Київ, Україна
Левківський С.А., Національний транспортний університет, Київ, Україна
Дідиченко І.М., Національний транспортний університет, Київ, Україна

**МОДЕЛЬ РАСЧЕТА СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОЛСТОСТЕННЫХ СЛОИСТЫХ
АНИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК**

Марчук А.В., доктор технических наук, Национальный транспортный университет, Киев, Украина
Гнедаш С.В., Национальный транспортный университет, Киев, Украина
Левковский С.А., Национальный транспортный университет, Киев, Украина
Дидыченко И.М., Национальный транспортный университет, Киев, Украина

Introduction

The overwhelming majority of the known analysis models takes curvature as a constant value and assumes it to be at a level of middle surface. The list of such studies can be seen in reviews [1-3, 5-9, 13-15]. Analysis of the thick-walled shells requires taking into account curvature thickness change. This article considers the approach allowing analyses of the free vibrations of the high curvature thick-walled shells with axisymmetric bending. It is based on the division of the cylindrical shell thickness using concentric surfaces into a number of the constituent cylindrical shells those are sufficiently thin to neglect its curvature thickness change. Meeting the criteria of contact on the external surfaces between the constituent shells, we describe the stress stain behavior of the original shell with the discrete curvature thickness change consideration. Polynoms are used for the approximation of the required functions by thickness, and trigonometrical ratios - according to the plan.

1. Analysis Algorithm

Components of the cylindrical shell stain tensor under the stain shall be determined on the basis of the following ratios (the axis x is directed along the constitutive shell):

$$e_{xx}^{(k)} = \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x}; e_{\theta\theta}^{(k)} = \frac{1}{r} U_r^{(k)}; e_{rr}^{(k)} = \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r}; 2e_{x\theta}^{(k)} = \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x};$$

$$2e_{xr}^{(k)} = \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial x}; 2e_{r\theta}^{(k)} = \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial r} - \frac{1}{r} U_\theta^{(k)}. \quad (1)$$

The stresses are recorded on the basis of Hooke's law.

$$\sigma_{xx}^{(k)} = C_{11} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + C_{12} \frac{1}{r} U_r^{(k)} + C_{13} \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r} + C_{16} \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x};$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta\theta}^{(k)} &= C_{21} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + C_{22} \frac{1}{r} U_r^{(k)} + C_{23} \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r} + C_{26} \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x}; \\
 \sigma_{rr}^{(k)} &= C_{31} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + C_{32} \frac{1}{r} U_r^{(k)} + C_{33} \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r} + C_{36} \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x}; \\
 \sigma_{x\theta}^{(k)} &= C_{61} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + C_{62} \frac{1}{r} U_r^{(k)} + C_{63} \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r} + C_{66} \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x}; \\
 \sigma_{xr}^{(k)} &= C_{55}^{(k)} \left(\frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial x} \right) + C_{45}^{(k)} \left(\frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial r} - \frac{1}{r} U_\theta^{(k)} \right); \\
 \sigma_{r\theta}^{(k)} &= C_{54}^{(k)} \left(\frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial x} \right) + C_{44}^{(k)} \left(\frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial r} - \frac{1}{r} U_\theta^{(k)} \right).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Let us introduce the following approximation of the required displacements [10]:

$$\begin{aligned}
 U_x^{(k)}(x, r) &= U_l^{(k)}(x) f_l^{(k)}(r) + \frac{\partial}{\partial x} W_p^{(k)}(x) \varphi_p^{(k)}(r); \\
 U_r^{(k)}(x, r) &= W_p^{(k)}(x) \beta_p^{(k)}(r) \quad (l = 1, 2) (p = 1, 2, 3).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Where $U_l^{(k)}(x)$, $U_2^{(k)}(x)$ – tangential displacements on the front surfaces of the structure; $W_1^{(k)}$, $W_2^{(k)}$ – normal displacements on the front surfaces of the structure; $W_3^{(k)}$ – displacement function; $f_1^{(k)}(r)$, $f_2^{(k)}(r)$, $\beta_1^{(k)}(r)$, $\beta_2^{(k)}(r)$ – given first-order polynoms; $\varphi_1^{(k)}(r)$, $\varphi_2^{(k)}(r)$ – second-order; $\beta_3^{(k)}(r)$ – third-order.

Variation of the potential stain energy in view of the thickness approximation introduced takes the form:

$$\begin{aligned}
 \delta \bar{I} &= \int_0^L \int_{a_{k-1}}^{a_k} \left\{ [C_{11} \frac{\partial \left(U_{xl}^{(k)}(x) f_l^{(k)}(r) + \frac{\partial}{\partial x} W_p^{(k)}(x) \varphi_p^{(k)}(r) \right)}{\partial x} + \right. \\
 &+ \left. \left(C_{12} \frac{1}{r} + C_{13} \frac{\partial}{\partial r} \right) W_p^{(k)}(x) \beta_p^{(k)}(r) + C_{16} \frac{\partial U_\theta^{(k)}(x) f_l^{(k)}(r)}{\partial x} \right] \times \\
 &\quad \times \delta \frac{\partial \left(U_{xl}^{(k)}(x) f_l^{(k)}(r) + \frac{\partial}{\partial x} W_p^{(k)}(x) \varphi_p^{(k)}(r) \right)}{\partial x} + \\
 &\quad + [C_{21} \frac{\partial \left(U_{xl}^{(k)}(x) f_l^{(k)}(r) + \frac{\partial}{\partial x} W_p^{(k)}(x) \varphi_p^{(k)}(r) \right)}{\partial x} + \\
 &+ \left. \left(C_{22} \frac{1}{r} + C_{23} \frac{\partial}{\partial r} \right) W_p^{(k)}(x) \beta_p^{(k)}(r) + C_{26} \frac{\partial U_\theta^{(k)}(x) f_l^{(k)}(r)}{\partial x} \right] \delta \frac{1}{r} W_p^{(k)}(x) \beta_p^{(k)}(r) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial \left(U_{xl}^{(k)}(x) f_l^{(k)}(r) + \frac{\partial}{\partial x} W_p^{(k)}(x) \varphi_p^{(k)}(r) \right)}{[C_{31} \partial x]} + \\
 & + \left(C_{32} \frac{1}{r} + C_{33} \frac{\partial}{\partial r} \right) W_p^{(k)}(x) \beta_p^{(k)}(r) + C_{36} \frac{\partial U_{\theta l}^{(k)}(x) f_l^{(k)}(r)}{\partial x} J \delta \frac{\partial W_p^{(k)}(x) \beta_p^{(k)}(r)}{\partial r} + \\
 & + \frac{\partial \left(U_{xl}^{(k)}(x) f_l^{(k)}(r) + \frac{\partial}{\partial x} W_p^{(k)}(x) \varphi_p^{(k)}(r) \right)}{[C_{61} \partial x]} + \\
 & + \left(C_{62} \frac{1}{r} + C_{63} \frac{\partial}{\partial r} \right) W_p^{(k)}(x) \beta_p^{(k)}(r) + C_{66} \frac{\partial U_{\theta l}^{(k)}(x) f_l^{(k)}(r)}{\partial x} J \delta \frac{\partial U_{\theta l}^{(k)}(x) f_l^{(k)}(r)}{\partial x} + \\
 & + [C_{55}^{(k)}] \left(\frac{\partial \left(U_{xl}^{(k)}(x) f_l^{(k)}(r) + \frac{\partial}{\partial x} W_p^{(k)}(x) \varphi_p^{(k)}(r) \right)}{\partial r} + \frac{\partial W_p^{(k)}(x) \beta_p^{(k)}(r)}{\partial x} \right) + \\
 & + C_{45}^{(k)} \left(\frac{\partial U_{\theta l}^{(k)}(x) f_l^{(k)}(r)}{\partial r} - \frac{1}{r} U_{\theta l}^{(k)}(x) f_l^{(k)}(r) \right) J \times \\
 & \times \delta \left[\frac{\partial \left(U_l^{(k)}(x) f_l^{(k)}(r) + \frac{\partial}{\partial x} W_p^{(k)}(x) \varphi_p^{(k)}(r) \right)}{\partial r} + \frac{\partial W_p^{(k)}(x) \beta_p^{(k)}(r)}{\partial x} \right] J + \\
 & + [C_{45}^{(k)}] \left(\frac{\partial \left(U_{xl}^{(k)}(x) f_l^{(k)}(r) + \frac{\partial}{\partial x} W_p^{(k)}(x) \varphi_p^{(k)}(r) \right)}{\partial r} + \frac{\partial W_p^{(k)}(x) \beta_p^{(k)}(r)}{\partial x} \right) + \\
 & + C_{55}^{(k)} \left(\frac{\partial U_{\theta l}^{(k)}(x) f_l^{(k)}(r)}{\partial r} - \frac{1}{r} U_{\theta l}^{(k)}(x) f_l^{(k)}(r) \right) J \times \\
 & \times \delta \left[\frac{\partial U_{\theta l}^{(k)}(x) f_l^{(k)}(r)}{\partial r} - \frac{1}{r} U_{\theta l}^{(k)}(x) f_l^{(k)}(r) \right] J dr dx. \tag{4}
 \end{aligned}$$

Where $\bar{l} = 1, 2$; $\bar{p} = 1, 2, 3$; L – sheath length; a_{k-l} ; a_k – coordinates of the external surfaces of k constituent of the sheath by axis r .

On rearrangements

$$\begin{aligned}
 \delta \bar{I} = & \int_0^L \left\{ [D11_{\bar{l}\bar{l}}^{(k)}] \frac{\partial U_{xl}^{(k)}(x)}{\partial x} + \left(D12_{\bar{l}p}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D13_{\bar{l}p}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + D14_{\bar{l}p}^{(k)} \right) W_p^{(k)}(x) + \right. \\
 & + D15_{\bar{l}\bar{l}}^{(k)} \frac{\partial U_{\theta l}^{(k)}(x)}{\partial x} J \delta \frac{\partial U_{xl}^{(k)}(x)}{\partial x} + \left. \left(T11_{\bar{l}\bar{l}}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T21_{\bar{l}\bar{l}}^{(k)} \right) U_l^{(k)}(x) + \right. \\
 & \left. + \left(T12_{\bar{l}p}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T22_{\bar{l}p}^{(k)} \right) \frac{\partial W_p^{(k)}(x)}{\partial x} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(T13_{\bar{l}l}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T23_{\bar{l}l}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)2}} T14_{\bar{l}l}^{(k)} \right) U_{\theta}^{(k)}(x)] \delta U_{xl}^{(k)}(x) + \\
 & + [D21_{\bar{p}l}^{(k)} \frac{\partial U_{xl}^{(k)}(x)}{\partial x} + \left(D22_{\bar{p}p}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D23_{\bar{p}p}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + D24_{\bar{p}p}^{(k)} \right) W_p^{(k)}(x) + \\
 & + D25_{\bar{p}l}^{(k)} \frac{\partial U_{\theta}^{(k)}(x)}{\partial x}] \delta \frac{\partial^2 W_p^{(k)}(x)}{\partial x^2} + [\left(T31_{\bar{p}l}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T41_{\bar{p}l}^{(k)} \right) U_{xl}^{(k)}(x) + \\
 & \quad + \left(T32_{\bar{p}p}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T42_{\bar{p}p}^{(k)} \right) \frac{\partial W_p^{(k)}(x)}{\partial x} + \\
 & \quad + \left(T33_{\bar{p}l}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T43_{\bar{p}l}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)2}} T44_{\bar{p}l}^{(k)} \right) U_{\theta}^{(k)}(x)] \delta \frac{\partial W_p^{(k)}(x)}{\partial x} + \\
 & + [\left(D31_{\bar{p}l}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D41_{\bar{p}l}^{(k)} \right) \frac{\partial U_{xl}^{(k)}(x)}{\partial x} + [\left(D32_{\bar{p}p}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D42_{\bar{p}p}^{(k)} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \\
 & \quad + \left(D33_{\bar{p}p}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + D43_{\bar{p}p}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)2}} \right) + \left(D34_{\bar{p}p}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D44_{\bar{p}p}^{(k)} \right)] W_p^{(k)}(x) + \\
 & \quad + \left(D35_{\bar{p}l}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D45_{\bar{p}l}^{(k)} \right) \frac{\partial U_{\theta}^{(k)}(x)}{\partial x}] \delta W_p^{(k)}(x) + \\
 & + [D51_{\bar{l}l}^{(k)} \frac{\partial U_{xl}^{(k)}(x)}{\partial x} + \left(D52_{\bar{l}p}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D53_{\bar{l}p}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + D54_{\bar{l}p}^{(k)} \right) W_p^{(k)}(x) + \\
 & \quad + D55_{\bar{l}l}^{(k)} \frac{\partial U_{\theta}^{(k)}(x)}{\partial x}] \delta \frac{\partial U_{\theta}^{(k)}(x)}{\partial x} + \\
 & + [\left(T51_{\bar{l}l}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T61_{\bar{l}l}^{(k)} \right) U_{xl}^{(k)}(x) + \left(T52_{\bar{l}p}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T62_{\bar{l}p}^{(k)} \right) \frac{\partial W_p^{(k)}(x)}{\partial x} + \\
 & \quad + \left(T53_{\bar{l}l}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T63_{\bar{l}l}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)2}} T54_{\bar{l}l}^{(k)} \right) U_{\theta}^{(k)}(x)] \delta U_{\theta}^{(k)}(x). \tag{5}
 \end{aligned}$$

Variation of the kinetic energy can be expressed as follows:

$$\begin{aligned}
 \delta T = & - \int_0^{LaN} \int_{a0} \rho^{(k)} \{ \int_{t1}^{t2} [\ddot{U}_{xl}^{(k)}(x,t) f_l^{(k)}(r) + \frac{\partial}{\partial x} \ddot{W}_p^{(k)}(x,t) \varphi_p^{(k)}(r)] \times \\
 & \times \delta \left(U_{xl}^{(k)}(x,t) f_l^{(k)}(r) + \frac{\partial}{\partial x} W_p^{(k)}(x,t) \varphi_p^{(k)}(r) \right) + \\
 & + \left(\ddot{W}_p^{(k)}(x,t) \beta_p^{(k)}(r) \right) \delta \left(W_p^{(k)}(x,t) \beta_p^{(k)}(r) \right) + \\
 & + \left(\dot{U}_{\theta}^{(k)}(x,t) f_l^{(k)}(r) \right) \delta \left(U_{\theta}^{(k)}(x,t) f_l^{(k)}(r) \right)] dt - \\
 & - [\left(\dot{U}_{xl}^{(k)}(x,t) f_l^{(k)}(r) + \frac{\partial}{\partial x} \dot{W}_p^{(k)}(x,t) \varphi_p^{(k)}(r) \right) \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \delta \left(U_{xl}^{(k)}(x,t) f_l^{(k)}(r) + \frac{\partial}{\partial x} W_p^{(k)}(x,t) \varphi_p^{(k)}(r) \right) + \\
 & + \left(\dot{W}_p^{(k)}(x,t) \beta_p^{(k)}(r) \right) \delta \left(W_p^{(k)}(x,t) \beta_p^{(k)}(r) \right) + \\
 & + \left(\dot{U}_{\theta l}^{(k)}(x,t) f_l^{(k)}(r) \right) \delta \left(U_{\theta l}^{(k)}(x,t) f_l^{(k)}(r) \right) \Big|_{t_1}^{t_2} \} dr dL \quad (l = 1,2) (p = 1,2,3). \quad (6)
 \end{aligned}$$

Let us obtain a free vibration equation on the basis of the following variational equation:

$$\delta \ddot{I} - \delta T = 0. \quad (7)$$

On rearrangements, free vibrations equations in displacements take the following form:

$$\begin{aligned}
 & \left(D11_{ll}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + T11_{ll}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T21_{ll}^{(k)} \right) U_{xl}^{(k)}(x) + \\
 & + \left(D12_{lp}^{(k)} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \left(D13_{lp}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + D14_{lp}^{(k)} + T12_{lp}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T22_{lp}^{(k)} \right) \frac{\partial}{\partial x} \right) W_p^{(k)}(x) + \\
 & + \left(D15_{ll}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + T13_{ll}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T23_{ll}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)^2}} T14_{ll}^{(k)} \right) U_{\theta l}^{(k)}(x) + \\
 & + D\rho 11_{ll}^{(k)} \ddot{U}_{xl}^{(k)} + D\rho 12_{lp}^{(k)} \frac{\partial \ddot{W}_{pc}^{(k)}}{\partial x} = 0; \\
 & \left(D21_{pl}^{(k)} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \left(D31_{pl}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D41_{pl}^{(k)} + T31_{ll}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T41_{ll}^{(k)} \right) \frac{\partial}{\partial x} \right) U_{xl}^{(k)}(x) + \\
 & + (D22_{pp}^{(k)} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + (D23_{pp}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + D24_{pp}^{(k)} + D32_{pp}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D42_{pp}^{(k)} + T32_{lp}^{(k)} + \\
 & + \frac{1}{r^{(k)}} T42_{lp}^{(k)}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D33_{pp}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + D43_{pp}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)^2}} + D34_{pp}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D44_{pp}^{(k)}) W_p^{(k)}(x) + \\
 & + \left(D25_{pl}^{(k)} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \left(D35_{pl}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D45_{pl}^{(k)} + T33_{pl}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T43_{pl}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)^2}} T44_{pl}^{(k)} \right) \frac{\partial}{\partial x} \right) \times \\
 & \times U_{\theta l}^{(k)}(x) - D\rho 21_{lp}^{(k)} \frac{\partial f \ddot{U}_{xls}^{(k)}}{\partial} - D\rho 22_{pp}^{(k)} \frac{\partial^2 \ddot{W}_{pc}^{(k)}}{\partial x^2} + D\rho 33_{pp}^{(k)} \ddot{W}_{pc}^{(k)} = 0; \\
 & \left(D51_{ll}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + T51_{ll}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T61_{ll}^{(k)} \right) U_{xl}^{(k)}(x) + \\
 & + \left(D52_{lp}^{(k)} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \left(D53_{lp}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + D54_{lp}^{(k)} + T52_{lp}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T52_{lp}^{(k)} \right) \frac{\partial}{\partial x} \right) W_p^{(k)}(x) + \\
 & + \left(D55_{ll}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + T53_{ll}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T63_{ll}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)^2}} T54_{ll}^{(k)} \right) U_{\theta l}^{(k)}(x) + D\rho 11_{ll}^{(k)} \ddot{U}_{\theta l}^{(k)} = 0. \quad (8)
 \end{aligned}$$

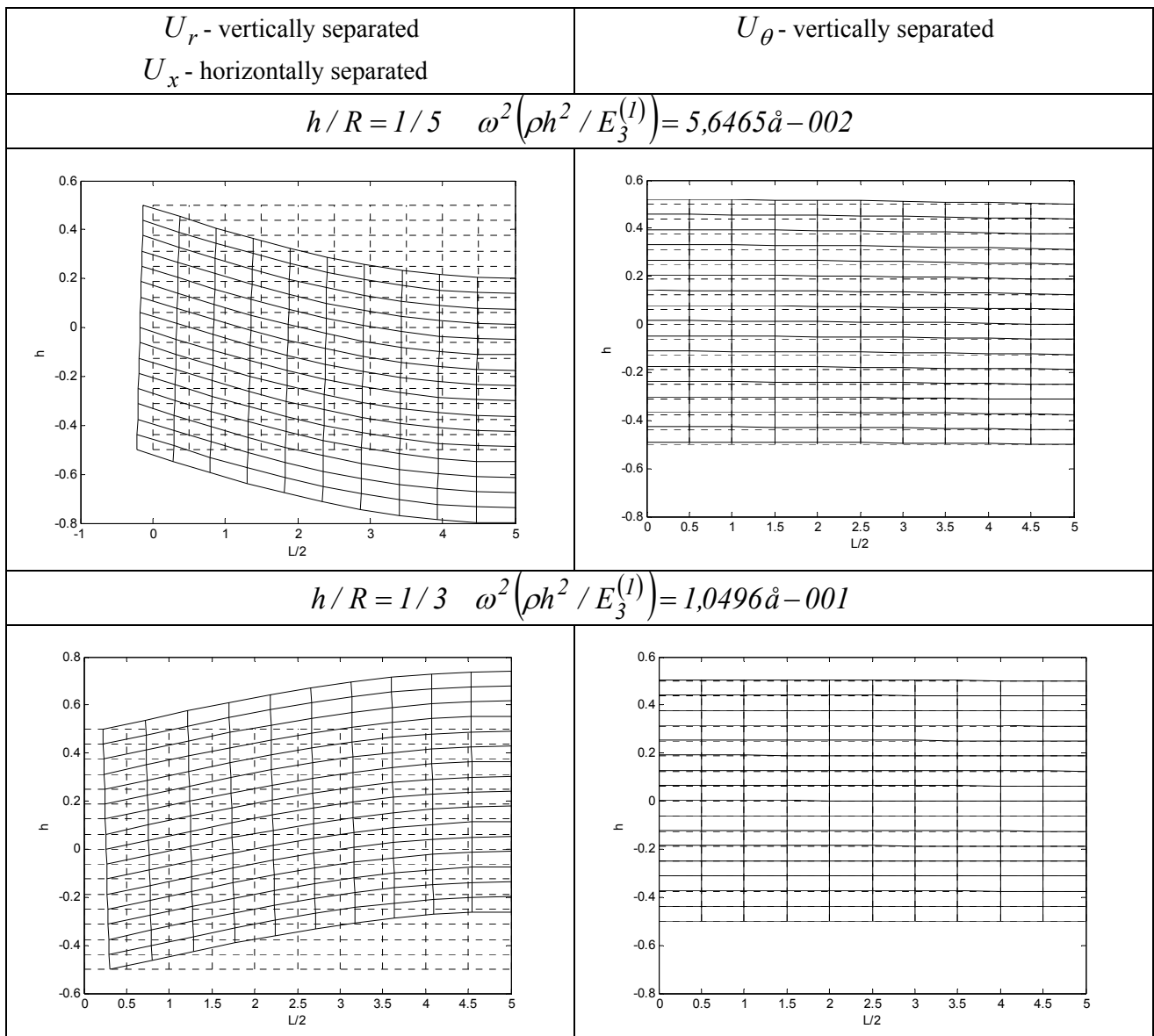
The differential equation system (8) is realized by means of standard trigonometrical substitutions for hinged edge (Navier solution).

2. Example of problems

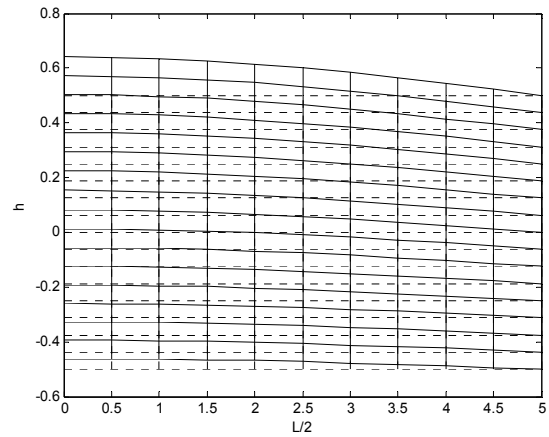
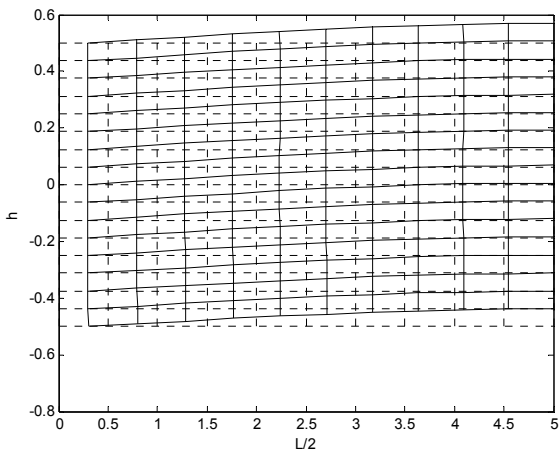
For example, let's consider double-layer shell where layers' stress-strain properties are as follows: $E_x^{(I)} / E_\theta^{(I)} = 25 / 1$; $E_\theta^{(I)} = E_r^{(I)}$; $G_{x\theta}^{(I)} / E_r^{(I)} = 0,5 / 1$; $G_{xr}^{(I)} / E_r^{(I)} = 0,2 / 1$; $G_{xr}^{(I)} = G_{x\theta}^{(I)}$; $\nu_{x\theta}^{(I)} = \nu_{xr}^{(I)} = \nu_{\theta r}^{(I)} = 0,25$; $L / h = 10$. The first and the second layers are at the angles $\pi / 4$ and $-\pi / 4$ to constitutive. The layers are divided into 8 sub layers. The ratio varied: $h / R = 1 / 5$; $1 / 3$; $1 / 1$; $1 / 0,75$. See the results of the calculations (frequency and form of the free vibrations) on the Pic. 1. Shortening of the curvature radius makes the vibration form change to planar ones with strong presence of winding.

The Pic. 2 shows frequencies and forms of the free vibrations as sixteen-layer shell ($L / h = 10$), where layers are sequentially turned at the angle $\pi / 4$ and $-\pi / 4$ to constitutive. Stress-stain properties of the layers are the same as in the previous example.

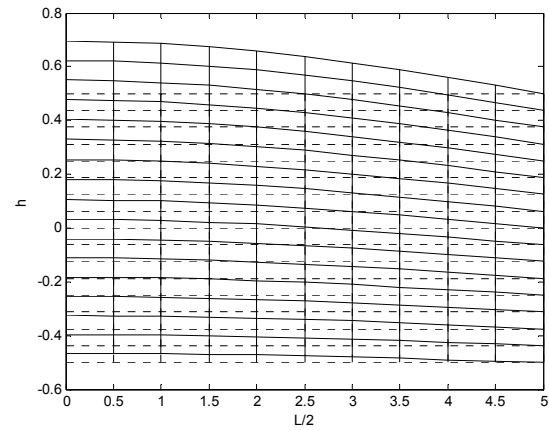
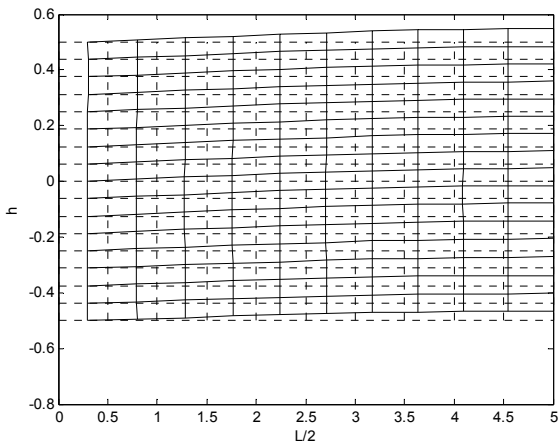
Picture 1 - Results of the calculations frequency and form of the free vibrations



$$h/R = 1/1 \quad \omega^2(\rho h^2 / E_3^{(1)}) = 1,6055\dot{a}-001$$



$$h/R = 1/0,75 \quad \omega^2(\rho h^2 / E_3^{(1)}) = 1,5740\dot{a}-001$$

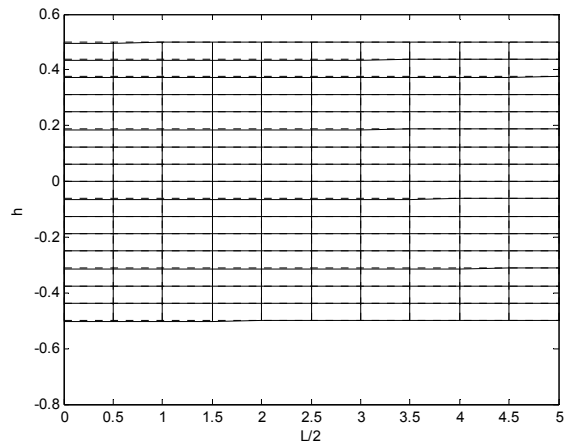
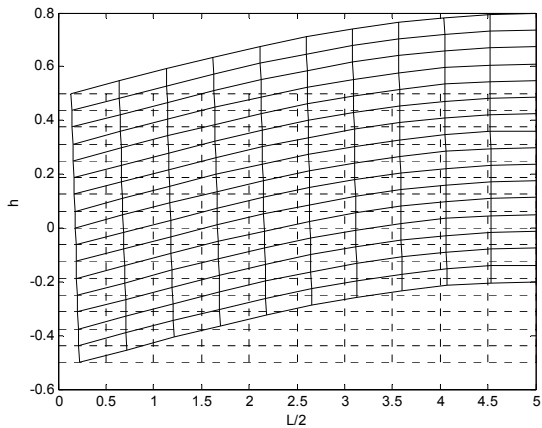


Picture 2 - Frequencies and forms of the free vibrations as sixteen-layer shell

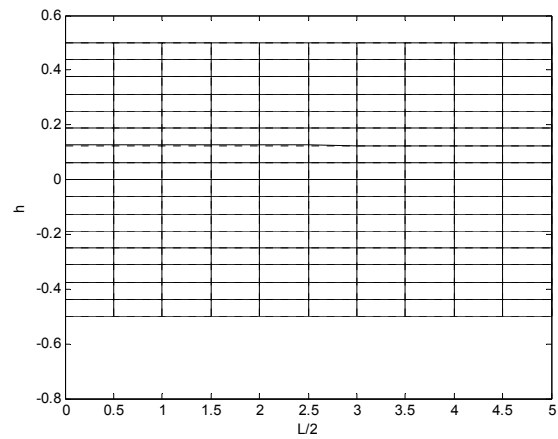
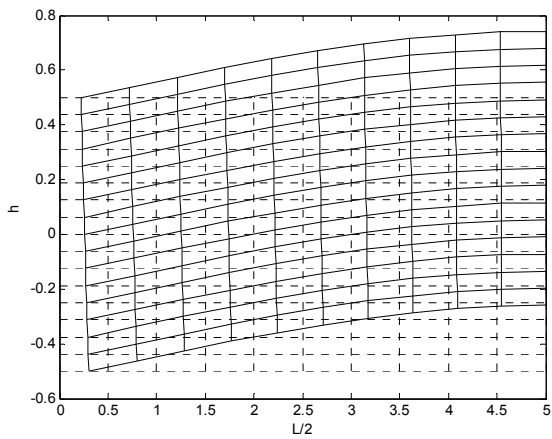
U_r - vertically separated
 U_x - horizontally separated

U_θ - vertically separated

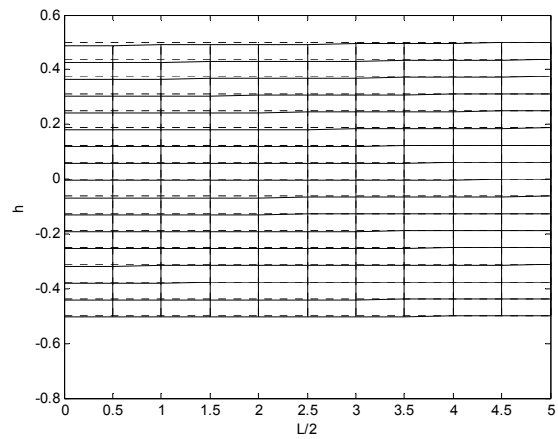
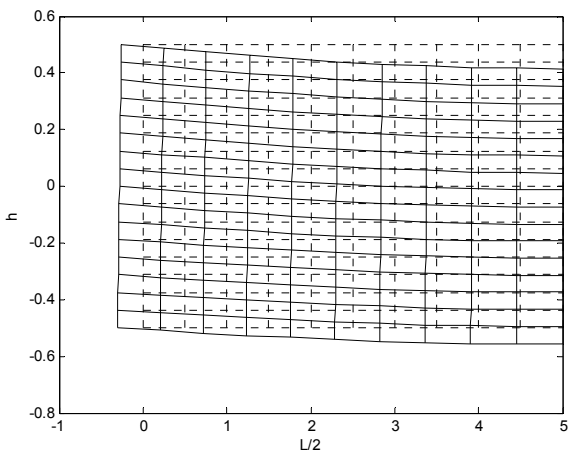
$$h/R = 1/5 \quad \omega^2(\rho h^2 / E_3^{(1)}) = 5,7455\dot{a}-002$$



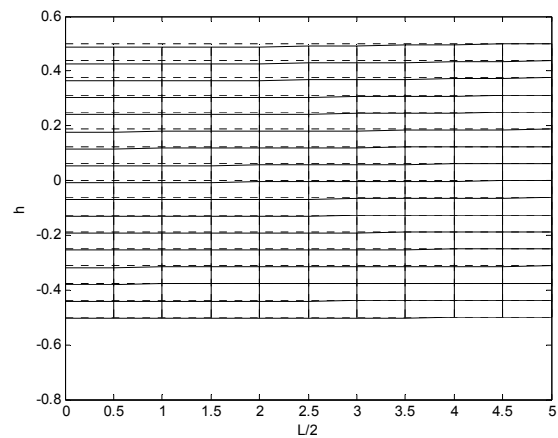
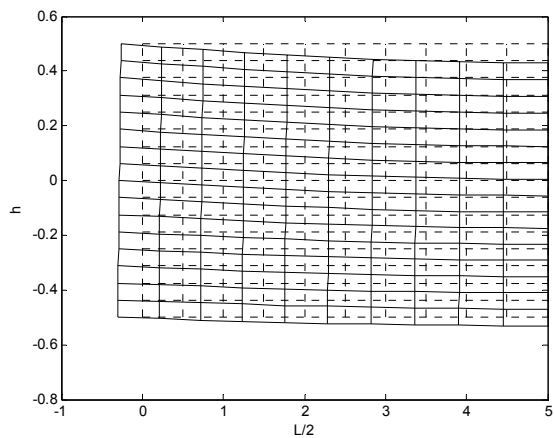
$$h/R = 1/3 \quad \omega^2(\rho h^2 / E_3^{(I)}) = 1,0499\dot{a}-001$$



$$h/R = 1/1 \quad \omega^2(\rho h^2 / E_3^{(I)}) = 1,8828\dot{a}-001$$



$$h/R = 1/0,75 \quad \omega^2(\rho h^2 / E_3^{(I)}) = 2,0180\dot{a}-001$$



In contrast to the previous case, change to the mostly planar vibrations at a small radius of the curvature is not followed by winding.

Thus, the procedure for analysis of the free-vibration frequencies of the high curvature thick-walled shells is developed. The studies conducted on its bases revealed that in case of shell curvature increase, mostly bending vibrations change to mostly planar ones. Whereat, the bending effect for the shells with the same thickness is decreasing in case of mutually crossing layers increase.

REFERENCES

1. Grigorenko, I.M., Vasilenko, A.T. and Pankratova, N.D. Non-homogeneous objects elasticity theory goals. K.: Naukova Dumka, 1991 – 216 p. (Rus)
2. Grigorenko, I.M., Vlaikov, G.G. and Grigorenko, A.I. Shell mechanics problems numerical analytic solution on the basis of different models. K.: Akademperiodika, 2006 – 472 p. (Rus)
3. Guz, A. N., Chernyshenko, I. S. and Shnerenko, K. I. Accumulation of stresses at the composite shell holes. // Applied mechanics. – 2001. – 37, N2 3-43 p. (Rus)
4. Zenkevich, O., Morgan, K. Finite elements and approximation. M.: Mir.– 1986.–318 p. (Rus)
5. Bakaiyan, H., Hosseini, H. and Ameri, E. Analisis of multi-layered filament-wound composite pipes under combined internal pressure and thermo-mechanical loading wicth thermal variations // Compos. Struct. – 2009.– 88.– P. 532– 541.
6. Grigorenko, Ya.M., Yaremchenko, S.N. Refined analysis of the stress state of orthotropic elliptic cylindrical shells with variable geometrical parameters // Int. Appl. Mech.-2008.- 40,N9.- P. 998-1005.
7. Grigorenko, Ya.M., Grigorenko, A.Ya., Zakhariychenko, L. I. Study of effect of the geometrical parameters on the stress state of cylindrical shells with corrugated llipticcross-section // Int. Appl. Mech.-2009.- 43,N12.– P.1372-1379.
8. Grigorenko, Ya.M., Grigorenko, A.Ya. Static and Dynamic Problems for Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (Review) // Int. Appl. Mech.-2013.- 49,N2.– P.123-193. (Rus)
9. Hosine, A., Chapelle, D., Baubakar, M.L.,et al. Experimental and analytical investigation of the cylindsrical part of a metallic vessel reinforced by filament winding while submitted to internal pressure // Int. J. Press. Vess. Piping.– 2009.– 86.– P.649– 655.
10. Marchuk, A.V., and Piskunov, V.G. Statics, vibrations and stability of composite panels with gently curved orthotropic layers. 1. Statics and vibrations // Mechanics of Composite Materials.– 1999. – 35,N4.– P.285–292.
11. Marchuk, A.V., and Piskunov, V.G. Calculation of layered structures by semianalytic method of finite elements // Mechanics of Composite Materials. – 1997.–33,N6.– P.553-556.
12. Marchuk, A.V., Il'chenko, Ya. L., and Gnedash, S.V. Analyzing of the stress-strain state of thick cylindrical shells.// Int. Appl. Mech.– 2011.– 47,N4.– P.449–455 .
13. Noor, A.K., Burton, W.S., and Peter, J.M. Assessment of computational models for multilayered composite cylinders // Int. J. Solids Struct.– 1991.– 27.No.10.– P.1269-1286.
14. Sheng, H.Y. and Ye, J.Q. A three-dimensional state space finite element solution for laminated composite cylindrical shells // Comp. Methods Appl. Mech. Eng.– 2003.– 192.– P.2441-2459.
15. Shuvalov, A.I. and Soldatos, K.P. On the successive approximation method for three-dimension analysis of radially ingomogeneous tubes with an arbitrary cylindrical anisotropy // J. Sound Vibr.– 2003.– 259,No.1.– P.233.– 239.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. – К.: Наукова думка,1991.– 216 с.
2. Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. –К.: Академперіодика, 2006. – 472 с.
3. Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Шнеренко К.И. Концентрация напряжений около отверстий в оболочках из композитных материалов // Прикладная механика. – 2001.–37,N2 С. 3–43.
4. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. –М.: Мир.– 1986.–318 с.
5. Bakaiyan, H., Hosseini, H. and Ameri, E. Analisis of multi-layered filament-wound composite pipes under combined internal pressure and thermo-mechanical loading wicth thermal variations // Compos. Struct. – 2009.– 88.– P. 532– 541.
6. Grigorenko, Ya.M., Yaremchenko, S.N. Refined analysis of the stress state of orthotropic elliptic cylindrical shells with variable geometrical parameters // Int. Appl. Mech.-2008.- 40,N9.- P. 998-1005.

7. Grigorenko, Ya.M., Grigorenko, A.Ya., Zakhariyenko, L. I. Study of effect of the geometrical parameters on the stress state of cylindrical shells with corrugated elliptic cross-section // *Int. Appl. Mech.*-2009.- 43,N12.- P.1372-1379.
8. Григоренко Я.М., Григоренко А.Я. Задачи статики и динамики анизотропных неоднородных оболочек с переменными параметрами и их численное решение (обзор). // *Прикладная механика.*-2013.-49,N2 С. 3-70.
9. Hosine, A., Chapelle, D., Baubakar, M.L., et al. Experimental and analytical investigation of the cylindrical part of a metallic vessel reinforced by filament winding while submitted to internal pressure // *Int. J. Press. Vess. Piping.*-2009.- 86.- P.649-655.
10. Marchuk, A.V., and Piskunov, V.G. Statics, vibrations and stability of composite panels with gently curved orthotropic layers. 1. Statics and vibrations // *Mechanics of Composite Materials.*-1999.- 35,N4.- P.285-292.
11. Marchuk, A.V., and Piskunov, V.G. Calculation of layered structures by semianalytic method of finite elements // *Mechanics of Composite Materials.* -1997.-33,N6.- P.553-556.
12. Marchuk, A.V., Il'chenko, Ya. L., and Gnedash, S.V. Analyzing of the stress-strain state of thick cylindrical shells.// *Int. Appl. Mech.*-2011.- 47,N4.- P.449-455 .
13. Noor, A.K., Burton, W.S., and Peter, J.M. Assessment of computational models for multilayered composite cylinders // *Int. J. Solids Struct.*-1991.- 27.No.10.- P.1269-1286.
14. Sheng, H.Y. and Ye, J.Q. A three-dimensional state space finite element solution for laminated composite cylindrical shells // *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*-2003.- 192.- P.2441-2459.
15. Shuvalov, A.I. and Soldatos, K.P. On the successive approximation method for three-dimension analysis of radially inhomogeneous tubes with an arbitrary cylindrical anisotropy // *J. Sound Vibr.*-2003.- 259,No.1.- P.233.- 239.

РЕФЕРАТ

Марчук О.В. Модель розрахунку вільних коливань товстостінних шаруватих анизотропних циліндричних оболонок. / О.В. Марчук, С.В. Гнедаш, С.А. Левківський, І.М. Дідиченко // Вісник Національного транспортного університету. Серія «Технічні науки». Науково-технічний збірник. – К. : НТУ, 2016. – Вип. 1 (34).

У статті запропонований підхід до дослідження вільних коливань товстостінних циліндричних оболонок.

Об'єкт дослідження - динамічний напружено-деформований стан шаруватих циліндричних оболонок.

Мета роботи - дослідження моделі розрахунку вільних коливань товстостінних шаруватих анизотропних циліндричних оболонок.

Метод дослідження - розроблена авторами математична модель напружено-деформованого стану товстих циліндричних оболонок, та її реалізація на основі поліноміальної апроксимації.

Побудовано підхід до дослідження вільних коливань товстостінних циліндричних оболонок. Для апроксимації шуканих функцій по товщині використовують поліноми. Для такої апроксимації по товщині отримана роздільна система диференціальних рівнянь. Реалізована вона в тригонометричних рядах. Проведено аналіз частот вільних коливань і їх форм для двошарових і шістнадцятишарових циліндричних оболонок при різному співвідношенні висоти оболонки до її радіуса.

Результати статті можуть бути використані для розрахунку циліндричних оболонок при визначенні частоти вільних коливань.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ТОВСТОСТІННІ ШАРУВАТІ ЦИЛІНДРИЧНІ ОБОЛОНКИ, ЧАСТОТИ І ФОРМИ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ.

ABSTRACT

Marchuk O.V., Gnedash S.V., Levkivskiy S.A., Didychenko I.M. Model for free-vibration analysis of the thick-walled multilayer anisotropic shells. *Visnyk National Transport University. Series «Technical sciences»*. Scientific and Technical Collection. – Kyiv: National Transport University, 2016. – Issue 1 (34).

The approach for analysis of the free vibrations in thick-walled cylindrical shells is developed has been suggested in the article.

The object of studying is dynamic stress strain behavior of the multilayer cylindrical shells.

The aim of work is research model for free vibration analysis of the thick-walled multilayer anisotropic shells.

Research method: stress behavior mathematical model of thick-walled cylindrical sheath condition and its implementing on the basis of polynomial approximation has been developed by the authors.

The approach for analysis of the free vibrations in thick-walled cylindrical shells is developed. Polynoms are used to approximate the required functions. The differential equations resolving system is obtained for such approximation by thickness. It is implemented in trigonometrical series. Free vibration frequencies and forms for double-layer and sixteen-layer cylindrical shells at different shell height to radius ratio are analyzed.

The article conclusions may be used for analysis of the cylindrical shells while determining frequency of the free vibrations.

KEY WORDS: THICK-WALLED MULTILAYER CYLINDRICAL SHEATHS, FREE VIBRATIONS FREQUENCIES AND FORMS.

РЕФЕРАТ

Марчук А.В. Модель расчета свободных колебаний толстостенных слоистых анизотропных цилиндрических оболочек. / А.В. Марчук, С.В. Гнедаш, С.А. Левковский, И.М. Дидыченко // Вестник Национального транспортного университета. Серия «Технические науки». Научно-технический сборник. – К. : НТУ, 2016. – Вып. 1 (34).

В статье предложен подход к исследованию свободных колебаний толстостенных цилиндрических оболочек.

Объект исследования - динамичное напряженно-деформированное состояние слоистых цилиндрических оболочек.

Цель работы - исследование модели расчета свободных колебаний толстостенных слоистых анизотропных цилиндрических оболочек.

Метод исследования - разработанная авторами математическая модель напряженно-деформированного состояния толстостенных цилиндрических оболочек, и её реализация на основе полиномиальной аппроксимации.

Построен подход к исследованию свободных колебаний толстостенных цилиндрических оболочек. Для аппроксимации искомых функций по толщине используют полиномы. Для такой аппроксимации по толщине получена раздельная система дифференциальных уравнений. Реализована она в тригонометрических рядах. Проведен анализ частот свободных колебаний и их форм для двухслойных и шестнадцатислойных цилиндрических оболочек при различном соотношении высоты оболочки к её радиусу.

Результаты статьи могут быть использованы для расчета цилиндрических оболочек при определении частоты свободных колебаний.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ТОЛСТОСТЕННЫЕ СЛОИСТЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ, ЧАСТОТЫ И ФОРМЫ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ.

АВТОРИ:

Марчук Олександр Васильович, доктор технічних наук, Національний транспортний університет, професор кафедри опору матеріалів і машинознавства, e-mail: ksm_ntu@ukr.net, тел. +380994256775, Україна, 01010, м. Київ, вул. Суворова, 1, к. 113.

Гнедаш Сергій Вікторович, Національний транспортний університет, аспірант кафедри опору матеріалів і машинознавства, e-mail: ksm_ntu@ukr.net, тел. +380635231860, Україна, 01010, м. Київ, вул. Суворова, 1, к. 113.

Левківський Сергій Анатолійович, Національний транспортний університет, старший викладач кафедри дорожніх машин, e-mail: sergey_levkovsky@ukr.net, тел. +380978316547, Україна, 01010, м. Київ, вул. Суворова, 1, к. 226.

Дідиченко Ірина Михайлівна, Національний транспортний університет, старший науковий співробітник кафедри опору матеріалів і машинознавства, e-mail: ksm_ntu@ukr.net, роб. тел. +380442804368, Україна, 01010, м. Київ, вул. Суворова, 1, к. 113.

AUTHORS:

Marchuck Alexander V., D.Eng., National Transport University professor, Mechanical engineering and strength of materials department professor, e-mail: ksm_ntu@ukr.net, tel. +380994256775 Ukraine, 01010, Kiev, Suvorova str. 1, of. 113.

Gnedash Sergij V., National Transport University, postgraduate, department of mechanical engineering and strength of materials, e-mail: ksm_ntu@ukr.net, tel. +3800635231860 Ukraine, 01010, Kiev, Suvorova str. 1, of. 113.

Levkivskiy Sergii A., National Transport University, Road vehicles department senior lecturer, e-mail: sergey_levkovsky@ukr.net, tel. +380978316547 Ukraine, 01010, Kiev, Suvorova str. 1, of. 226.

Didychenko Iryna M., National Transport University, Mechanical engineering and strength of materials senior scientist, e-mail: ksm_ntu@ukr.net, tel. +380442804368 Ukraine, 01010, Kiev, Suvorova str. 1, of. 113.

АВТОРЫ:

Марчук Александр Васильевич, доктор технических наук, Национальный транспортный университет, профессор кафедры сопротивления материалов и машиноведения, e-mail: ksm_ntu@ukr.net, тел. +380994256775, Украина, 01010, г. Киев, ул. Суворова, 1, к. 113.

Гнедаш Сергей Викторович, Национальный транспортный университет, аспирант кафедры сопротивления материалов и машиноведения, e-mail: ksm_ntu@ukr.net, тел. +380635231860, Украина, 01010, г. Киев, ул. Суворова, 1, к. 113.

Левковский Сергей Анатольевич, Национальный транспортный университет, старший преподаватель кафедры дорожных машин, e-mail: sergey_levkovsky@ukr.net, тел. +380978316547, Украина, 01010, г. Киев, ул. Суворова, 1, к. 226.

Дидыченко Ирина Михайловна, Национальный транспортный университет, старший научный сотрудник кафедры сопротивления материалов и машиноведения, e-mail: ksm_ntu@ukr.net, раб. тел. +380442804368, Украина, 01010, г. Киев, ул. Суворова, 1, к. 113.

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Луговий П.З., доктор технічних наук, професор, Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко, завідувач відділом будівельної механіки тонкостінних конструкцій, Київ, Україна.

Гуляев В.І., доктор технічних наук, професор, Національний транспортний університет, завідувач кафедрою вищої математики, Київ, Україна.

REVIEWERS:

Lugovoy P.Z., D.Eng., S.P.Timoshenko Institute of Mechanics, Structure mechanics of thin-walled structures department head professor, Kiev, Ukraine.

Gulyaev V.I., D.Eng., National Transport University professor, Higher mathematics department head professor, Kiev, Ukraine.