УДК 539.3
UDC 539.3

ПОБУДОВА НАПІВАНАЛІТИЧНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ АНАЛІЗУ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ШАРУВАТИХ КОМПОЗИТНИХ МАСИВІВ

Марчук О.В., доктор технічних наук, Національний транспортний університет, Київ, Україна, ksm_ntu@ukr.net, orcid.org/0000-0001-8374-7676
Левківський С.А., Національний транспортний університет, Київ, Україна, s.a.levkovsky@gmail.com, orcid.org/0000-0003-1515-4240

CONSTRUCTION OF A SEMI-ANALYTIC FINITE ELEMENT METHOD FOR ANALYZING THE STRESS-STRAIN STATE OF SANDWICH COMPOSITE ARRAYS

Marchuck O.V., Eng.D., National Transport University, Kyiv, Ukraine, ksm_ntu@ukr.net, orcid.org/0000-0001-8374-7676
Levkivskiy S.A., National Transport University, Kyiv, Ukraine, s.a.levkovsky@gmail.com, orcid.org/0000-0003-1515-4240

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ АНАЛИЗА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАССИВОВ

Марчук А.В., доктор технических наук, Национальный транспортный университет, Киев, Украина, ksm_ntu@ukr.net, orcid.org/0000-0001-8374-7676
Левковский С.А., Национальный транспортный университет, Киев, Украина, s.a.levkovsky@gmail.com, orcid.org/0000-0003-1515-4240

Вступ

У сучасній техніці збільшується використання конструктивних систем композитної структури. Особлива увага приділяється шаруватим масивам з високим рівнем різномодульності складових матеріалів та неоднаковими фізичними властивостями по взаємно перпендикулярним напрямам. Такі системи знаходяться в складних умовах деформування, мають різні умови закріплення, які можуть викликати порушення їх цілісності. Зазначені особливості викликають істотно тривимірний напружено-деформований стан з високими градієнтами його зміни. В останні роки для дослідження таких задач швидко розвиваються різні чисельно-аналітичні методи. Найбільш повний огляд публікацій з розрахунку конструкцій напіваналітичним методом скінченних елементів можна знайти в [1]. Велика кількість робіт в цьому напрямку присвячена розрахунку тіл обертання. По коловій координаті застосовується представлення шуканих функцій у вигляді рядів, найбільш часто Фур'є, а по твірній застосовується традиційна скінченно-елементна апроксимація. Різні варіанти чисельно-аналітичних рішень розглянуті в [2].

Завданням даної роботи є розробка варіанту напіваналітичного методу скінченних елементів, який дозволяє розглядати тривимірний напружено-деформований стан шаруватих композитних масивів при різних варіантах закріплення контуру. Для апроксимації шуканих функцій в плані по координаті X використовуються поліноми, по координаті Y залучається ряд Фур'є, а розподілення шуканих функцій по товщині конструкції знаходиться на основі аналітичного рішення відповідної системи диференціальних рівнянь.

1. Побудова рішення

Для побудови варіанту напіваналітичного методу скінченних елементів з відшуканням розподілу шуканих функцій по товщині конструкції на основі аналітичного рішення відповідної системи диференціальних рівнянь (В2) [6, 7], введемо наступну апроксимацію шуканих функцій переміщень і напружень в плані скінченного елемента [3, 4]:

$$U_1^{(k)}(x,y,z)=(\varphi_1(x)v_{11}^{(k)}(z)+\varphi_2(x)v_{12}^{(k)}(z))\sin\frac{\pi ny}{b};$$
$$U_2^{(k)}(x,y,z)=(\varphi_1(x)v_{21}^{(k)}(z)+\varphi_2(x)v_{22}^{(k)}(z))\cos\frac{\pi ny}{b};$$
$$U_3^{(k)}(x,y,z)=(\varphi_1(x)w_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)w_2^{(k)}(z))\sin\frac{\pi ny}{b};$$
$$\sigma_{13}^{(k)}(x,y,z)=(\varphi_1(x)\tau_{11}^{(k)}(r)+\varphi_2(x)\tau_{12}^{(k)}(r))\sin\frac{\pi ny}{b};$$
$$\sigma_{23}^{(k)}(x,y,z)=(\varphi_1(x)\tau_{21}^{(k)}(r)+\varphi_2(x)\tau_{22}^{(k)}(r))\cos\frac{\pi ny}{b};$$
$$\sigma_{33}^{(k)}(x,y,z)=(\varphi_1(x)\sigma_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\sigma_2^{(k)}(z))\sin\frac{\pi ny}{b}, \tag{1}$$

де $\varphi_1(x)=1-\frac{x}{l}$; $\varphi_2(x)=\frac{x}{l}$;

l – довжина скінченного елемента;

$v_{ij}^{(k)}(z)$, $w_j^{(k)}(z)$, $\tau_{ij}^{(k)}(z)$, $\sigma_j^{(k)}(z)$ – шукані функції розподілення переміщень і напружень в i-тому вузлі.

Використовуючи вирази для переміщень (1), знаходимо деформації на основі відомих співвідношень Коші.

$$e_{11}^{(k)}=(\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x}v_{11}^{(k)}(z)+\frac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x}v_{12}^{(k)}(z))\sin\frac{\pi ny}{b};$$
$$e_{22}^{(k)}=-\frac{\pi n}{b}(\varphi_1(x)v_{21}^{(k)}(z)+\varphi_2(x)v_{22}^{(k)}(z))\sin\frac{\pi ny}{b};$$
$$e_{33}^{(k)}=(\varphi_1(x)\frac{\partial w_1^{(k)}(z)}{\partial z}+\varphi_2(x)\frac{\partial w_2^{(k)}(z)}{\partial z})\sin\frac{\pi ny}{b};$$
$$2e_{23}^{(k)}=(\varphi_1(x)\frac{\partial v_{21}^{(k)}(z)}{\partial z}+\varphi_2(x)\frac{\partial v_{22}^{(k)}(z)}{\partial z}+\frac{\pi n}{b}\varphi_1(x)w_1^{(k)}(z)+\frac{\pi n}{b}\varphi_2(x)w_2^{(k)}(z))\cos\frac{\pi ny}{b};$$
$$2e_{13}^{(k)}=(\varphi_1(x)\frac{\partial v_{11}^{(k)}(z)}{\partial z}+\varphi_2(x)\frac{\partial v_{12}^{(k)}(z)}{\partial z}+\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x}w_1^{(k)}(z)+\frac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x}w_2^{(k)}(z))\sin\frac{\pi ny}{b};$$
$$2e_{12}^{(k)}=(\frac{\pi n}{b}\varphi_1(x)v_{11}^{(k)}(z)+\frac{\pi n}{b}\varphi_2(x)v_{12}^{(k)}(z)+\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x}v_{21}^{(k)}(z)+\frac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x}v_{22}^{(k)}(z))\cos\frac{\pi ny}{b}. \tag{2}$$

Напруження і деформації пов'язані наступними співвідношеннями:

$$\sigma_{11}^{(k)}=B_{11}^{(k)}e_{11}^{(k)}+B_{12}^{(k)}e_{22}^{(k)}+B_{13}^{(k)}\sigma_{33}^{(k)};$$
$$\sigma_{22}^{(k)}=B_{21}^{(k)}e_{11}^{(k)}+B_{22}^{(k)}e_{22}^{(k)}+B_{23}^{(k)}\sigma_{33}^{(k)};$$
$$B_{33}^{(k)}\sigma_{33}^{(k)}=B_{13}^{(k)}e_{11}^{(k)}+B_{23}^{(k)}e_{22}^{(k)}+e_{33}^{(k)};$$
$$\sigma_{23}^{(k)}=B_{44}^{(k)}2e_{23}^{(k)};\quad \sigma_{13}^{(k)}=B_{55}^{(k)}2e_{13}^{(k)};\quad \sigma_{12}^{(k)}=B_{66}^{(k)}2e_{12}^{(k)}. \tag{3}$$

Розв'язну систему рівнянь і відповідні граничні умови отримаємо на основі варіаційного принципу Рейсснера [5].

$$\delta\ R^{(k)} - \delta\ A^{(k)} = 0 .$$

У цьому принципу варіація функціонала Рейсснера визначається наступним чином [5]:

$$\delta\ R^{(k)} = \iint\limits_S \int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} \{ \Bigg[B_{11}^{(k)} \Big(\frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} v_{11}^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} v_{12}^{(k)}(z) \Big) \sin\frac{\pi ny}{b} -$$

$$- B_{12}^{(k)} \frac{\pi n}{b} (\varphi_1(x) v_{21}^{(k)}(z) + \varphi_2(x) v_{22}^{(k)}(z)) \sin\frac{\pi ny}{b} + B_{13}^{(k)} (\varphi_1(x)\sigma_1^{(k)}(z) +$$

$$+ \varphi_2(x)\sigma_2^{(k)}(z)) \sin\frac{\pi ny}{b} \Bigg] \delta\Big(\Big(\frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} v_{11}^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} v_{12}^{(k)}(z) \Big) \sin\frac{\pi ny}{b} \Big) +$$

$$+ \Bigg[B_{21}^{(k)} \Big(\frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} v_{11}^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} v_{12}^{(k)}(z) \Big) \sin\frac{\pi ny}{b} - B_{22}^{(k)} \frac{\pi n}{b} (\varphi_1(x) v_{21}^{(k)}(z) +$$

$$+ \varphi_2(x) v_{22}^{(k)}(z)) \sin\frac{\pi ny}{b} + B_{23}^{(k)} (\varphi_1(x)\sigma_1^{(k)}(z) +$$

$$+ \varphi_2(x)\sigma_2^{(k)}(z)) \sin\frac{\pi ny}{b} \Bigg] \delta\Big(-\frac{\pi n}{b} (\varphi_1(x) v_{21}^{(k)}(z) + \varphi_2(x) v_{22}^{(k)}(z)) \sin\frac{\pi ny}{b} \Big) +$$

$$\Bigg[B_{66}^{(k)} \Big(\frac{\pi n}{b} \varphi_1(x) v_{11}^{(k)}(z) + \frac{\pi n}{b} \varphi_2(x) v_{12}^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} v_{21}^{(k)}(z) +$$

$$+ \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} v_{22}^{(k)}(z) \Big) \cos\frac{\pi ny}{b} \Bigg] \delta\Big(\Big(\frac{\pi n}{b} \varphi_1(x) v_{11}^{(k)}(z) + \frac{\pi n}{b} \varphi_2(x) v_{12}^{(k)}(z) +$$

$$+ \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} v_{21}^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} v_{22}^{(k)}(z) \Big) \cos\frac{\pi ny}{b} \Big) + \Big[(\varphi_1(x)\sigma_1^{(k)}(z) +$$

$$+ \varphi_2(x)\sigma_2^{(k)}(z)) \sin\frac{\pi ny}{b} \Big] \delta\ \Big(\Big(\varphi_1(x) \frac{\partial w_1^{(k)}(z)}{\partial z} + \varphi_2(x) \frac{\partial w_2^{(k)}(z)}{\partial z} \Big) \sin\frac{\pi ny}{b} \Big) +$$

$$+ \Bigg[B_{13}^{(k)} \Big(\frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} v_{11}^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} v_{12}^{(k)}(z) \Big) \sin\frac{\pi ny}{b} - B_{23}^{(k)} \frac{\pi n}{b} (\varphi_1(x) v_{21}^{(k)}(z) +$$

$$+ \varphi_2(x) v_{22}^{(k)}(z)) \sin\frac{\pi ny}{b} + \Big(\varphi_1(x) \frac{\partial w_1^{(k)}(z)}{\partial z} + \varphi_2(x) \frac{\partial w_2^{(k)}(z)}{\partial z} \Big) \sin\frac{\pi ny}{b} -$$

$$- B_{33}^{(k)} (\varphi_1(x)\sigma_1^{(k)}(z) + \varphi_2(x)\sigma_2^{(k)}(z)) \sin\frac{\pi ny}{b} \Bigg] \delta(\varphi_1(x)\sigma_1^{(k)}(z) +$$

$$+ \varphi_2(x)\sigma_2^{(k)}(z)) \sin\frac{\pi ny}{b} + \Big[(\varphi_1(x)\tau_{21}^{(k)}(r) + \varphi_2(x)\tau_{22}^{(k)}(r)) \cos\frac{\pi ny}{b} \Big] \delta\Big(\varphi_1(x) \frac{\partial v_{21}^{(k)}(z)}{\partial z} +$$

$$+ \varphi_2(x) \frac{\partial v_{22}^{(k)}(z)}{\partial z} + \frac{\pi n}{b} \varphi_1(x) w_1^{(k)}(z) + \frac{\pi n}{b} \varphi_2(x) w_2^{(k)}(z) \cos\frac{\pi ny}{b} \Big) +$$

$$+ \Big[(\varphi_1(x)\tau_{11}^{(k)}(r) + \varphi_2(x)\tau_{12}^{(k)}(r)) \sin\frac{\pi ny}{b} \Big] \delta\Big(\varphi_1(x) \frac{\partial v_{11}^{(k)}(z)}{\partial z} + \varphi_2(x) \frac{\partial v_{12}^{(k)}(z)}{\partial z} +$$

$$\frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} w_1^{(k)}(z) + \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} w_2^{(k)}(z)) \sin \frac{\pi n y}{b})\} dz dS . \qquad (4)$$

Варіація роботи зовнішніх сил на лицьових поверхнях шару визначається наступним чином:

$$\begin{aligned} \delta \ A_1^{(k)} = \iint\limits_S [\, & q_{131}^{(k)} \delta \ ((\varphi_1(x) v_{11}^{(k)}(a_{k-1}) + \varphi_2(x) v_{12}^{(k)}(a_{k-1})) \sin \frac{\pi n y}{b}) + \\ & + q_{132}^{(k)} \delta \ ((\varphi_1(x) v_{11}^{(k)}(a_k) + \varphi_2(x) v_{12}^{(k)}(a_k)) \sin \frac{\pi n y}{b}) + \\ & + q_{231}^{(k)} \delta \ ((\varphi_1(x) v_{21}^{(k)}(a_{k-1}) + \varphi_2(x) v_{22}^{(k)}(a_{k-1})) \cos \frac{\pi n y}{b}) + \\ & + q_{232}^{(k)} \delta \ ((\varphi_1(x) v_{21}^{(k)}(a_k) + \varphi_2(x) v_{22}^{(k)}(a_k)) \cos \frac{\pi n y}{b}) + \\ & + q_{331}^{(k)} \delta \ ((\varphi_1(x) w_1^{(k)}(a_{k-1}) + \varphi_2(x) w_2^{(k)}(a_{k-1})) \sin \frac{\pi n y}{b}) + \\ & + q_{332}^{(k)} \delta \ ((\varphi_1(x) w_1^{(k)}(a_k) + \varphi_2(x) w_2^{(k)}(a_k)) \sin \frac{\pi n y}{b})] dS , \end{aligned} \qquad (5)$$

де $q_{13l}^{(k)}, q_{23l}^{(k)}, q_{33l}^{(k)} \ (l = 1,2)$ – навантаження на лицьових поверхнях шару.

Далі, з використанням рівнянь (2-5), формуємо розв'язну систему диференціальних рівнянь для шару з урахуванням кінематичних граничних умов на контурі конструкції.

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -k_{01} & \frac{1}{B_{55}^{(k)}} k_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\pi n}{b} k_{00} & 0 & \frac{1}{B_{44}^{(k)}} k_{00} & 0 \\ -B_{15}^{(k)} k_{00} & \frac{\pi n}{b} B_{25}^{(k)} k_{00} & 0 & 0 & 0 & B_{33}^{(k)} k_{00} \\ B_{11}^{(k)} k_{11} + (\frac{\pi n}{b})^2 B_{66}^{(k)} k_{00} & \frac{\pi n}{b} (B_{66}^{(k)} k_{01} - B_{12}^{(k)} k_{10}) & 0 & 0 & 0 & B_{13}^{(k)} k_{10} \\ \frac{\pi n}{b} (B_{66}^{(k)} k_{01} - B_{12}^{(k)} k_{10}) & B_{66}^{(k)} k_{11} + (\frac{\pi n}{b})^2 B_{22}^{(k)} k_{00} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\pi n}{b} B_{23}^{(k)} k_{00} \\ 0 & 0 & 0 & k_{10} & \frac{\pi n}{b} k_{00} & 0 \end{bmatrix} - \right.$$

$$\left. - \begin{bmatrix} k_{00} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{00} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{00} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{00} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{00} \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{00} \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1^{(k)}(r) \\ v_2^{(k)}(r) \\ w^{(k)}(r) \\ \tau_1^{(k)}(r) \\ \tau_2^{(k)}(r) \\ \sigma^{(k)}(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \qquad (6)$$

Тут

$$k_{00} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}; \ k_{10} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}; \ k_{11} = \begin{bmatrix} 1/l & -1/l \\ -1/l & 1/l \end{bmatrix};$$

$$k_{01} = k_{10}^{T}; \quad v_1^{(k)T} = \left\{ v_{11}^{(k)}(r), v_{12}^{(k)}(r) \right\}; \quad v_2^{(k)T} = \left\{ v_{21}^{(k)}(r), v_{22}^{(k)}(r) \right\};$$

$$w^{(k)T} = \left\{ w_1^{(k)}(r), w_2^{(k)}(r) \right\}; \; \tau_1^{(k)T} = \left\{ \tau_{11}^{(k)}(r), \tau_{12}^{(k)}(r) \right\};$$

$$\tau_2^{(k)T} = \left\{ \tau_{21}^{(k)}(r), \tau_{22}^{(k)}(r) \right\}; \quad \sigma^{(k)T} = \left\{ \sigma_1^{(k)}(r), \sigma_2^{(k)}(r) \right\};$$

$$\left\{ v_{1i}^{(k)}(z) \right\}^T = \left\{ \ldots, v_{1i}^{(k)}(z), \ldots \right\}; \; \left\{ v_{2i}^{(k)}(z) \right\}^T = \left\{ \ldots, v_{2i}^{(k)}(z), \ldots \right\};$$

$$\left\{ w_i^{(k)}(z) \right\}^T = \left\{ \ldots, w_i^{(k)}(z), \ldots \right\}; \; \left\{ \tau_{1i}^{(k)}(z) \right\}^T = \left\{ \ldots, \tau_{1i}^{(k)}(z), \ldots \right\};$$

$$\left\{ \tau_{1i}^{(k)}(z) \right\}^T = \left\{ \ldots, \tau_{1i}^{(k)}(z), \ldots \right\}; \; \left\{ \sigma_{2i}^{(k)}(z) \right\}^T = \left\{ \ldots, \sigma_{2i}^{(k)}(z), \ldots \right\},$$

де i – номер точки, в якій визначаються шукані функції.

Вектор шуканих функцій може бути представлений таким чином:

$$\begin{bmatrix} \left\{ v_{1i}^{(k)} \right\} \\ \left\{ v_{2i}^{(k)} \right\} \\ \left\{ w_i^{(k)} \right\} \\ \left\{ \tau_{1i}^{(k)} \right\} \\ \left\{ \tau_{2i}^{(k)} \right\} \\ \left\{ \sigma_i^{(k)} \right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{i1}^{(k)}(1) & ,..., & \mu_{i1}^{(k)}(j) & ,..., & \mu_{i1}^{(k)}(J) \\ \mu_{i2}^{(k)}(1) & ,..., & \mu_{i2}^{(k)}(j) & ,..., & \mu_{i2}^{(k)}(J) \\ \mu_{i3}^{(k)}(1) & ,..., & \mu_{i3}^{(k)}(j) & ,..., & \mu_{i3}^{(k)}(J) \\ \mu_{i4}^{(k)}(1) & ,..., & \mu_{i4}^{(k)}(j) & ,..., & \mu_{i4}^{(k)}(J) \\ \mu_{i5}^{(k)}(1) & ,..., & \mu_{i5}^{(k)}(j) & ,..., & \mu_{i5}^{(k)}(J) \\ \mu_{i6}^{(k)}(1) & ,..., & \mu_{i6}^{(k)}(j) & ,..., & \mu_{i6}^{(k)}(J) \end{bmatrix} \left[C^{(k)} \right], \tag{7}$$

де $\left[C^{(k)} \right]^T = \left[C_1^{(k)} e^{z\beta_1^{(k)}}, \ldots, C_j^{(k)} e^{z\beta^{(k)}}, \ldots C_J^{(k)} e^{z\beta_J^{(k)}} \right]$;

$\beta_j^{(k)}$ – корені характеристичного рівняння розв'язної системи диференціальних рівнянь, які можуть бути комплексними;

$\mu_{i1}^{(k)}(j)$, $\mu_{i2}^{(k)}(j)$, $\mu_{i3}^{(k)}(j)$, $\mu_{i4}^{(k)}(j)$, $\mu_{i5}^{(k)}(j)$, $\mu_{i6}^{(k)}(j)$ – її власні вектори;

$C_j^{(k)}$ – постійні інтегрування, які визначаються з умов контакту шарів і умов на лицьових поверхнях в кожному вузлі сітки розбиття конструкції на скінченні елементи;

$J -$ загальна кількість шуканих функцій в шарі.

2. Результати чисельних досліджень

Як приклад розглядався напружено-деформований стан тришарової плити з композитними шарами, з наступними фізико-механічними характеристиками: $E_1^{(1)} / E_2^{(1)} = 25/1$; $E_2^{(1)} = E_3^{(1)}$; $G_{12}^{(1)} / E_3^{(1)} = 0{,}5/1$; $G_{23}^{(1)} / E_3^{(1)} = 0{,}2/1$; $G_{13}^{(1)} = G_{12}^{(1)}$; $v_{12}^{(1)} = v_{13}^{(1)} = v_{23}^{(1)} = 0{,}25$. Другий шар був повернутий на 90°. Товщина другого шару дорівнювала сумі однакових товщин зовнішніх шарів. Плита квадратна в плані $a = b = L$ з співвідношенням $L/h = 10$, навантажена рівномірно-розподіленим нормально спрямованим навантаженням. Опора на контурі шарнірно-рухома. Нижня поверхня закріплена. Розрахунки проводилися з використанням аналітичної моделі (А) [8, 9] з утриманням 150-ти членів ряду в кожному напрямку, а також за пропонованою напіваналітичною методикою. У напіваналітичній методиці розглядалося два варіанти дискретизації. За стороною в напрямку осі X розглядалася половина плити, яка розбивалася на 4 елементи, а в напрямку осі Y утримувалося 10 членів ряду (B1). Розглядався також варіант з розбивкою на 100 елементів в напрямку осі X і утриманням в напрямку осі Y 150 членів ряду (B2).

У табл. 1 представлені результати розрахунку у безрозмірному вигляді ($\bar{U}_3 = \dfrac{U_3(L/2, L/2, z)E_3}{q_3 h}$; $\bar{\sigma}_{11} = \dfrac{\sigma_{11}(L/2, L/2, z)}{q_3}$; $\bar{\sigma}_{22} = \dfrac{\sigma_{22}(L/2, L/2, z)}{q_3}$) для такого типу навантаження. Розрахункові величини напружено-деформованого стану наведені на кордонах шарів.

Таблиця 1 – Результати розрахунків величини напружено-деформованого стану

Table 1 – Results of calculations of the stress-strain state

Номер шару	$\bar{U}_3$			$\bar{\sigma}_{11}$			$\bar{\sigma}_{22}$		
	B1	B2	A	B1	B2	A	B1	B2	A
1	0.9672 0.7202	0.9362 0.7019	0.9364 0.7019	-0.2470 -0.2386	-0.2224 -0.2233	-0.2430 -0.2233	-0.2928 -0.2608	-0.2492 -0.2450	-0.2505 -0.2451
2	0.7202 0.2373	0.7019 0.2334	0.7019 0.2334	-0.2611 -0.2525	-0.2478 -0.2494	-0.2478 -0.2494	-0.2288 -0.0672	-0.1321 -0.1339	-0.1321 -0.1339
3	0.2373 0.0000	0.2334 0.0000	0.2334 0.0000	-0.2566 -0.3170	-0.2646 -0.3125	-0.2647 -0.3125	-0.2468 -0.2561	-0.2455 -0.2525	-0.2455 -0.2525

Розрахунки, які проведені по запропонованим методикам В і А свідчать про їх близькість до відповідності. Для отримання грубо орієнтовних, прийнятних для інженерних потреб результатів розрахунку по моделі В достатньо розбити плиту на 4 елементи і утримувати 10 членів ряду. Пропонована методика (А) дозволяє істотно збільшити як кількість розглянутих елементів, так і кількість членів рядів з відповідним уточненням результатів розрахунку.

Висновки

Розроблений варіант напіваналітичного методу скінченних елементів для дослідження напружено-деформованого стану шаруватих композитних масивів. Нижня поверхня масиву жорстко закріплена. Методика дозволяє розглянути конструкції при її поділі на скінченні елементи і при значній кількості утриманих рядів. Проведені дослідження показали, що для випадку простого рівномірно розподіленого навантаження достатньо розбити плиту на 4 елементи і утримувати 10 членів ряду.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Баженов В.А., Гуляр О.І., Сахаров О.С., Солодей І.І.. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах динаміки просторових тіл.–К., 2012.–248 с.

2. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей.–К.: Академпериодика, 2006.–472 с.

3. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. – К.: Наукова думка,1991.– 216 с.

4. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Статика анизотропных толстостенных оболочек. –К.: Вища школа, 1985.– 190 с.

5. Grigorenko, Ya.,M., Grigorenko, A.,Ya., Zakhariychenko, L.,I.: Study of effect of the geometrical parameters on the stress state of cylindrical shells with corrugated elipticcross-section // Int. Appl. Mech.-2009.– 43,N12.– P. 1372-1379.

6. Марчук А.В., Пискунов В.Г. Расчет слоистых конструкций полуаналитическим методом конечных элементов // Механика композитных материалов.– 1997.– 33, N6.– С. 781–785.

7. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. –М.: Мир.– 1986.–318 с.

8. Марчук А.В., Пискунов В.Г. Статика, колебания и устойчивость композитных панелей с пологим искривлением слоев. 1.Статика и колебания // Механика композитных материалов.– 1999.– 35,N4.– С. 423–434.

9. Grigorenko, Ya.,M., Yaremchenko, S.,N.: Refined analysis of the stress state of orthotropic elliptic cylindrical shells with variable geometrical parameters // Appl. Mech. –2008.– 40,N9.– P. 998-1005.

REFERENCES

1. Bazhenov V.A., Guliar A.I., Sakharov A.S., Solodey I.I. (2012) Napivanalitychnyy metod skinchennykh elementiv v zadachakh dynamiky prostorovykh til [Semianalytic method of finite elements in strain bodies mechanics] // K.: NII SM [in Ukrainian].

2. Grigorenko I.M., Vlaikov G.G., Grigorenko A.I. (2006) Chislenno-analiticheskoye resheniye zadach mekhaniki obolochek na osnove razlichnykh modeley [Shell mechanics problems numerical analytic solution on the basis of different models]. K.: Akademperiodika [in Russian].

3. Grigorenko I.M., Vasilenko A.T., Pankratova N.D. (1991) Zadachi teorii uprugosti neodnorodnykh tel [Non-homogeneous objects elasticity theory goals]. K.: Naukova Dumka [in Russian].

4. Grigorenko I.M., Vasilenko A.T., Pankratova N.D. (1985) Statika anizotropnykh tolstostennykh obolochek [Thick-walled shell anisotropic statics]. – K.: Vyshcha Shkola [in Russian].

5. Grigorenko, Ya.,M., Grigorenko, A.,Ya., Zakhariychenko, L.,I. (2009) Study of effect of the geometrical parameters on the stress state of cylindrical shells with corrugated elipticcross-section // Int. Appl. Mech. [in English].

6. Marchuck A. V., Piskunov V. G. (1997) Raschet sloistykh konstruktsiy poluanaliticheskim metodom konechnykh elementov [Sandwich structure calculation via semianalytic method of finite elements]. // Composite materials mechanics. [in Russian].

7. Zenkevich O., Morgan K. (1986) Konechnyye elementy i approksimatsiya [Finite elements and approximation]. M.: Mir. [in Russian].

8. Marchuck A. V., Piskunov V. G. (1999) Statika, kolebaniya i ustoychivost' kompozitnykh paneley s pologim iskrivleniyem sloyev. 1.Statika i kolebaniya [Statics, oscillations and fixity of composite panels with flat layer curvature. Statics and oscillations] // Composite materials mechanics. [in Russian].

9. Grigorenko, Ya.,M., Yaremchenko, S.,N. (2008) Refined analysis of the stress state of orthotropic elliptic cylindrical shells with variable geometrical parameters // Appl. Mech. [in English].

РЕФЕРАТ

Марчук О.В. Побудова напіваналітичного методу скінченних елементів для аналізу напружено-деформованого стану шаруватих композитних масивів / О.В. Марчук, С.А. Левківський // Вісник Національного транспортного університету. Серія «Технічні науки». Науково-технічний збірник. – К. : НТУ, 2018. – Вип. 1 (40).

У статті запропонований підхід до розрахунку шаруватих композитних масивів умовах осесиметричного згинання.

Об’єкт дослідження - статичний напружено-деформований стан шаруватих композитних масивів.

Мета роботи - дослідження напружено-деформованого стану шаруватих композитних пластин під дією локальних дотичних навантажень за різних умов закріплення контуру.

Метод дослідження - розроблена авторами математична модель напружено-деформованого стану товстих пластин, та її реалізація на основі поліноміальної апроксимації.

В рамках просторової теорії пружності побудовано підхід до дослідження напружено-деформованого стану товстих композитних пластин. Підхід засновано на розділенні плити по товщині поверхнями на ряд складових поверхонь, достатньо тонких, щоб можна було нехтувати зміною їх кривизни по товщині. Задовольняючи умовам контакту на зовнішніх поверхнях між складовими поверхнями плити, описується напружено-деформований стан заданої плити з дискретним урахуванням зміни кривизни по товщині. В підході для апроксимації шуканих функцій в плані по координаті X використовуються поліноми, а по координаті Y залучається ряд Фур'є. Розподіл шуканих функцій по товщині конструкції знаходиться на основі аналітичного рішення відповідної системи диференціальних рівнянь. Проведені дослідження напружено-деформованого стану шаруватого композитного масиву під рівномірно-розподіленим нормальним навантаженням при різній кількості скінченних елементів та кількості рядів.

Результати статті можуть бути використані при розрахунку пластин з композитного матеріалу.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ШАРУВАТА КОМПОЗИТНА ПЛИТА, НАПІВАНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ, ЛОКАЛЬНІ ДОТИЧНІ НАВАНТАЖЕННЯ, РІЗНІ КОНТУРНІ УМОВИ.

ABSTRACT

Marchuck O.V., Levkivskiy S.A. Construction of a semi-analytic finite element method for analyzing the stress-strain state of sandwich composite arrays. Visnyk National Transport University. Series «Technical sciences». Scientific and Technical Collection. – Kyiv: National Transport University, 2018. – Issue 1 (40).

Calculation of layered composite arrays under conditions of axisymmetric bend approach has been suggested in the article.

The object of studying is static stress strain behavior of laminated composite arrays.

The aim of work is stress strain behavior investigation of laminated composite panel under the influence of local shearing stress load at different contour fittings.

Research method: stress behavior mathematical model of thick panel condition and it's implementing on the basis of polynomial approximate has been developed by the authors.

Within the framework of the spatial theory of elasticity an approach to the study of the stress-deformed state of thick composite panels is constructed. The approach is based on the separation of slabs in thickness by surfaces on a number of composite surfaces, thin enough to be neglected by changing their curvature in thickness. By satisfying the contact conditions on the outer surfaces between the composite surfaces of the panel, the stress-strain state of a given panel with a discrete account of the change in curvature by thickness is described. In the approach for approximating the desired functions in terms of coordinate X, polynomials are used, and a Fourier series is involved in the Y coordinate. The distribution of the desired functions in the thickness of the structure is based on the analytical solution of the corresponding system of differential equations. Investigations of the stress-strain state of a layered composite array under uniformly distributed normal load with different number of finite elements and the number of rows are carried out.

The results of the article can be used to calculate panels of composite material.

KEY WORDS: SANDWICH COMPOSITE PANEL, SEMIANALYTICAL METHOD OF FINITE ELEMENTS, LOCAL SHEARING STRESS LOAD, DIFFERENT CONTOUR STATES

РЕФЕРАТ

Марчук А.В. Построение полуаналитического метода конечных элементов для анализа напряженно-деформированного состояния слоистых композитных массивов / А.В. Марчук, С.А. Левковский // Вестник Национального транспортного университета. Серия «Технические науки». Научно-технический сборник. – К. : НТУ, 2018. – Вып. 1 (40).

В статье предложен подход к расчету слоистых композитных массивов в условиях осесимметричного изгиба.

Объект исследования - статическое напряженно-деформированное состояние слоистых композитных массивов.

Цель работы - исследование напряженно-деформированного состояния слоистых композитных пластин под действием локальных касательных нагрузок при различных условиях закрепления контура.

Метод исследования - разработанная авторами математическая модель напряженно-деформированного состояния толстых пластин и её реализация на основе полиномиальной аппроксимации.

В рамках пространственной теории упругости построен подход к исследованию напряженно-деформированного состояния толстых композитных пластин. Подход основан на разделении плиты по толщине поверхностями на ряд составляющих поверхностей, достаточно тонких, чтобы можно было пренебрегать изменением их кривизны по толщине. Удовлетворяя условиям контакта на наружных поверхностях между составляющими поверхностями плиты, описывается напряженно-деформированное состояние заданной плиты с дискретным учетом изменения кривизны по толщине. В подходе для аппроксимации искомых функций в плане по координате X используются полиномы, а по координате Y привлекается ряд Фурье. Распределение искомых функций по толщине конструкции находится на основе аналитического решения соответствующей системы дифференциальных уравнений. Проведенные исследования напряженно-деформированного состояния слоистого композитного массива под равномерно-распределенной нормальной нагрузкой при разном количестве конечных элементов и количестве рядов.

Результаты статьи могут быть использованы при расчете пластин из композитных материалов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: СЛОИСТАЯ КОМПОЗИТНАЯ ПЛИТА, ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ЛОКАЛЬНЫЕ КАСАТЕЛЬНЫЕ НАГРУЗКИ, РАЗНЫЕ КОНТУРНЫЕ УСЛОВИЯ.

АВТОРИ:

Марчук Олександр Васильович, доктор технічних наук, Національний транспортний університет, професор кафедри опору матеріалів і машинознавства, e-mail: ksm_ntu@ukr.net, тел. +380994256775, Україна, 01010, м. Київ, вул. М. Омеляновича-Павленка (Суворова), 1, к. 113., orcid.org/0000-0001-8374-7676.

Левківський Сергій Анатолійович, Національний транспортний університет, старший викладач кафедри дорожніх машин, e-mail: s.a.levkovsky@gmail.com, тел. +380978316547, Україна, 01010, м. Київ, вул. М. Омеляновича-Павленка (Суворова), 1, к. 226, orcid.org/0000-0003-1515-4240.

AUTHORS:

Marchuck Alexander V., D.Eng., National Transport University professor, Mechanical engineering and strength of materials department professor, e-mail: ksm_ntu@ukr.net, tel. +380994256775 Ukraine, 01010, Kiev, Mykhaila Omelianovycha-Pavlenka Str. 1, of. 113, orcid.org/0000-0001-8374-7676.

Levkivskiy Sergii A., National Transport University, Road vehicles department senior lecturer, e-mail: s.a.levkovsky@gmail.com, tel. +380978316547 Ukraine, 01010, Kiev, Mykhaila Omelianovycha-Pavlenka Str. 1, of. 226, orcid.org/0000-0003-1515-4240.

АВТОРЫ:

Марчук Александр Васильевич, доктор технических наук, Национальный транспортный университет, профессор кафедры сопротивления материалов и машиноведения, e-mail: ksm_ntu@ukr.net, тел. +380994256775, Украина, 01010, г. Киев, ул. М. Омеляновича-Павленка (Суворова), 1, к. 113, orcid.org/0000-0001-8374-7676.

Левковский Сергей Анатольевич, Национальный транспортный университет, старший преподаватель кафедры дорожных машин, e-mail: s.a.levkovsky@gmail.com, тел. +380978316547, Украина, 01010, г. Киев, ул. М. Омеляновича-Павленка (Суворова), 1, к. 226, orcid.org/0000-0003-1515-4240.

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Гайдайчук В.В., доктор технічних наук, професор, Київський національний університет будівництва і архітектури, професор, завідувач кафедрою теоретичної механіки, Київ, Україна.

Савенко В. Я., доктор технічних наук, професор, Національний транспортний університет, професор, завідувач кафедрою транспортного будівництва та управління майном, Київ, Україна.

REVIEWERS:

Gaidaichuk V.V., D.Eng., Kyiv National University of Construction and Architecture professor, Theoretical mechanics department head professor, Kiev, Ukraine.

Savenko, V.Ya, D.Eng., National Transport University professor, Transport Construction and Property Management department head professor, Kiev, Ukraine.