УДК 551.24:528.2/3

Тадєєв О. А., к.т.н., доцент (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

ОСОБЛИВОСТІ ТЕКТОНОФІЗИЧНОЇ ІНТЕРПРЕТАЦІЇ ГЕОДЕЗИЧНИХ ДАНИХ В ГЕОДИНАМІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Розглянуті тектонофізичні аспекти інтерпретації геодезичних даних в геодинамічних дослідженнях. Розкрито перспективи методу скінченних елементів і деякі оптимізаційні рішення.

Ключові слова: суцільне середовище, деформації, геодезичні мережі.

Постановка проблеми. Задачі пізнання сучасних геологічних процесів і закономірностей розвитку структур земної кори висунули до числа актуальних напрямів геолого-геофізичних та геодинамічних досліджень проблему сучасного деформованого стану земної кори та її фізичної поверхні. Актуальність подібних досліджень обумовлена ще й тим, що інтенсивність і характер деформації верхніх горизонтів земної кори прямо пов'язані з перебігом тектонічних, сейсмічних, магматичних, гідрогеологічних та інших процесів.

Основним результатом геодезичного моніторингу геодинамічних процесів є складання карт векторів і швидкостей руху земної поверхні. З одного боку, такі результати забезпечують наочність і чисельне вираження рухів геологічних структур, з іншого – є підставою визнати їх фізичними. Разом з тим при інтерпретації геодезичних даних визначальним повинен бути принцип інваріантності – величини та різні співвідношення, які мають геометричний чи фізичний зміст, не повинні залежати від вибору системи координат, її початку або переносу. В зв’язку з цим впродовж останніх десятиліть при опрацюванні та інтерпретації геодезичних даних широкого застосування набув метод скінченних елементів. Він забезпечує описування деформованого стану земної поверхні, виходячи з принципу інваріантності.

Аналіз останніх досліджень. Метод скінченних елементів ґрунтується на класичній теорії лінійної деформації суцільного середовища [4]. У розрізі поставленої проблеми метод вперше використали японські вчені для інтерпретації результатів повторних спостережень мережі тріангуляції після землетрусу Канто-Токай у 1929 р. [7, 8]. На пострадянських теренах метод масово застосовується з 1979 р. завдяки науковим напрацюванням М. П. Єсікова [2]. З тих пір метод набув різного роду видозмін, які стосуються, здебільшого, розширення можливостей використання методу при опрацюванні різних вихідних даних, зокрема, не лише координат пунктів, а й прямих результатів вимірів. Серед вітчизняних досліджень потрібно виділити теоретичні розробки та деякі практичні результати, які зведено до роботи [1].

Постановка завдання. Метою роботи є аналіз аспектів інтерпретації геодезичних даних у рамках методу скінченних елементів, встановлення умов, які понижують її інформативність і спричинюють формальні наслідки, а також обґрунтування оптимізаційних рішень за таких умов.

Виклад основного матеріалу. Суцільне середовище є спрощеною моделлю фізичних тіл, яка передбачає неперервність розподілу речовини у нескінченно малому об’ємі. Гранично, якщо об’єм прямує до точки, маємо матеріальну частинку суцільного середовища з його середніми фізико-механічними властивостями, яка є точкою простору і змінює своє положення внаслідок деформації. Тож така матеріальна частинка наділена одночасно властивостями точки і тіла. Це дозволяє математично описати деформації фізичних тіл. Рух і деформації таких нескінченно малих об’ємів у рамках описаної моделі описуються методами механіки суцільного середовища [4].

Теорія лінійної деформації полягає в тому, що градієнти складових руху приймаються настільки малими, що можна нехтувати похідними їх переміщень

$$u_{ij} = \lim_{|\Delta l| \to 0} \frac{\Delta u_i}{\Delta l_j}, \tag{1}$$

де $|\Delta l|$ – відстань між точками тіла; Δu – їх відносне переміщення. Елементарні об’єми, прийняті за нескінченно малі, мають бути й достатньо великими, настільки, щоб при зменшенні $|\Delta l|$ відношення $\frac{\Delta u_i}{\Delta l_j}$ змінювалось несуттєво і такою зміною можна було нехтувати.

Тоді порядок відстані визначає величину елементарного об’єму і його середню лінійну деформацію. За таких умов деформація є однорідною – площини і прямі залишаються такими ж після деформації, а просторові фігури, які вони утворюють, зберігають свою геометричну подібність. Однорідна деформація постійна для усіх точок об’єму у визначеному напрямі. Деформацію елементарного тіла довільної геометричної форми повністю визначають переміщення його вершин. Вони утворюють векторне поле і є функціями координат вершин. Такі функції лінійні, якщо деформація однорідна. Уніфікованим носієм інформації про однорідну лінійну деформацію тіла скінченних геометричних розмірів є тензор деформації – фізичний та геометричний об'єкт, сформований сукупністю коефіцієнтів лінійного перетворення загального вигляду

$$\bar{u} = f(\bar{l}_i) = \sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i \bar{l}_i \,, \tag{2}$$

де $\bar{u}$ – вектор переміщення окремої вершини; $\bar{l}_i$ – осі ортонормованого базису $(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \cdots, \bar{l}_n)$ евклідового простору L_n; $\bar{u}_i$ – скалярні складові вектора у цьому базисі. Наприклад, якщо розглядати вектор $\bar{u}$ в просторі L_2 з базисом $(\bar{l}_1, \bar{l}_2)$, то маємо лінійне перетворення

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_1 &= e_{11} l_1 + e_{12} l_2 \\ \bar{u}_2 &= e_{21} l_1 + e_{22} l_2 \end{aligned}\right\} , \tag{3}$$

сукупність коефіцієнтів якого формує матрицю другого порядку (e_{ij}), яка є тензором другого рангу на площині і називається тензором деформації.

Тензор як математичний об'єкт існує незалежно від системи координат. Його компоненти можуть мати різні значення у різних системах. Але якщо вони задані у одній системі, то будуть визначені і в будь-якій іншій, оскільки визначення цього об'єкту містить у собі закон перетворення його компонент. Крім того, тензор можна сформувати не лише для лінійного перетворення, а й для білінійних чи інших нелінійних форм. Тоді необхідне розширення умови (1) і залучення числових методів. Використання тензорного аналізу для описування деформації суцільного середовища забезпечує розділення ефектів, які належать до його геометричних форм, від ефектів, які зумовлені випадковим вибором координатних систем. Така властивість тензору визначає собою принцип інваріантності [6].

Згідно принципу Коши-Гельмгольца, будь-які переміщення чи деформації суцільного середовища можна розглядати з трьох позицій: паралельне перенесення, чиста деформація і обертання. Тензор деформації описує одночасно чисту деформацію і обертання. Інформацію про чисту деформацію, тобто зміну метричних властивостей, містить симетрична складова частина тензора (a_{ij}), а обертання елемента середовища як абсолютно твердого тіла виражає кососиметрична складова (ω_{ij}). Разом $(a_{ij}) + (\omega_{ij}) = (e_{ij})$. Компоненти цих складових виражають співвідношення такого вигляду: $a_{ij} = \dfrac{e_{ij} + e_{ji}}{2}$; $\omega_{ij} = \dfrac{e_{ij} - e_{ji}}{2}$.

Діагональні компоненти симетричного тензора (a_{ij}) виражають відносні розширення $a_{ii} = e_{ii} = \dfrac{d\overline{u}_i}{dl_i}$ $(i = \overrightarrow{1,n})$. Це незалежні деформації вздовж головних осей тензору в ортонормованому базисі простору L_n. Їх сукупність складає ізотропну частину тензора і сумою визначає відносну зміну об'єму

$$\sum_{i=1}^{n} e_{ii} = \frac{\Delta V}{V} = \theta . \tag{4}$$

Величина θ називається об'ємною дилатацією або дивергенцією. Наприклад, у просторі L_2 дилатація

$$\theta = e_{11} + e_{22} . \tag{5}$$

Інші, недіагональні, компоненти тензора (a_{ij}) складають його девіаторну частину і визначають головні значення деформації, які називають зсувовими. Наприклад, у тому ж просторі L_2 вони виражають такі характеристики:

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_1 = e_{11} - e_{22}; \quad \gamma_2 = e_{12} + e_{21}; \quad \gamma_m = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}; \quad \rho = \frac{e_{11} + e_{22}}{2}; \\ &E_1 = \rho + \frac{\gamma_m}{2}; \quad E_2 = \rho - \frac{\gamma_m}{2}; \quad \varphi = \frac{1}{2} arctg \frac{\gamma_2}{\gamma_1}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

E_1, E_2 та ρ – відповідно максимальне, мінімальне та середнє розширення. γ_m – максимальний зсув, а γ_1 та γ_2 – його компоненти. φ – напрям дії максимального розширення E_1 відносно початкової координатної осі. Його називають головною віссю деформації.

Поділ симетричного тензора на ізотропну та девіаторну частини має вирішальне значення при встановленні зв'язку між деформованим та напруженим станом середовища. Його описує математична теорія пружності.

Кососиметричний тензор (ω_{ij}) характеризує обертання елемента середовища в площинах прийнятого координатного простору як абсолютно твердого тіла. Так, у просторі L_2 величина кута повороту тіла навколо нормалі до площини $(\bar{l}_1, \bar{l}_2)$ у точці центру ваги

$$\omega = \frac{e_{12} - e_{21}}{2}. \tag{7}$$

Згідно класичної теорії, суцільне середовище вивчають шляхом встановлення співвідношень середніх значень величин, пов'язаних з його нескінченно малими елементами. За умови нескінченного зменшення розмірів таких елементів і збільшення їх числа, такі співвідношення зумовлюють системи диференційних чи інтегральних рівнянь, які описують стан середовища в цілому. Оскільки це елементи скінченних розмірів, то можна вважати, що середовище апроксимується певною дискретною моделлю. Тут найчастіше залучають метод скінченних елементів – систематичний спосіб апроксимації неперервної функції дискретною моделлю, яка є множиною значень функції у деякому скінченному числі точок області її визначення сумісно з кусковим представленням цієї функції на скінченному числі підобластей. Такі підобласті називаються скінченними елементами. Побудова скінченно-елементної моделі потрібної функції передбачає виконання таких дій: 1) у області визначення функції фіксують скінченне число точок, в яких визначатимуться значення функції. Вибрані точки називаються вузлами; 2) область визначення функції представляють сукупністю підобластей, які не перетинаються. Моделлю області визначення функції стає сукупність скінченних елементів, пов'язаних між собою вузлами на спільних межах; 3) потрібну функцію апроксимують на кожному скінченному елементі і визначають її значення у вузлових точках.

Найпростішими з усіх скінченних елементів є симплексні моделі. Симплексом в *n*-вимірному просторі називається випукла множина *n*+1 вершин, які не лежать в одній (*n*-1)-вимірній гіперплощині. Так, у тривимірному просторі L_3 симплексом є тетраедр, на площині L_2 – трикутник, а в одновимірному просторі L_1 – відрізок прямої. При симплексному представленні однорідні локальні поля переміщень вершин апроксимують лінійними функціями їх координат, а відповідні тензори деформації відносять до геометричних центрів симплексів.

Кускова апроксимація функції на скінченних елементах зумовлює можливість розглядати їх незалежно один від одного. З іншого боку, сполучення вершин сусідніх елементів забезпечує неперервність і сумісність переміщень, а отже, і деформації, на спільній межі цих елементів.

Розкриті вище елементи загальної теорії деформації суцільного середовища застосовуються в умовах земної кори. Загальна теорія деформації розроблена безвідносно до властивостей середовища, вона є виключно геометричною теорією. Єдиною необхідною умовою є неперервність і сумісність деформації. Тож якщо припустити, що верхні горизонти земної кори деформуються, то потрібно брати до уваги, що в ній не виникають порушення суцільності, а точки, які в початковому стані були суміжними, залишаються такими і після деформації. За таких умов під деформацією кори розуміють зміну форми і об’єму її структур.

Приймаючи суцільне середовище моделлю реальних геологічних структур, потрібно враховувати, що його скінченні елементи є фізично малими величинами, які повинні бути представницькими. Їх властивості не повинні залежати від розмірів елементів. Надмірним зменшенням розмірів елементів в умовах земної кори будуть виявлені локальні деформації, обумовлені екзогенними процесами, а загальні регіональні закономірності будуть знівельовані. Протилежний результат забезпечать розміри елементів великого порядку. Тож вибір розмірів скінченних елементів має принципове значення. В такій ситуації рішення потрібно приймати, виходячи з таких міркувань: 1) виходячи із змісту поставленого завдання у розрізі детальності досліджень. Тут потрібно брати до уваги, що деформації поверхні у межах значних за масштабами скінченних елементів не завжди відповідатимуть канонам лінійної теорії; 2) за умови попереднього планування робіт розміри і геометричні форми скінченних елементів потрібно встановлювати, виходячи з умови однорідності деформації (1). Отже, перевірка однорідності деформації повинна бути обов’язковою умовою і підставою лінійної апроксимації у межах скінченного елемента. Вибір скінченним елементом симплексу як найпростішої моделі не завжди себе виправдовує. Тоді потрібно залучати складніші форми скінченних елементів або збільшувати густоту дискретності інформації про переміщення поверхні у межах симплексу.

Геодезичні способи моніторингу геодинамічних процесів наклали свій відбиток на вибір скінченних елементів. Здебільшого це стосується аналізу повторних спостережень державних геодезичних мереж, побудованих методами тріангуляції та трилатерації. З точки зору вибору геометричних форм скінченних елементів, то такі мережі цілком відповідають критеріям симплексної моделі – основною геометричною фігурою таких мереж є трикутник. Стосовно ж розмірів трикутників є явні невідповідності. Адже державні мережі створюються з метою задоволення практичних потреб координування та картографування територій з відстанями між пунктами згідно чинних тут нормативів. Такі нормативи несумісні з критеріями фізично малих елементів і не враховують особливості геологічної і тектонічної будови верхніх горизонтів земної кори. Виняток складають спеціальні мережі на геодинамічних полігонах, створені з метою спостережень за динамікою окремих геологічних чи тектонічних структур.

Наслідки застосування методу скінченних елементів для тектонофізичної інтерпретації результатів спостережень геодезичних мереж довели його достатню інформативність. Разом з тим мають місце окремі недоліки, які за граничних умов формалізують результати опрацювання вихідних даних. Вони спричинені обставинами практичного втілення методу і їх невідповідністю теоретичним засадам, котрі розкриті вище. Ці недоліки, а заодно й шляхи їх ліквідації, можна сформулювати наступним чином.

1. Специфіка геодезичних способів реєстрації переміщень земної поверхні зумовлює дискретність такої інформації. Надмірне згущення пунктів не завжди доцільне з двох причин – відсутність апріорної інформації про характер деформації і висока вартість прецизійних геодезичних робіт. Внаслідок цього здебільшого маємо безсистемне, з точки зору умов лінійної теорії деформації, розміщення геодезичних пунктів. З метою наступного опрацювання результатів спостережень за цими пунктами земна поверхня поділяється на симплекси. Це породжує першу проблему, суть якої полягає у невідповідності утворених симплексів теоретичним засадам методу скінченних елементів. Якщо маємо справу з суцільними геодезичними мережами у вигляді ланцюжків трикутників або центральних систем, то вибір скінченних елементів, хоча й необґрунтований, але однозначний. Однак навіть така однозначність відсутня при аналізі спостережень, наприклад, у геодезичному чотирикутнику або на перманентних супутникових станціях. Однозначного принципу поділу земної поверхні на симплекси у таких ситуаціях не існує.

2. В умовах довільно встановленого симплексу лінійна модель деформації безґрунтовна. Цей недолік є наслідком першого, але сформульований окремо з таких міркувань. Застосування лінійної моделі передбачає істинність гіпотези локально-однорідної деформації. Гіпотезу потрібно підтвердити, тоді окреслена раніше проблема відпадає, або

відхилити. У цьому випадку постає невідповідність умові (1) лінійної теорії деформації і виникає друга проблема. Вона зводиться до необхідності вираження нелінійного закону деформації. Вирішення цієї проблеми у рамках симплексної моделі скінченних елементів можливе виключно за умови

$$k \leq n, \tag{8}$$

де k – число невідомих коефіцієнтів функції, яка виражає закон деформації; n – число вершин симплексу. Число функцій, котрі задовольняють умові (8), дуже обмежене. Це посвідчує недосконалість симплексної моделі і зумовлює необхідність застосування складніших моделей скінченних елементів, які б задовольняли такій умові. Вони повинні відповідати будь-якому класу функцій, які б з точки зору встановленого критерію виражали закон деформації (у тому числі лінійний за умови однорідної деформації).

Отже, з метою вирішення обох означених проблем необхідною умовою і складовою частиною рішення завдання повинна бути перевірка гіпотези однорідності поля деформації. Її результати повинні бути визначальними при встановленні геометричних форм і розмірів скінченних елементів. Одне з можливих рішень цих проблем у просторі L_2 висвітлено у роботі [3].

3. У класичній постановці завдання компоненти тензору деформації визначають аналітичним способом за переміщеннями мінімально необхідного числа вершин скінченного елемента. Переміщення пунктів, які окреслюють скінченний елемент, обтяжені неминучими помилками геодезичних вимірів. Порядок помилок змінюється залежно від класу мережі, але навіть з результатами найвищого класу точності не вдасться уникнути помилок параметрів деформації. Це зумовлює третю проблему, яка полягає у встановленні надійності, а у підсумку, й репрезентативності, параметрів деформації. Формально точність параметрів деформації можна оцінити середніми квадратичними помилками, виходячи з того, що вони виражаються аналітично як функції координат геодезичних пунктів, наприклад, як це реалізовано у роботі [2]. Але така постановка задачі не вирішує проблему надійності. Згідно теорії помилок вимірів, опрацювання їх результатів має здійснюватись за обов’язкової умови, котра передбачає наявність додаткових виміряних величин. Ця умова підвищує надійність кінцевих результатів опрацювання і забезпечує оцінку їх точності за чіткими усталеними критеріями. Але з іншого боку, вона не гарантує аналітичного рішення і потребує залучення числових методів. Надійність результатів опрацювання визначає принцип найменших квадратів [5]. Класичне аналітичне рі-

шення завдання методом скінченних елементів таку обставину не враховує – модель лінійної деформації у рамках симплексу передбачає рівність числа коефіцієнтів лінійної функції і числа вершин симплексу. З геодезичної точки зору, таке завдання відносять до розряду некоректно поставлених задач. Тому для вирішення проблеми надійності потрібно забезпечити строге виконання умови (8): $k < n$. Практично це зводиться до встановлення оптимальних геометричних форм скінченних елементів з числом вершин, яке забезпечить емпіричне встановлення закону деформації апроксимацією функцій способом найменших квадратів.

Висновки. У роботі розглянуто аспекти інтерпретації геодезичних спостережень геодинамічних процесів методом скінченних елементів. Розкрито теоретичні основи методу і умови його практичного втілення. Виходячи з цього, виділено проблеми, вирішення яких забезпечить вдосконалення методу в напрямі підвищення інформативності та надійності кінцевих результатів. Запропоновано відповідні оптимізаційні рішення.

1. Дослідження гравітаційного поля, топографії океану та рухів земної кори в регіоні Антарктики / О. М. Марченко, К. Р. Третяк, А. Я. Кульчицький, Ю. І. Голубінка, Д. О. Марченко, Н. П. Третяк / за заг. ред. О. М. Марченка та К. Р. Третяка. – Львів : Львівська політехніка, 2012. – 308 с. **2.** Есиков Н. П. Тектонофизические аспекты анализа современных движений земной поверхности / Н. П. Есиков. – Новосибирск : Наука, 1979. – 173 с. **3**. Киричук В. В. Об одной методике определения характеристик деформации земной коры по геодезическим данным. / В. В. Киричук, А. А. Тадеев // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. Респ. межвед. науч.-техн. сб.– Львов: Вища школа, 1986. – Вып. 43. – С. 31-38. **4.** Ландау Л. Д. Механика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Гостехиздат, 1953. – 788 с. **5.** Мазмишвили А. И. Способ наименьших квадратов / А. И. Мазмишвили. – М. : Недра, 1968. – 440 с. **6.** Мак-Коннел А. Д. Введение в тензорный анализ / А. Д. Мак-Коннел. – М. : Физматгиз, 1963. – 411 с. **7.** Terada T. Deformation of the earth crust in Kwansai districts and its relation to the orographic feature / T. Terada, N. Miyabe // Bull. Earthquake Res. Inst. – Univ. Tokyo, 1929. – № 7. – Pp. 223-239. **8.** Tsuboi C. Investigation on the deformation of the earths crust found by precise geodetic means / C. Tsuboi // Japan J. Astron. and Geophys. – 1933. – № 10. – Pp. 93-248.

Рецензент: д.т.н., професор Черняга П. Г. (НУВГП)