

УДК 621.22:532.542

Тимошук В. С., аспірант (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

## ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РОЗРАХУНКІВ ХВИЛЬ ПЕРЕМІЩЕННЯ У ВЕРХНІХ ВОДОЙМАХ ГАЕС

**В статті розглянуті методики чисельного моделювання для визначення відміток вільної поверхні та поля швидкостей верхнього басейну при роботі ГАЕС. Обґрунтована доцільність використання даних методик.**

**Ключові слова:** чисельне моделювання, швидкість, ГАЕС.

Верхні водойми гідроакумуючих електростанцій мають два характерні режими роботи: насосний (наповнення верхньої водойми в період провалу графіка навантаження енергосистеми) та турбінний (спрацювання водойми в період піків навантаження). Специфічною особливістю роботи водойм ГАЕС, в порівнянні з водосховищами ГЕС, є більш напружений режим використання внаслідок регулярної періодичної зміни основних гідрофізичних полів (рівень поверхні та швидкість течії) при зміні режимів роботи. Тому, як на етапі проектування об'єкту, так і на етапах його будівництва та експлуатації дуже важливим є розуміння динаміки процесів, що відбуваються в водоймі, особливо їх критичних режимів з можливими катастрофічними наслідками: переповнення водойми, перелив води через огороджувальні дамби внаслідок хвильових процесів, розмив дна і т.п.

Основною задачею комп'ютерного моделювання є визначення відміток вільної поверхні та поля швидкостей. Визначення вказаних полів виконується в ході сценаріїв розрахунків, що ілюструють різні режими роботи ГАЕС з врахуванням варіювання основних параметрів енергетичних установок, а також зміна геометрії водойми, пов'язана з вибором в ході проектування оптимальних форм огороджувальних конструкцій та рельєфу дна[1].

Даною проблемою займалися: Беликов В.В., Чугаєв Р.Р., Хом'як Р.В., Давлетшин В.Х., Барахнин В.Б [2-5] та інші, які створили методики розрахунків, використовуючи результати модельних досліджень, та намагалися в певному наближенні чисельно розв'язати рівняння Сен-Венана.

**Метою даної статті** є представлення та порівняння математичних моделей для розрахунку кривих вільної поверхні потоку, зокрема хвиль переміщення, у верхніх водоймах ГАЕС при їх роботі.

**Методики чисельних розрахунків** обрисів вільної поверхні потоку ґрунтовані на вирішенні одновимірних та двохвимірних рівнянь Сен-Венана, трьохвимірних рівнянь Рейнольдса в гідростатичному наближенні. При вирішенні задачі використовуються також оригінальні числові алгоритми, адаптаційні три- та чотирикутні сітки, а також гібридне моделювання. Розглядувана задача є дуже складною, оскільки потрібно враховувати параметри працюючих агрегатів, глибини і конфігурацію конкретної водойми, велику кількість інших діючих факторів і поправочних коефіцієнтів.

Вибір математичної моделі для опису конкретного фізичного явища потребує попереднього аналізу та врахування характерних параметрів цього явища та виявлення пріоритетного значення їх. Відношення характеристик розмірів водосховища дає можливість вивчати гідрофізичні процеси в ньому у термінах теорії мілкої води, рівняння якої мають вигляд [1,5]:

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vv_y + g\eta_x = f_1, \\ v_t + uv_x + vv_y + g\eta_y = f_2, \\ \eta_t + (uh)_x + (vh)_{y_x} = f_3, \end{cases} \quad (1)$$

де  $u, v$  – компоненти горизонтальної швидкості,  $h=H+\eta$  – повна глибина,  $H$  – глибина незбуреного шару рідини,  $\eta$  – зміщення вільної поверхні,  $g$  – прискорення вільного падіння,  $f_i$  – значення, що описують дію зовнішніх факторів (сили Коріоліса, донного та вітрового тертя) і знаходяться за формулами:

$$\begin{aligned} f_1 &= lv - g \frac{u\sqrt{u^2 + v^2}}{C^2 h} + v(u_{xx} + u_{yy}) + f^{(x)}, \\ f_2 &= -lu - g \frac{u\sqrt{u^2 + v^2}}{C^2 h} + v(v_{xx} + v_{yy}) + f^{(y)}, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $l = 2\omega \sin \varphi$  – кутова швидкість обертання Землі,  $\varphi$  – географічна широта,  $C$  – коефіцієнт Шезі, що визначається за формулою Майнінга  $C = \frac{R^{1/6}}{n}$ ,  $R$  – гідравлічний радіус, який приймається для відкритого

широкого русла рівним глибині  $H$ ,  $f^{(x)}$ ,  $f^{(y)}$  – додатки, що враховують ефекти вітрового тертя на вільній поверхні,  $f_3$  – права частина рівняння нерозривності, що відповідає за зовнішнє джерело маси.

Також існують інші форми запису цих рівнянь, які частіше використовують при розв'язку задач, що пов'язані з розрахунком полів розриву (хвиль прориву).

Бокова границя  $\Gamma(t)$  області водойми  $\Omega(t)$  складається з двох частин, одна з яких відповідає водоприймачу  $\Gamma_1(t)$ , і на цій ділянці задається витрата  $Q(t)$ , що залежить від часу, коли працює певна кількість агрегатів, а друга  $\Gamma_2(t)$  – відповідає огорожувальній дамбі. В залежності від детальності моделювання границя  $\Gamma_2(t)$  може описуватись як вертикальною, так і нахиленою під кутом поверхнею, тоді можна розглядати розв'язок в області з нерухомою межею, що рухається з швидкістю, рівній швидкості частинок рідини біля неї і на цій межі створюється умова рівності нулю повної глибини.

Геометрія верхньої водойми ГАЕС характеризується значним перевищенням її горизонтальних розмірів над вертикальними, витягнутість вздовж одного із горизонтальних напрямків, малими змінами поля глибин. Також важливим параметром розрахунків є час процесу, який задається тривалістю наповнення та спрацювання водойми.

Витягнутість водойми дозволяє на попередньому етапі проводити розрахунки за одновимірною моделлю Сен-Венана, яка має більш високий ступінь ієрархії наближених гідравлічних моделей і дозволяє в одновимірній постановці враховувати ефекти зміни ширини русла.

Умови, що накладаються на модель:

- поперечні складові швидкості малі в порівнянні з повздовжніми, відцентровий ефект, що створюється кривизною водосховища, не враховується;
- малий похил дна;
- сили опору, що вводяться в рівняння є в тому ж виді, як і для рівномірного руху; вважається, що сумарний вплив сил тертя і турбулентності можна врахувати у вигляді деякої сили опору.

За таких умов рівняння Сен-Венана набуде вигляду [1, 6]:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial \eta}{\partial x} + g \frac{Q|Q|}{C^2 AR} - vq \cos \varphi = 0, \\ \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q, \end{cases} \quad (3)$$

де  $A = \int_B h' dy$  – площа поперечного перерізу,  $Q = \int_B h' u dy = A\bar{u}$  – витрата,  $B$  – ширина живого перерізу русла,  $\alpha = \frac{A}{Q^2} \int_A u^2 dA$  – коефіцієнт розподілу швидкості (коефіцієнт Буссінеска).

В більш повній постановці, задачу можна розглядати в трьохвимірному вигляді потенціального руху ідеальної рідини з вільною поверхнею, яка в довільній системі координат зводиться до визначення потенціалу швидкості і функції, що описує вільну поверхню.

Одним із основних питань чисельних розрахунків вільної поверхні потоку у верхній водоймі ГАЕС є забезпечення швидкодії алгоритмів разом з їхньою високою точністю, що дозволяє адекватно проводити повільні процеси протягом довгого часу. У зв'язку з цим потрібно використовувати для апроксимації рівнянь та їх модифікацій неявні кінцево-різнцеві схеми на рухомих адаптивних сітках. Використання двовимірних неявних схем потребують використання підходів пов'язаних з методом розщеплення на ряд одномірних задач із збереженням переваг простоти реалізації. Найпопулярніші програми для виконання одновимірних розрахунків є HES-RAS, FLOW-3D, MIKE 11 та інші.

**HES-RAS** – це вбудована система програмного забезпечення, розроблена для діалогового використання в багатоплановій сфері [7]. Система складається з трьох одномірних гідравлічних компонентів аналізу для моделювання усталених водних поверхонь потоку, неусталеного потоку рідини, руху твердих частинок в потоці та розрахунків розмиву. Всі ці компоненти використовують загальне представлення даних у всіх гідравлічних та геометричних програмах моделювання. В основі розрахунку є вирішення рівняння Сен-Венана, де енергетичні втрати оцінюються тертям (рівняння Маннінга) та стисненням потоку. Можливі розрахунки ситуацій, де водний потік і його поверхня є швидкозмінною.

**FLOW-3D** – це CFD пакет загального призначення, який здатний моделювати велику різноманітність задач течії рідини і газу. Спеціалізацією пакету є моделювання течій з вільною поверхнею, використовуючи метод кінцевих об'ємів [8].

При більш детальній постановці в якості математичної моделі для опису планових течій водного потоку в акваторії водойми потрібно використовувати перше наближення теорії «мілкої води» в двовимірній системі координат. Відповідна система диференціальних двовимірних рівнянь Сен-Венана з врахуванням не горизонтальності дна та донного тертя має вигляд:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial Q_2}{\partial y}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q_1^2}{h} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{Q_1 Q_2}{h} \right) - gh \frac{\partial(h+Z)}{\partial x} + T_1, \quad (5)$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q_1 Q_2}{h} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{Q_2^2}{h} \right) - gh \frac{\partial(h+Z)}{\partial y} + T_2, \quad (6)$$

де:  $\partial$  – символ диференціювання;  $t$  – час;  $x, y$  – просторові координати;  $h$  – глибина води;  $Q_1, Q_2$  – витрати по осям  $x$  та  $y$ ;  $Z$  – відмітка дна;  $g$  – прискорення вільного падіння;  $T_1, T_2$  – донне тертя по осям  $x$  та  $y$ .

Донне тертя задається формулою:

$$T_i = gQ_i \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2} / (\bar{C} \times h)^2; \quad i = 1, 2; \quad (7)$$

де  $\bar{C}$  – коефіцієнт Шезі, який визначається за модифікованою формулою Майнінга

$$\bar{C} = \tilde{C} h^{1/6} / n, \quad (8)$$

$n$  – коефіцієнт шорсткості дна.

Коефіцієнт  $\tilde{C}$  визначається за формулою:

$$\tilde{C} = \begin{cases} 1, & 1 \text{ м} \leq h \\ 1/h, & 0,1 \text{ м} \leq h < 1 \text{ м} \\ 1/(10 \times h^2), & h < 0,1 \text{ м} \end{cases} \quad (9)$$

Модифікація (9) виконана з метою підвищення стійкості численного моделювання мілких ( $h < 1$  м) водойм.

В якості початкових умов для системи (4) – (6) задаються значення рівня  $H_0(x, y)$ , та вектору швидкості  $\vec{V}_0(x, y)$ ,  $\vec{V} = (u, v)$  в початковий

момент часу. Глибина  $h$  визначається через рівень  $H$  та відмітку дна  $Z$  за формулою:

$$h = H + Z, \quad (10)$$

а витрата  $\vec{Q} = (Q_1, Q_2)$  через глибину  $h$  і швидкість  $\vec{V}$  по залежності:

$$\vec{Q} = h \times \vec{V}. \quad (11)$$

На межі області, в якій виконується числове вирішення задачі, в процесі математичного моделювання ставиться умова не протікання:

$$\vec{V} \times \vec{n} = 0, \quad (12)$$

$\vec{n}$  – одиничний вектор зовнішньої нормалі до межі, що відповідає жорсткій стінці, або умова втікання – витікання рідини.

Інтегрування рівнянь (4) - (6) проводиться на ЕОМ по явній кінцево-різницевої схемі, в силу чого крок по часу в процесі розрахунку визначається з умови стійкості Куранта[2-6].

Для розрахунку на ЕОМ Новосибірським інститутом гідродинаміки був створений спеціальний алгоритм. Програма «DWM» призначена для розрахунку планових хвильових течій у каналах і водосховищах різної геометричної форми, з урахуванням нерівностей дна та донного тертя. Програма дозволяє достатньо ефективно проводити наскрізний розрахунок перервних хвиль, а також обтікання різних перешкод (наприклад, островів або гідротехнічних споруд), розташованих усередині водосховища. Найбільш ефективно використовувати дану програму при розрахунку швидкозмінних гідравлічних процесів (таких як поширення хвиль переміщення), в яких малий кроку за часом визначається високою швидкістю протікання самого фізичного процесу. Програму не слід використовувати для розрахунку повільно-мінливих течій (наприклад паводкових), характерний час яких перевищує 10 діб [9].

Основною перевагою даної програми над іншими є розрахунки двовимірної задачі, що збільшує точність отримуваних, але і збільшується час розрахунків, оскільки для побудови даної моделі потрібно більше вихідних даних та й розрахунок вимагає значних ресурсів ЕОМ для опрацювання алгоритму.

Таким чином в умовах інтенсивного будівництва ГАЕС **питання розрахунків хвиль переміщення та обрисів вільної поверхні потоку** у верхній водоймі і відповідному руслі при роботі цих станцій в насосному і турбінному режимах є досить актуальним, оскільки вони є орієнтиром для перевірки призначення відміток гребеня огорожуючих дамб та визначення висоти накопчення хвиль переміщення на укіс, щоб недопустити переливання води через гребінь дамб та забезпечити відповідну надійність гідротехнічних споруд. Використання даних мате-

матичних моделей дозволяє визначити утворювані хвилі переміщення при різних гідравлічних режимах роботи ГАЕС. Для підвищення надійності таких розрахунків та проектування відповідних споруд особливого значення набуває дослідження основних характеристик потоку в насосному і турбінному режимах роботи ГАЕС на діючих об'єктах в натурних умовах. Слід також зазначити їх важливість, оскільки вони є основним орієнтиром для підтвердження математичних моделей та їх перевірки.

1. Рябенко О. А., Тимошук В. С. Розрахунки неусталених режимів роботи верхнього басейну ГАЕС. // Вісник НУВГП. Випуск 2 (54). Технічні науки. – Рівне. – 2011. – С. 79-85. 2. Барахнин В. Б., Хакимзянов Г. С., Чубаров Л. Б., Шкуропацкий Д. А. Некоторые проблемы численного моделирования волновых режимов в огражденных акваториях.// Вычислительные технологии, 1996, – № 2, том. 1, – С. 3-26. 3. Давлетшин В. Х., Хом'як Р. В. Исследование гидравлического режима потоков в верхнем водохранилище Днестровской ГАЭС. //Гидроэнергетика Украины. – 2006, – № 3, – С. 24-29. 4. Беликов В. В., Ковалев С. В. Численные исследования при решении гидравлических задач. //Гидротехническое строительство. – 2009. – № 8, – С. 61-67. 5. Эббот М. Б. Численная гидравлика. Гидравлика открытого потока. – М. : Энергоатомиздат, 1983. – 272 с. 6. Чугаев Р. Р. Гидравлика: учебник для вузов. – 4-е изд. доп. и перераб. – Л. : Энергоиздат. Ленингр. отд-ние, 1982. – 672 с. 7. HEC-RAS Hydraulic Reference Manual Version 4.0//US Army Corps of Engineering, 2008, 746 p. 8. FLOW 3-D User manual v.9.3, Flow Science, 2008, 817 p. 9. Описание программы "DWM", предназначенной для расчета на ЭВМ плановых волновых течений в каналах и водохранилищах / Институт Гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Академии наук СССР, г. Новосибирск, 1987.

Рецензент: д.т.н., професор Рябенко О. А. (НУВГП)

---

**Tymoshchuk V. S., Post-graduate Student** (National University of Water Management and Nature Resources Use, Rivne)

### **THE USE OF MATHEMATICAL MODEL FOR CALCULATING MOVEMENT WAVES IN THE UPPER RESERVOIR HPP**

**The article discussed the methods of numerical simulations to determine the marks of the free surface and the area velocity of the upper reservoir in PSPP operation. Expedience of the use these methods.**

**Keywords: numerical simulation speed, HPP.**

---

**Тимошук В. С., аспирант** (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, Ровно)

### **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РАСЧЕТОВ ВОЛН ПЕРЕМЕЩЕНИЕ В ВЕРХНИХ ВОДОЕМАХ ГАЭС**

**В статье рассмотрены методики численного моделирования для определения отметок свободной поверхности и поля скоростей верхнего бассейна при работе ГАЭС. Обоснована целесообразность использования данных методик.**

**Ключевые слова: численное моделирование, скорость, ГАЭС.**

---