УДК 628.16

Куницький С. О., аспірант (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

ЗАСТОСУВАННЯ ПОВНОГО ФАКТОРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ДО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ЗНЕЗАЛІЗНЕННЯ ВОДИ НА ПІНОПОЛІСТИРОЛЬНИХ ФІЛЬТРАХ З ПОВНОЮ ПРОМИВКОЮ ЗАСИПКИ

Наведено математичну модель зростання втрат напору в фільтруючій пінополістирольній засипці. Запропоновано формулу для прогнозування втрат напору у зернистій засипці.
Ключові слова: втрати напору, дисперсія, повний факторний експеремент.

Математичне планування експерименту – це процедура вибору кількості та умов постановки дослідів необхідних і достатніх для вирішення поставленої задачі з потрібною точністю [1-5].

В плануванні експерименту сам експеримент розглядають як об’єкт дослідження та оптимізації. Теорія планування експерименту розробляє різні типи планів, які виключають сліпий пошук під час досліджень, скорочують число необхідних дослідів і дають можливість побудувати модель системи.

Перевагою методу планування експерименту є його універсальність та придатність використання для вирішення широкого кола завдань [3, 4]. Залежно від того якими, кількісними чи якісними, є чинники будують різні моделі систем і використовують різні типи планів експерименту. При кількісних чинниках модель системи доцільно будувати на основі регресійного аналізу із використанням плану повного факторного експеременту. Якщо відгук системи є кількісним і всі чинники, від яких він залежить, також кількісні, то використовують регресійну модель для опису системи.

У переважній більшості випадків використовують регресійні моделі поліноміального типу, тобто залежність відгуку від рівнів чинників представляють у вигляді поліному.

Коефіцієнти поліноміальної моделі безпосередньо показують ступінь впливу на величину відгуку. Завдання планування експерименту зводиться до вибору умов проведення дослідів, їх кількості з тим, щоб одержати якомога точнішу регресійну модель, яка адекватно описує систему. Регресійна модель, яка описує складні функції відгуку, може бути одержана шляхом розкладу функції розкладу в степеневий ряд.

При повному факторному експерименті рівняння регресії приймає вигляд поліному першого степеня. Математична залежність для ПФЕ типу 2^3 згідно [3] буде мати наступний вигляд:

$$y(x_1,...,x_k)=b_0+\sum_{i=1}^{k}b_i\cdot x_i+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}b_{ij}\cdot x_i\cdot x_j+...+\sum_{\substack{i,j,...,n=1\\ i\neq j\neq...\neq n}}b_{ijn}\cdot x_i\cdot x_j\cdot...\cdot x_n, \qquad (1)$$

де b_0 – вільний член;

b_i – лінійні ефекти;

b_{ij} – ефекти парної взаємодії;

b_{ijn} – ефекти потрійної взаємодії.

Варто відмітити, що степінь точності математичної моделі визначається діапазоном зміни факторів: для кожного i-ого фактору встановлюється z_i^0 – основний рівень фактору; $z_{i\,max}$, $z_{i\,min}$ – верхній та нижній рівні i-ого фактору, які приймаються під час дослідів; Δz_1 – інтервал варіювання.

Знаючи $z_i^{\max}$, $z_i^{\min}$ значення фактору, можна визначити координати центру плану, так званий основний рівень z_i^0, а також інтервал варіювання Δz_i.

$$z_i^0=\frac{z_i^{\max}+z_i^{\min}}{2}, \text{ де i = 1,2,3 … k.} \qquad (2)$$

При проведенні експериментів використовуються кодовані значення рівнів факторів. При цьому основний рівень приймається рівним нулю, верхній +1, нижній -1. Кодування здійснюється за формулою

$$\Delta z_i=\frac{z_i^{\max}+z_i^{\min}}{2}, \text{ де i = 1,2,3 … k .} \qquad (3)$$

Від систем координат $z_1,…, z_k$ необхідно перейти до нової безрозмірної системи координат $x_1, …, x_k$ за допомогою лінійного перетворення

$$x_i=\frac{z_i+z_i^0}{\Delta z_i}, \text{ де i = 1,2,3 … k.} \qquad (4)$$

На основі повного факторного експерименту розраховуються коефіцієнти регресії за формулами:

$$b_0=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}y_1; \qquad (5)$$

$$b_i=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_y y_1; \qquad (6)$$

$$b_{\ln} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_y x_{in} y_i \quad (\text{де } l \neq n). \tag{7}$$

Для встановлення значень коефіцієнтів треба, перш за все, розрахувати оцінку дисперсії, з якої вони визначаються:

$$S_b^2 = \frac{S_y^2}{m}. \tag{8}$$

Варто відмітити, що з допомогою коефіцієнтів повного факторного експерименту всі коефіцієнти визначаються з однаковою похибкою.

Прийнято вважати, що коефіцієнт регресії є важливим, якщо виконується умова

$$|b| \geq S_b t, \tag{9}$$

де t – значення критерію Стьюдента [2-4].

Отримавши рівняння регресії, потрібно перевірити його адекватність, тобто значення похибки апроксимації.

Для встановлення адекватності потрібно розрахувати експериментальне значення критерію Фішера – F_p і порівняти його з теоретичним F_m, яке приймається при потрібної довіреної вірогідності Р = 0,95 згідно [2, 3].

Критерій Фішера являє собою наступне відношення

$$F_p = \frac{\max(S_{ад}^2, S_y^2)}{\min(S_{ад}^2, S_y^2)}, \tag{10}$$

де $S_{ад}^2$ – оцінка дисперсії адекватності.

Оцінку дисперсії адекватності слід вираховувати за формулою

$$S_{ад}^2 = \frac{1}{m-B}\sum_{i=1}^{m}(y_i^e - y_i^p)^2, \tag{11}$$

де m – кількість дослідів повного факторного експерименту;
B – кількість коефіцієнтів регресії, включаючи b вільний член;
y_i^e та y_i^p – експериментальне і розрахункове значення функції відгуку в i-ому досліді.

З оцінкою адекватності пов`язано число степенів свободи

$$f_{ад} = m - B. \tag{12}$$

Рівняння регресії є адекватним, якщо виконується умова

$$F_p \leq F_T. \tag{13}$$

Функціональна залежність функції відгуку у загальному вигляді має вигляд:

$$Y = f(X_1, X_2, X_3). \tag{14}$$

Такий математичний апарат (1-14) експерименту описує варіювання трьох факторів на двох рівнях. Тому постановка за таким планом називається повним факторним експерементом типу 2^3. Рівні фактори представляють собою границі досліджуваної області за даним параметром.

Даний метод доцільно використати в питаннях знезалізнення води для прогнозування зростання втрат напору впродовж певного часу роботи фільтрів.

Експериментальні дослідження процесу знезалізнення води проводилися на лабораторній установці з використання модельного розчину. Як фільтруючий матеріал фільтра використовувалася зерниста засипка еквівалентним діаметром 2,8 мм.

В якості контрольованих параметрів для моделювання процесу знезалізнення води можна використати вхідну концентрацію заліза $C_{вх}$, швидкість фільтрування $V_ф$ та тривалість фільтроциклу $T_ф$. В якості неконтрольованого досліджуваного параметру (функції відгуку) є втрати напору у фільтруючій засипці H [6, 7, 8].

Для виявлення статистичної взаємодії вищезгаданих чинників було проведено ряд фільтроциклів тривалістю 8 год з різною вхідною концентрацією заліза у модельному розчині (1.0…2,0 мг/дм^3). Дослідження втрат напору проводилося в діапазоні швидкостей фільтрування від 4 до 7 м/год. Показник величини втрат напору знімався тричі під час кожного фільтроциклу.

Функціональна залежність зростання втрат напору у натуральному вигляді:

$$H = f\left(C_{вх}, V_ф, T_ф\right). \qquad (15)$$

Таким чином, в якості основних факторів в натуральній величині, які впливають на зростання втрат напору у фільтруючій засипці під час процесу знезалізненя води, були обрані наступні комбінації факторів:

Z_1 – вхідна концентрація заліза, $C_{вх}$, мг/л, ($C_{вх}$ = 1…2 мг/дм^3);

Z_2 – швидкість фільтрування, $V_ф$, м/год, ($v_ф$ = 4…7 м/год);

Z_3 – тривалість фільтроциклу, $T_ф$, год, ($T_ф$ = 0,0…8,0 год);

$$z_1^0 = \frac{z_{\max} + z_{\min}}{2} = \frac{2,0 + 1,0}{2} = 1,5;$$

$$\Delta z_1 = z_{\max} - z_1^0 = 2 - 1,5 = 0,5;$$

$$z_2^0 = \frac{7,0 + 4,0}{2} = 5,5;$$

$$\Delta z_2 = 7 - 5,5 = 1,5;$$

$$z_3^0 = \frac{8,0 + 0}{2} = 4,0;$$

$$\Delta z_3 = 8 - 4{,}0 = 4{,}0;$$

$$x_1 = \frac{C_{вх} - 1{,}5}{0{,}5};\ x_2 = \frac{V_ф - 5{,}5}{1{,}5};\ x_3 = \frac{T_ф - 4}{4}.$$

Фактори впливу утворюють незалежну систему аргументів, варіювання яких на двох рівнях (таблиця 1) дозволило сформулювати і реалізувати матрицю планування, яка описує вплив вищеперелічених параметрів на втрати напору у фільтруючій засипці.

Таблиця 1

Розширена матриця факторів у безрозмірній величині

№ досліду	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	Y
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	Y_1
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	Y_2
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	Y_3
4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	Y_4
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	Y_5
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	Y6
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	Y_7
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_8
b_n	b_0	b_1	b_2	b_3	b_{12}	b_{13}	b_{23}	b_{123}	Y

Варіюванню по трьох факторах в натуральній величині приводимо в табл. 2. Також вносимо в табл. 2 значення функції відгуку та виводимо середнє арифметичне значення.

Таблиця 2

Повний факторний експеримент для трьох факторів в натуральній величині

№ з/п	Фактори в натуральній величині			Вихідний параметр			$\overline{y_j}$
	$C_{вх}$	$V_ф$	$T_ф$	Y_1	Y_1	Y_1	
1	1	4	0	4,5	4,5	4,8	**4,6**
2	2	4	0	5,5	5,3	5,5	**5,4**
3	1	7	0	7,5	7,6	7,4	**7,5**
4	2	7	0	8,3	8,1	8,1	**8,2**
5	1	4	8,0	7,4	7,2	7,6	**7,4**
6	2	4	8,0	8,2	8,3	8,4	**8,3**
7	1	7	8,0	11,3	11,4	11,5	**11,4**
8	2	7	8,0	11,6	12	11,7	**11,8**

Розрахунок вибіркових дисперсій доцільно проводити в табличній формі 3 з використанням даних табл. 2.

Таблиця 3

Розрахунок вибіркових дисперсій для трьох факторів

$\left(y_{j1}-\overline{y_j}\right)^2$	$\left(y_{j2}-\overline{y_j}\right)^2$	$\left(y_{j3}-\overline{y_j}\right)^2$	S_j^2
0,01	0,01	0,04	0,03
0,00	0,02	0,00	0,02
0,00	0,01	0,01	0,01
0,02	0,00	0,00	0,01
0,00	0,04	0,04	0,04
0,01	0,00	0,01	0,01
0,01	0,00	0,01	0,01
0,03	0,05	0,00	0,04

Після розрахунку дисперсії розраховуємо коефіцієнти рівняння регресії b_0, b_1, b_2, b_3, b_{12}, b_{13}, b_{23} ,b_{123} .

Згідно формул (5-7) розраховуємо коефіцієнти регресії у вигляді табл. 4.

Таблиця 4

Коефіцієнти рівняння регресії

b_0	b_1	b_2	b_3	$b_{1,2}$	$b_{1,3}$	$b_{2,3}$	$b_{1,2,3}$
8,07	0,35	1,64	1,65	-0,09	-0,03	0,23	-0,05

Складаємо рівняння регресії в кодованих величинах:

$$Y = 8{,}07 + 0{,}35x_1 + 1{,}64x_2 + 1{,}65x_3 - 0{,}09x_1x_2 - 0{,}03x_1x_3 + 0{,}23x_2x_3 - 0{,}05x_1x_2x_3.$$

Просумувавши елементи останнього стовпця по дисперсії, маємо:

$$\sum_{j=1}^{8} S_j^2 = 0{,}17\cdot$$

Дисперсія відтворюваності

$$S_{\{y\}}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} S_j^2 = \frac{1}{8}0{,}17 = 0{,}021\cdot$$

Визначаємо середньоквадратичне відхилення коефіцієнтів $S_{коеф}$.

З таблиці Стьюдента за числом степенів вільності

$$n(m-1)=8*2=16$$

при рівні значимості α=0,05 знаходимо $t_{кр}$=2,12, звідси $A=t_{кр}\cdot S_{коеф}$=2,12*0,030=0,064

$$S_{коеф} = \sqrt{\frac{0{,}021}{8\cdot 3}} = 0{,}030\cdot$$

Зрівнявши А з коефіцієнтами рівняння регресії, видно, що:

b_{13} = -0,03, b_{123} = -0,05 менше по модулю за А, отже, вони незначимі.

Прийнявши b_{13} та b_{123} до 0, маємо:

$$Y = 8{,}07 + 0{,}35x_1 + 1{,}64x_2 + 1{,}65x_3 - 0{,}09x_1x_2 + 0{,}23x_2x_3.$$

Перевіримо отримане рівняння регресії на адекватність по критерію Фішера, знайшовши остаточну дисперсію. Для цього знайдемо значення досліджуваного параметра по отриманому рівнянню регресії $\overline{y_i}\left(j=1...8\right)$, підставивши (-1) замість x_1, x_2, x_3 відповідно до номеру j-еспериманту отримаємо:

$$\overline{y}_1 = 8{,}07 + 0{,}35 + 1{,}64 + 1{,}65 - 0{,}09 + 0{,}23 = 11{,}84;$$

$$\overline{y}_2 = 8{,}07 - 0{,}35 + 1{,}64 + 1{,}65 + 0{,}09 + 0{,}23 = 11{,}33;$$

$$\overline{y}_3 = 8{,}07 + 0{,}35 - 1{,}64 + 1{,}65 + 0{,}09 - 0{,}23 = 8{,}28;$$

$$\overline{y}_4 = 8{,}07 - 0{,}35 - 1{,}64 + 1{,}65 - 0{,}09 - 0{,}23 = 7{,}42;$$

$$\overline{y}_5 = 8{,}07 + 0{,}35 + 1{,}64 - 1{,}65 - 0{,}09 - 0{,}23 = 8{,}09;$$

$$\overline{y}_6 = 8{,}07 - 0{,}35 + 1{,}64 - 1{,}65 + 0{,}09 - 0{,}23 = 7{,}58;$$

$$\overline{y}_7 = 8{,}07 + 0{,}35 - 1{,}64 - 1{,}65 + 0{,}09 + 0{,}23 = 5{,}45;$$

$$\overline{y}_8 = 8{,}07 - 0{,}35 - 1{,}64 - 1{,}65 - 0{,}09 + 0{,}23 = 4{,}58.$$

Остаточну дисперсію $S^2_{ост}$ розраховуємо:

$$S^2_{ост} = \frac{3}{8-7}\left[\begin{aligned}&(11{,}8-11{,}84)^2+(11{,}4-11{,}33)^2+(8{,}3-8{,}28)^2+(7{,}4-7{,}42)^2+\\&+(8{,}2-8{,}09)^2+(7{,}5-7{,}58)^2+(5{,}4-5{,}45)^2+(4{,}6-4{,}58)^2\end{aligned}\right]=0{,}071.$$

Розрахункове значення Фішера розраховується за формулою:

$$F_{розр} = \frac{0{,}071}{0{,}17} = 3{,}33.$$

Табличне значення критерію Фішера знаходиться із таблиць критичних точок розподілу Фішера при рівні значимості α = 0,05 на відповідних степенях вільності.

Знаходимо табличне значення Фішера, яке рівне $F_{табл}$ = 4,49.

Оскільки $F_{розр}$ =3,33 < $F_{табл}$ = 4,49, то рівняння регресії адекватне.

Проведемо інтерпретацію отриманої моделі в натуральні величини:

$$H = 8{,}07 + 0{,}35\left(\frac{C_{вх}-1{,}5}{0{,}5}\right) + 1{,}64\left(\frac{V_ф-5{,}5}{1{,}5}\right) + 1{,}65\left(\frac{T_ф-4}{4}\right) - .$$

$$-0{,}09\left(\frac{C_{вх}-1{,}5}{0{,}5}\right)\cdot\left(\frac{V_ф-5{,}5}{1{,}5}\right) + 0{,}23\left(\frac{V_ф-5{,}5}{1{,}5}\right)\cdot\left(\frac{T_ф-4}{4}\right)$$

Розкривши дужки та перемноживши між собою відповідні множники, будемо мати рівність

$$H = 8,07 + 0,7C_{вх} - 1,05 + 1,093V_ф - 6,0133 + 0,4125T_ф - 1,65 - \\ - 0,12C_{вх}V_ф + 0,66C_{вх} + 0,18V_ф - 0,99 + 0,0383V_фT_ф - 0,1533V_ф - \\ - 0,2108T_ф + 0,8433$$

Після спрощення отримаємо рівняння регресії для визначення втрат напору у фільтруючій пінополістирольній засипці:

$$H = -0,79+1,36C_{вх}+1,1197V_ф+0,2017T_ф-0,12C_{вх}T_ф+0,0385V_фT_ф. \quad (16)$$

Згідно отриманої функціональної залежності (16) можна побудувати ряд графіків, які використовувати для проектування пінополістирольних фільтрів для виробничих цілей.

Дане рівняння регресії можна використовувати для прогнозування зростання втрат напору з часом у пінополістирольній фільтруючій засипці в діапазоні швидкостей від 4 до 7 м/год та вхідній концентрації заліза у воді від 1,0 до 2,0 мг/дм^3.

1. Математическое моделирование / Дж. Эндрюс и др. – М. : Мир, 1979. **2.** Математическое моделирование и эксперимент / Любарский Г. Я. и др. – Київ : Наукова думка, 1987. **3.** Горский В. Г. Планирование промышленных экспериментов / В. Г. Горский, Ю. П. Адлер. – М. : Металургия, 1974. – 264 с. **4.** Гусейнов Ф. Г. Планирование эксперимента в задачах электротехники / Ф. Г. Гусейнов, О. С. Мамедяров. – М. : Энергоатомиздат 1988. – 151 с. **5.** Бродский Б. З. Таблицы планов эксперимента для факторных и полиноминальных моделей / Б. З. Бродский, Л. И. Бродский, Т. И. Голикова. – М. : Металлургия, 1982. – 752 с. **6.** Очищення природної води на пінополістирольних фільтрах : монографія / [В. О. Орлов, С. Ю. Мартинов, А. М. Орлова, В. О. Зощук, Н. Л. Мінаєва, С. О. Куницький та ін.]; під заг. ред. В. О. Орлова. – Рівне : НУВГП, 2012. – 172 с.: іл. **7.** Florescu C. Fascicola1: Optimization of the open fast filtelrs exploitation from surface drinking water station / Florescu Constantin, Podoleanu Corneliu Eusebiu // Buletinul stiintific al Universitaii "Politehnica" din Timisoara, Romania seria hidrotehnica. – 2010. – Tomul 55(69). – P. 185-189. **8.** Gehringer P. Constuction of a 100 m^3/h demonstration plant in bad fischau – Brum of graundwaten / Peter Gehringer. – Seibersdorf, 1987.

Рецензент: д.т.н., професор Орлов В. О. (НУВГП)

Kunytskyi S. O., Post-graduate Student (National University of Water Management and Nature Resources Use, Rivne)

APPLICATION OF COMPLETE FACTOR EXPERIMENT TO WATER DEFERRIZATION PROCESS DESIGN ON

POLYSTYRENE FILTERS WITH FULL RINSING FILLING

To propose mathematic model for the increase of head loss in the expanded polystyrene filter. Formula for predicting the pressure drop in granular backfill is proposed.
Keywords: pressure drop, dispersion, full factorial experiment.

Куницкий С. О., аспирант (Национальний университет водного хозяйства та природоспользования, г. Ровно)

ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛНОГО ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОЦЕССА ОБЕЗЖЕЛЕЗИВАНИЯ ВОДЫ НА ПЕНОПОЛИСТИРОЛЬНЫХ ФИЛЬТРАХ С ПОЛНОЙ ПРОМЫВКОЙ ЗАСЫПКИ

Приведена математическая модель роста потерь напора в фильтрующей пенополистирольной загрузке. Предложена формула для прогнозирования потерь напора в зернистой загрузке.
Ключевые слова: потери напора, дисперсия, полный факторный эксперимент.