УДК 532.546

Лекомцев Д. Г., аспирант (Орловский государственный университет)

РАБОТА СОВЕРШЕННОЙ НЕЦЕНТРАЛЬНОЙ СКВАЖИНЫ С КРУГОВЫМ КОНТУРОМ ПИТАНИЯ В АНИЗОТРОПНОМ СЛОЕ ГРУНТА*

Исследована плоскопараллельная задача о дебите скважины эксцентрично расположенной в анизотропном однородном пласте грунта с круговым контуром питания. Изучено влияние анизотропии грунта на дебит.
***Ключевые слова*: скважина, грунт, дебит.**

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Орловской области в рамках научного проекта № 12-01-97522 р_центр_а

Введение. Совершенная эксплуатационная скважина дебита Q расположена в горизонтальном пласте постоянной толщины. Грунт пласта недеформируемый анизотропный и однородный, характеризуется коэффициентом проницаемости K – тензором второго ранга (вообще говоря, несимметричным). В предположении плоскопараллельности задачи $K=(K_{ij})$, i,j=1,2. Компоненты (K_{ij}) – постоянные.

Работу скважины моделируем стоком мощности Q, который расположен в начале координат физической плоскости Oxy. Контур скважины – окружность $\sigma_C : x^2+y^2=R_C^2$, а контур питания – окружность $\sigma_\Pi : (x-h)^2+y^2=R_\Pi^2$, h – расстояние от центра контура питания до стока. Течение происходит в области D, ограниченной контуром $\sigma_\Pi \cup \sigma_C$.

Полагаем, что давление на этих контурах постоянное (не меняется с течением времени). Для обобщенного потенциала φ ($\varphi=-(p+\rho\Pi)/\mu$, Π – потенциал массовой силы – силы тяжести, p – давление, μ и ρ - вязкость и плотность жидкости) имеем условия [1]

$$\varphi^+(z)=\alpha_\Pi(z),\ z\in\sigma_\Pi, \tag{1}$$

$$\varphi(z)=\alpha_C(z),\ z\in\sigma_C, \tag{2}$$

где $\alpha_\Pi(z)$ и $\alpha_C(z)$ – непрерывные периодические функции. Так как длина контура σ_C скважины очень мала по сравнению с характерным

размером области *D*, то можно давление (обобщенный потенциал) на этом контуре усреднить и взять равным давлению (обобщенному потенциалу) в некоторой его точке $z_* \in \sigma_C$, то есть в условии (2) можно положить $z = z_* \in \sigma_C$.

Обобщенный потенциал $\varphi(z)$ удовлетворяет всюду в области *D*, (за исключением изолированных особых точек $\varphi(z)$) уравнению [2]:

$$\nabla \cdot (K \cdot \nabla \varphi(z)) = 0\,,\ z \in D \qquad (\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}\,). \tag{3}$$

Это уравнение относится к эллиптическому типу, если компоненты тензора проницаемости (K_{ij}) удовлетворяют условиям [2]:

$$K_{11}>0,\ D(K_S) = K_{11}K_{22} - \left(\frac{K_{12}+K_{21}}{2}\right)^2 > 0\,, \tag{4}$$

где $D(K_S)$ – определитель симметричной части $K_s = (K + K^T)/2$ тензора $K = (K_{ij})$, $K^T = (K_{ji})$.

Таким образом, исследование работы скважины (нахождение ее дебита) сводится на плоскости *z* к решению уравнения (3) при условиях (1), (2) (краевая задача Дирихле).

Постановка задачи на вспомогательной плоскости. Трудность решения поставленной задачи обусловлена сложным видом уравнения (3). Ее исследование значительно упрощается, если уравнение (3) привести к каноническому виду. Для этого перейдем на вспомогательную плоскость $\zeta = \xi + i\eta$, используя гомеоморфные (аффинные) преобразования координат (прямое и обратное) [3]:

$$\xi = (1+a)x + by\,,\ \eta = bx + (1-a)y\,, \tag{5}$$

$$x = \frac{(1-a)\xi - b\eta}{1-\mu_0^2}\,,\ y = \frac{(1+a)\eta - b\xi}{1-\mu_0^2}\,,$$

где $a = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1 + 2\sqrt{\alpha - \beta^2}}$, $b = -\dfrac{2\beta}{\alpha + 1 + 2\sqrt{\alpha - \beta^2}}$, $\mu_0^2 = a^2 + b^2$,

($\alpha = \dfrac{K_{22}}{K_{11}} > 0$, $\beta = \dfrac{K_{12}+K_{21}}{2K_{11}}$, $\beta^2 < \alpha$).

Якобиан преобразования $J = \dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = 1 - \mu_0^2$ строго положителен (*J>0*), так как в силу условий (4) $\mu_0^2 < 1$. Условие *J>0* обеспечивает

при переходе на плоскость ζ сохранение направления обхода контура области течения (на плоскости ζ область D' ограничена контуром $\sigma_{\Pi}' \cup \sigma_C'$).

Применим второе из преобразований (5) к задаче (3), (1), (2). Получим на плоскости ζ для функции $\varphi(\zeta)$ (потенциала скорости), уравнение Лапласа:

$$\Delta\varphi(\zeta) = 0\,,\ \zeta \in D'\ \left(\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right) \tag{6}$$

и краевые условия

$$\varphi_*^+(\zeta) = \alpha_{\Pi}(\zeta) - \varphi_0(\zeta)\,,\ \zeta \in \sigma_{\Pi}'\,, \tag{7}$$

$$\varphi_*(\zeta) = \alpha_C(\zeta) - \varphi_0(\zeta)\,,\ \zeta = \zeta_* \in \sigma_C'\,, \tag{8}$$

где $\varphi_0(\zeta)$ – обобщенный потенциал течения $\varphi_0(\zeta) = Q\Phi(\zeta,\zeta_0)$, $\Phi(\zeta,\zeta_0)$ – первое фундаментальное решение по переменной ζ уравнения (6) [1]:

$$\Phi(\zeta,\zeta_0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{D(K_S)}}\ln\frac{1}{|\zeta-\zeta_0|}\quad \left(|\zeta-\zeta_0| = [(\xi-\xi_0)^2 + (\eta-\eta_0)^2]^{1/2}\right). \tag{9}$$

Таким образом, нахождение дебита скважины сводится в плоскости ζ к нахождению $\varphi(\zeta)$, удовлетворяющего уравнению (6) и условиям (7), (8).

Решение задачи методом дискретных особенностей. Как показано в [1] задачу о работе скважины в анизотропном слое грунта можно свести к решению системы интегрального уравнения

$$f(\zeta) + 2\int_{\sigma'_{\Pi}} f(\tau)\frac{\partial\Psi(\tau,\zeta)}{\partial l_\tau}dl_\tau = 2[\alpha_{\Pi}(\zeta) - \varphi_0(\zeta)]\,,\ \zeta \in \sigma_{\Pi}'\,, \tag{10}$$

и интегрального соотношения

$$\int_{\sigma'_{\Pi}} f(\tau)\frac{\partial\Psi(\tau,\zeta)}{\partial l_\tau}dl_\tau = \alpha_C(\zeta) - \varphi_0(\zeta)\,,\ \zeta = \zeta_* \in \sigma_C'\,, \tag{11}$$

в котором $\Psi(\tau,\zeta)$ – функция, сопряженная решению (9), имеющая вид

$$\Psi(\tau,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sqrt{D(K_A)}}{\sqrt{D(K_S)}}\ln|\tau-\zeta| - \arg(\tau-\zeta)\right], \tag{12}$$

где $D(K_A) = \left(\frac{K_{12}-K_{21}}{2}\right)^2$ – определитель антисимметричной части

тензора проницаемости *K*. Далее в условиях (7) и (8) полагаем $\alpha_{\Pi} = 0$ и $\alpha_C = const = 1$.

Решим систему (10) – (11) численно относительно $f(\zeta)$ и дебита *Q*, входящего в $\varphi_0(\zeta)$. Воспользуемся методом дискретных особенностей [4]. Перейдем к системе n+1 линейных неоднородных алгебраических уравнений:

$$f_j + 2\sum_{j=1, j\neq i}^{n} f_j \Omega_{ji} \Delta l_j = 2[\alpha_{\Pi i} - Q\Phi_{Ci}],\ i = \overline{1,n}, \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^{n} f_j \Omega_{*j} \Delta l_j = \alpha_{C*} - Q\Phi_{C*}, \tag{14}$$

где $\Omega_{ji} = -\frac{1}{2\pi}\left[\left(V_\xi \frac{\sqrt{D(K_A)}}{\sqrt{D(K_S)}} - V_\eta\right)\xi'_{1j}(\theta_j) + \left(V_\eta \frac{\sqrt{D(K_A)}}{\sqrt{D(K_S)}} + V_\xi\right)\eta'_{1j}(\theta_j)\right]$,

$V_\xi = \frac{\xi_{1j} - \xi_{1i}}{(\xi_{1j} - \xi_{1i})^2 + (\eta_{1j} - \eta_{1i})^2}$, $V_\eta = \frac{\eta_{1j} - \eta_{1i}}{(\xi_{1j} - \xi_{1i})^2 + (\eta_{1j} - \eta_{1i})^2}$, вспомогательная система координат $O\xi_1\eta_1$, повернута относительно $O\xi\eta$ на угол ω, определяемый равенством $tg2\omega = \frac{b}{a}$. Решая систему уравнений (13)-(14) методом Гаусса, находим значения функций f_j, *j*=1,2,...,*n* и искомый дебит Q. С целью изучения влияния анизотропии грунта на дебит введем величину ε, характеризующую относительный дебит.

$$\varepsilon = \frac{Q}{Q^0} - 1,$$

где Q^0 – дебит скважины радиуса R_C с круговым контуром питания радиусом R_Π в изотропном грунте, вычисляемый по формуле [5]:

$$Q^0 = \frac{2\pi(\varphi_C - \varphi_\Pi)}{\ln(R_\Pi^2 - h^2) - \ln(R_\Pi R_C)}. \tag{15}$$

Для определения вклада антисимметричной части $D(K_A)$ тензора проницаемости $K = (K_{ij})$ в дебит скважины введем коэффициент $\gamma = \frac{K_{12} - K_{21}}{2K_{11}}$, тогда $D(K_A) = K_{11}^2\gamma^2$.

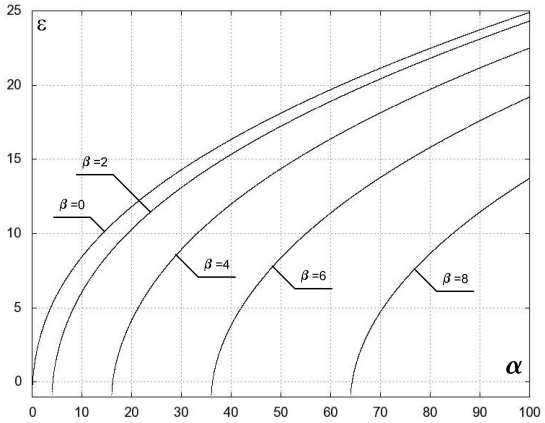

Рис. 1. Зависимости относительного дебита скважины ε от коэффициентов α и β при круговом контуре питания, γ=0, $h = R_П / 4$

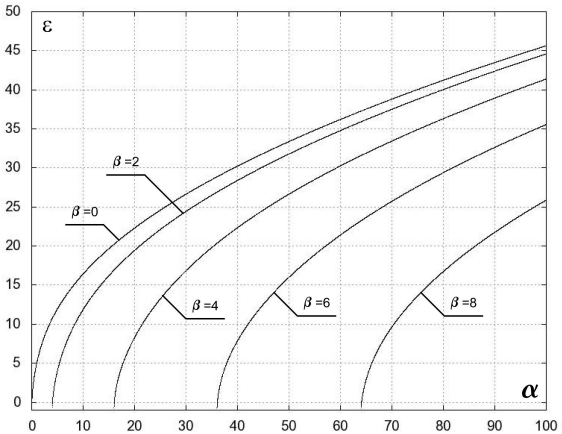

Рис. 2. Зависимости относительного дебита скважины ε от коэффициентов α и β при круговом контуре питания, γ=0, $h = R_П / 2$

Выводы. Результаты расчета представлены на рис. 1 и 2. Видно, что анизотропия грунта может сильно сказываться на дебите. С увеличением отношения недиагональных к диагональным компонентам тензора (K_{ij}) (увеличение коэффициентов β, коэффициент α – фиксирован) влияние анизотропии уменьшается. С приближением скважины к контуру питания дебит возрастает. Если положить $h=0$, то результаты расчета согласуются с расчетами, приведенными в [6].

1. Пивень В. Ф. Задача о работе системы скважин в анизотропном пласте грунта / В. Ф. Пивень // Труды XIV Международного симпозиума «МДОЗМФ-2009». Харьков-Херсон, 2009. – С. 394-397. **2.** Пивень В. Ф. Постановка основных граничных задач фильтрации в анизотропной пористой среде / В. Ф. Пивень // Труды XIII Международного симпозиума «МДОЗМФ». Харьков – Херсон, 2007. – С. 239-243. **3.** Пивень В.Ф. Решение граничных задач двумерной фильтрации в анизотропно-неоднородном слое пористой среды / В. Ф. Пивень // Труды Международных школ-семинаров «МДОЗМФ». – Орел, 2007. – Вып. 5. – С. 91-100. **4.** Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – Москва: ТОО "Янус". 1995. – С. 520. **5.** Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Москва: «Наука», 1977. – С. 664. **6.** Лекомцев Д. Г. Работа совершенной скважины в анизотропном слое грунта в случае кругового контура питания / Д. Г. Лекомцев // Материалы Международной молодежной научной конференции «Математическая физика и ее приложения». –Пятигорск, 2012. – С. 34-40.

Рецензент: д.т.н., професор Бомба А. Я. (НУВГП)

Lekomtsev D. H., Post-graduate Student (Orel State University)

WORK PERFECT NONCENTRAL WELLS WITH A CIRCULAR LOOP POWER IN ANISOTROPIC LAYER OF GROUND

Examines the problem of plane-parallel production rate of wells eccentric situated in anisotropic homogeneous layer of the soil, with a circular loop power supply. In this case, the influence of the anisotropy of the soil on the flow rate.
***Keywords*: well, soil, debit.**

Лекомцев Д. Г., аспірант (Орловський державний університет)

РОБОТА ДОСКОНАЛОЇ НЕЦЕНТРАЛЬНОЇ СВЕРДЛОВИНИ З КРУГОВИМ КОНТУРОМ ЖИВЛЕННЯ У АНІЗОТРОПНОГО ШАРІ ҐРУНТУ

Досліджена плоскопаралельна задача про дебіт свердловини, яка ексцентрично розташована в анізотропному однорідному пласті ґрунту з круговим контуром живлення. Вивчено вплив анізотропії ґрунту на дебіт.
***Ключові слова*: свердловина, ґрунт, дебіт.**