

МАТЕРІАЛОЗНАВСТВО

УДК 624.012:539.4

Кундрат М. М., д.т.н., професор, Кундрат А. М., к.ф.-м.н., доцент
(Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

РОЗРАХУНОК МІЦНОСТІ СИСТЕМИ СПІВДОТИЧНИХ ПІДСИЛЕНЬ ЕЛЕМЕНТІВ БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ

Досліджується гранична рівновага тіла з періодичною системою нерозтягливих співдотичних підсилень. З'ясовано вплив навантаження на розвиток локалізованих зон передруйнування, розподіли контактних напружень та осьових зусиль. За деформаційним критерієм руйнування з'ясовані граничні навантаження їх можливого відшарування та розриву.

Ключові слова: підсилення, зона передруйнування, контактні напруження, осьові зусилля.

Задача розрахунку підсилюючих елементів як одного із поширених засобів ремонту та відновлення працездатності інженерних конструкцій, зважаючи на те, що велика кількість відповідальних матеріаломістких конструкцій України близька до вичерпання свого проектного ресурсу, залишається на часі. Необхідна наукова експертиза можливості їх безпечної експлуатації і визначення засобів рентабельного продовження функціонування. Використовувані підкріплюючі елементи одночасно є й потужними концентраторами напружень і спричиняють нелінійні та пластичні деформації чи розвиток зон розпушення, що в значній мірі ускладнює розрахунок напружено-деформованого стану та умов граничної рівноваги системи в цілому.

Результати та огляд досліджень контактної задачі Мелана [1] для ідеально пружного тіла подані в монографіях А.І. Каландії [2], Є.І. Григолюка, В.М. Толкачова [3], Г.Я. Попова [4], В.М. Александрова, С.М. Мхітаряна [5], В.І. Саркісяна [6], Г.Т. Сулима [7] та широкому колу публікацій. Присутня в постановках задач сингулярність контактних напружень в околах кінців підсилення в явному вигляді виділена у статті Н.Х. Арутюнана [8]. Задача для періодичної системи підсилень сформульована та розв'язана у праці Н.Х. Арутюнана, С.М. Мхітаряна [9], а Г.А. Морарь, Г.Я. Попов [10] для розв'язування інтегрального рівняння запропонували застосувати

метод ортогональних многочленів. Задачі про контактну взаємодію попередньо напруженого тіла з підсиленнями досліджено в роботах О.М. Гузя, С.Ю. Бабича, В.Б. Рудницького та узагальнено в їх монографіях [11, 12]. Зокрема, доведена можливість використання розв'язків для лінійно пружного тіла для аналізу полів напружень у відповідних задачах з початковими (залишковими) напруженнями. Методика оцінювання технічного стану залізобетонних кріплень гідротехнічних споруд та методи їх відновлень подано в рекомендаціях Є.М. Бабича, О.В. Гірського [13].

Запропоновані підходи справили великий вплив на розвиток механіки контактної взаємодії, проте використання досить сильно ідеалізованої схеми ідеального механічного контакту не враховувало реально спостережуваних можливостей виникнення в області країв підкріплень зон ослабленого контакту з тілом чи можливого розриву самого підкріплення з утворенням більшої кількості зон ослабленого контакту, а отримані розв'язки мали сингулярності напружень. Вплив малих зон пластичності матеріалу в околі країв підкріплення на розподіл контактних напружень дослідив Ю.І. Кудишин [14], використовуючи ітераційний метод пружних розв'язків О.І. Ільюшина. У такій постановці отримані більш прийнятні обмежені напруження в околах країв підсилювального ребра, причому найбільших значень розрахункові пластичні деформації досягали біля навантажених зосередженими силами його кінців.

Інша розрахункова модель для аналізу напружено-деформованого стану і граничної рівноваги пружного тіла з підкріпленням запропонована в працях М.М. Кундрата [15–17]. Пропонований підхід дав можливість уникнути сингулярності напружень на краях підсилення і отримати механічно коректні обмежені напруження у всіх точках композиції. В цій постановці розглянуті модельна задача для тіла з двома [18] та задача для ортотропного тіла з підкріпленням [19]. При розтягуванні тіла [15, 16] найбільша концентрація напружень виникає в околах кінців підсилення, де насамперед слід сподіватися виникнення й зі збільшенням навантаження розвитку локалізованих зон передруйнування (рис. 1). Останні можуть імітувати області накопичення пошкоджень, пластичного деформування (проковзування), часткового розриву зв'язку між тілом й підсиленням та інше. Під час досягнення переміщеннями внаслідок проковзування матеріалу під підкріпленням певної граничної межі у зонах передруйнування може порушитись зв'язок між матеріалами. З іншого боку, дотичні напруження шляхом передачі дії прикладених зусиль спричиняють у підсиленні осьові зу-

силля розтягу, які при досягненні межі міцності підсилення можуть спричинити його розрив.

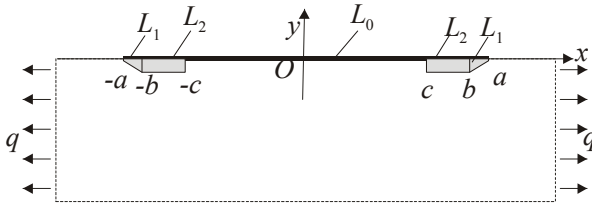


Рис. 1. Схема розтягання тіла з підсиленням

На рис. 2 за результатами праць [15, 17] подано розподіл знерозмірених $\tilde{P}(x) = P(x)/(\tau_s^* a)$ осьових зусиль уздовж правої половини підсилення (ліва – симетрична) за фіксованого навантаження $q/(2\tau_s^*)=0,15$.

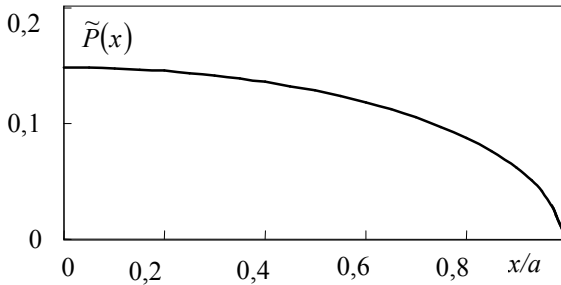


Рис. 2. Осьові зусилля у підсиленні

Найбільшого значення розривні зусилля досягають посередині підсилення. Помітне існування області у центральній частині, де розривні зусилля змінюються незначно, наприклад, якщо не зважати на зміну зусиль у межах 5% (скажімо, через відхилення від ідеальної форми, механічних властивостей матеріалів, можливих неточностей визначення механічних характеристик, виконання обчислень, самої математичної моделі тощо), то така область складає більше половини довжини підсилення, а для підсилення з модулем E_f і пластини E та їх відношенням $\lambda_0 \equiv E_f/E = 10/3$ – навіть більше 90% його довжини [16], що свідчить про можливість за відносно швидкої зміни навантаження одночасного множинного розриву підкріплюючого елемента у даній зоні.

У випадку двох та більше підсилень постановка задачі в рамках моделі дає можливість, зокрема, розглянути і отримати механічно коректні результати для як завгодно близького (аж до співдотику) їх розміщення. Запропонована модель застосована нижче до розв'язання задачі для півбезмежного тіла з системою співдотичних нерозтягливих підсилень.

Постановка задачі та її розв'язування. Розглянемо задачу теорії пружності для півбезмежного тіла, яке розтягується на нескінченності напруженнями паралельно до краю (рис. 3). На відрізках $[-a + 2na, a + 2na]$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ тіло підкріплено періодичною системою скінченної міцності на розрив P_{uz} підсилень завдовжки $2a$, що співдотикаються. Осі декартової системи координат xOy збігаються з осями геометричної симетрії композиції.

Приймаємо, що локалізовані зони передруйнування просуваються від кожного краю до центральної частини уздовж межі тіло-підсилення і складаються з двох фрагментів: ділянки розпушення $L_1 \approx b \leq |x - 2na| \leq a$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ та ділянки пластичного деформування $L_2 \approx c \leq |x - 2na| \leq b$. У зонах передруйнування виконуються такі крайові умови: на ділянках розпушення (ослабленого контакту) дотичні напруження лінійно зростають від нуля до свого граничного значення τ_s^* –

$$\sigma_{xy}(x) = \tau_s^* \frac{a - |x - 2na|}{a - b} \text{sign}(x - 2na), \quad (x \in L_1), \quad (1)$$

а на ділянках пластичного деформування

$$\sigma_{xy}(x) = \tau_s^* \text{sign}(x - 2na), \quad (x \in L_2). \quad (2)$$

Тут τ_s^* – адгезійна зсувна міцність контактної межі тіло – підсилення, а при пластичному деформуванні – її зсувний поріг пластичності; σ_{ij} – компоненти тензора напружень; $\text{sign}(t) = \{1 \text{ для } t > 0; -1 \text{ для } t < 0; 0 \text{ для } t = 0\}$. Значення параметра c знаходимо з додаткової фізичної умови, а b задаємо – його доцільно пов'язати з розмірами структурних елементів (зерен) матеріалу адгезійного прошарку. Запровадження у такий спосіб зони передруйнування дає можливість уникнути особливостей напружень в околах кінців підсилень та отримати обмежені напруження в усіх точках композиції, які задовольняють також і законності дотичних напружень.

На відрізках $L_0 \approx |x - 2na| \leq c$ пружного деформування зберігається ідеальний контакт і тому деформації там відсутні

$$\partial u(x)/\partial x = 0, \quad (x \in L_0), \quad (3)$$

де u, v – компоненти вектора переміщень у напрямках осей Ox та Oy відповідно. Напруження на нескінченності

$$\sigma_{xx}^\infty = q, \quad \sigma_{yy}^\infty = \sigma_{xy}^\infty = 0. \quad (4)$$

При таких допущеннях знайдемо величину і характер розподілу контактних напружень та осьових розривних зусиль у підсиленнях, довжину локалізованих зон переддруйнування.

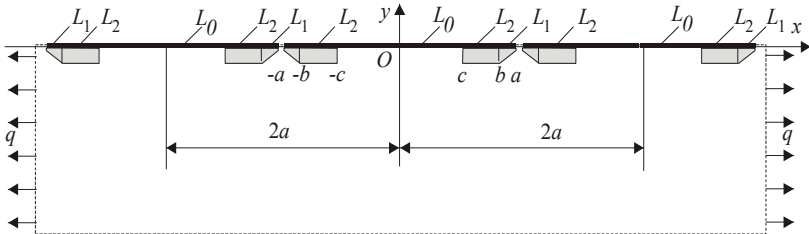


Рис. 3. Схема задачі

Для розв'язування задачі використовуємо відомі [20] подання для напружень і деформацій через комплексні потенціали Колосова – Мусхелішвілі

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \\ \sigma_{yy} - i \sigma_{xy} &= \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \Phi'(z), \end{aligned} \quad (5)$$

$$2G \partial(u + iv)/\partial x = \kappa \Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \Phi'(z), \quad (6)$$

де $z = x + iy$; $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ для плоского напруженого стану; $\kappa = 3 - 4\nu$ в умовах плоскої деформації; G, ν – модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона матеріалу тіла. Для розглядуваної задачі функція $\Phi(z)$ буде кусочно аналітичною періодичною (з періодом $2a$), яку знайдемо після підставлення формул (4) – (6) у крайові умови (1) – (3):

$$\Phi(z) = \frac{f_4(a, b, c) \sin(\alpha z)}{X(z)} + \frac{\tau_s^*}{2\pi} f_6(z, a, b, c), \quad (7)$$

де $f_4(a, b, c) = q/4 - (\tau_s^*/\pi) f_5(a, b, c)$,

$$f_5(a, b, c) = X_1(a, b) \left\{ X(b) - X(a) - \sin(\omega b) \ln \frac{\sin(\omega b) + X(b)}{\sin(\omega c)} + \ln \frac{1 + X(a)}{\sin(\omega c)} \right\},$$

$$f_6(z, a, b, c) = X_1(a, b) \left\{ \sin(\omega b) \Gamma_1(z, b, c) - \Gamma_1(z, a, c) + \sin(\omega z) (\Gamma_2(z, a, c) - \Gamma_2(z, b, c)) \right\},$$

$$X(z) = \sqrt{\sin(\omega(z-c)) \sin(\omega(z+c))},$$

$$X_1(a, b) = [\sin(\omega(a-b)/2) \sin(\omega(a+b)/2)]^{-1},$$

$$\Gamma_1(z, c, a) = \ln(\zeta^- / \zeta^+), \quad \zeta^\pm = X(z) \sin(\omega t) \pm X(t) \sin(\omega z),$$

$$\Gamma_2(z, c, a) = \ln(\xi^- / \xi^+), \quad \xi^\pm = X(t) \pm X(z), \quad \omega = \pi / (2a).$$

Формули (5), (6), (7) цілком описують поля напружень та деформацій у тілі з підсиленнями і дають можливість дослідити умови коректності розв'язку та обставини граничної рівноваги композиції.

Довжина зон передруйнування. Із умови обмеженості розв'язку (7) у вершинах зон передруйнування ($x = \pm c$), отримуємо нелінійне рівняння

$$q / (2\tau_s^*) - (2/\pi) f_5(a, b, c) = 0, \tag{8}$$

яке зв'язує довжину зон із навантаженням тіла та характеристиками композиції. За результатами обчислень на рис. 4 подано залежність загальної відносної довжини зон передруйнування $\varepsilon \equiv (a - c)/a$ від знерозміреного параметра навантаження $\tilde{q} = q / (2\tau_s^*)$, довжина ділянки розпушення $\gamma \equiv (a - b)/a = 10^{-6}$; лінією 2 подано такі ж результати [15] для одного невзаємодіючого підсилення.

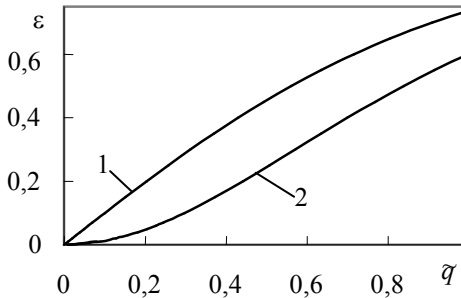


Рис. 4. Довжина зон передруйнування

При $\tilde{q} < 0,5$ для співдотичних підсилень залежність між довжиною зон та навантаженням практично лінійна (лінія 1). За фіксованого рівня навантаження $\tilde{q} = 0,2$ ($\gamma = 10^{-6}$) найбільше відхилення довжини зо-

ни від результатів для однієї невзаємодіючого підсилення дорівнює 315%. Збільшення ділянки розпушення видовжує загальну довжину зони передруйнування, хоча сама ділянка пластичного деформування при цьому зменшується. З розвитком зон передруйнування абсолютна різниця між їх довжинами для різних γ зменшується, що пояснюється зростанням впливу ділянки пластичного деформування.

Відшарування підсилень. На відміну від зон пружного контакту, де матеріал тіла нерозривно з'єднаний з підкріпленнями, на ділянках пластичного деформування та розпушення ($x \in L_1 \cup L_2$) відбувається зміщення (проковзування) точок матеріалу тіла стосовно підсилення. Інтегруванням у поданні (6) з урахуванням розв'язку (7) обчислюємо переміщення під підсиленнями:

$$u(x) = \frac{(k+1)\tau_s^*}{4\pi G} \int_c^x f_6(t, a, b, c) dt, \quad (x \leq a). \quad (9)$$

Із виразу (9) випливає, що зміщення точок тіла стосовно підсилення найбільші при $x = a + 2na$ (для $x = -a + 2na$ вони протилежні за знаком). Коли максимальні переміщення за формулою (9) $u(\pm a)$ досягають деякого граничного значення δ_{2c} , яке є характеристикою зсувної контактної міцності системи "тіло – підсилення" та з'ясовується експериментально, то можлива втрата безпосереднього механічного зв'язку між тілом й підсиленням – відбувається його руйнування. Відповідна критеріальна умова

$$u(a) = \delta_{2c}, \quad (10)$$

що характеризує початок відшарування підсилення, аналогічна відомій [21] умові δ_c – моделі.

Система рівнянь (8) – (10) описує стан граничної рівноваги композиції, коли можливе розшарування між підсиленнями й тілом, а її розв'язок дає значення відповідного цій ситуації граничного навантаження $q = q^*$ при цьому.

За результатами здійснених на основі залежностей (9), (8) обчислень на рис. 5 подано (лінія 1) знерозмірені відносні зміщення точок тіла під торцями підсилень стосовно цих торців (підсилення в цілому) $\bar{u}(a) = Gu(a)/(\tau_s^* a)$ у залежності від навантаження $\bar{q} = q/(2\tau_s^*)$. Лінією 2 подано ті ж переміщення для одного невзаємодіючого підсилення. За сталих навантажень та фізико-механічних характеристик зі збільшенням ділянки розпушення зміщення точок матеріалу пластини стосовно підсилення зростає. З урахуванням умови (10) те саме можна

висловити інакше: за фіксованого δ_{2c} зі збільшенням ділянки розпушення допустиме граничне навантаження для розшарування між тілом і підсиленням зменшується.

Відображені на рис. 5 залежності якісно відповідають результатам розрахунку довжини зони передруйнування (рис. 4). При цьому довжина ділянки розпушення практично не впливає на зв'язок між зміщеннями $u(a)$ та загальною довжиною зони передруйнування ϵ , що цілком узгоджується з відповідними результатами праці [22] для тіла з високомодульним включенням.

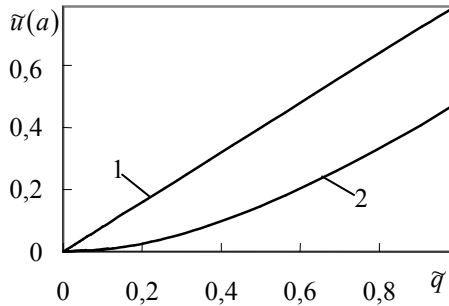


Рис. 5. Максимальні зміщення точок тіла

Оскільки кінці підсилень співдотикаються, то зміщення точок тіла дорівнює переміщенню одного підсилення стосовно іншого як єдиного цілого і вони практично пропорційні (лінія 1) прикладеному навантаженню.

Загальне переміщення підсилення обчислюється за формулою

$$u(a) = \frac{(\kappa + 1)\tau_s^*}{4\pi G} \int_c^a f_6(t, a, b, c) dt. \quad (11)$$

Із аналізу та порівняння числових результатів за формулами (11) та (8) впливає цікава сама по собі залежність

$$\frac{2\tau_s^*}{aq} \int_c^a f_6(t, a, b, c) dt = \pi.$$

Максимальні переміщення підсилення лінійно залежить від навантаження та довжини підсилення за законом

$$u(a) = \frac{(\kappa + 1)a}{8G} q. \quad (12)$$

Розривання підсилень. Дотичні напруження уздовж поверхні зчеплення тіла з підсиленням (5), (1), (2) спричиняють у поперечному перерізі останнього осьове зусилля, яке зі збільшенням навантаження та розвитком локалізованих зон передруйнування зростає. Збільшення розривних зусиль у підсиленнях відбуватиметься до початку їх відшарування чи, що те саме, до моменту досягнення відносними переміщеннями точок тіла стосовно підсилення граничного значення δ_{2c} . Тому максимальні осьові зусилля P_{\max} , на які необхідно орієнтуватися під час вибору підсилень, знаходимо, розв'язуючи систему рівнянь (8) – (10) та прийнявши

$$P(0) = P_{\max} \quad (13)$$

З іншого боку, міцність підсилень на розрив обмежена. Для запобігання їх розриву необхідно, щоб осьові зусилля не перевищували межі міцності підсилення на розтяг P_{ut} : $P_{\max} \leq P_{ut}$. Приймаючи останню умову за критеріальну і розв'язавши систему рівнянь (8), (9) за умов (10), (13), отримуємо граничне значення навантаження $q = q^{**}$ розриву підсилення.

Висновки. Запроваджено двофазну зону передруйнування (ослабленого контакту) у тілі з системою співдотичних нерозтягливих гнучких підсилень, що дало можливість уникнути сингулярності напружень в околах їх країв та отримати механічно коректні обмежені напруження в усіх точках композиції. Виявлено вплив навантаження, довжини ділянки розпушення на розвиток локалізованих зон передруйнування, розподіли контактних напружень під підкріпленнями та осьових зусиль у них самих.

З використанням деформаційного критерію отримано формули для граничного значення навантаження, при якому відбуватиметься відшарування підсилення. Умова, що зусилля розтягу у під підсиленнях не може перевищувати їх міцності, дає граничні навантаження, за яких можливий їх розрив.

1. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen / Melan E. // Ingenieur-Archiv. – 1932. – Bd. 3. – Heft 2. – S. 123-129.
2. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости / А. И. Каландия. – М.: Наука, 1973. – 303 с.
3. Григолюк Э. И. Контактные задачи теории пластин и оболочек / Григолюк Э. И., Толкачев В. М. – М.: Машиностроение, 1980. – 411 с.
4. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М.: Наука, 1982. – 344 с.
5. Александров В. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / Александров В. М., Мхитарян С. М. – М.: Наука, 1983. – 488 с.

6. Саркисян В. С. Контактные задачи для полуплоскостей с упругими накладками / Саркисян В. С. – Ереван : Изд-во Ереван. ун-та, 1983. – 260 с.
7. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г. Т. Сулим. – Львів : Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
8. Арутюнян Н. Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением / Н. Х. Арутюнян // Прикладная математика и механика. – 1968. – Т. 32, № 4. – С. 632-646.
9. Арутюнян Н. Х. Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками / Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян // Прикладная математика и механика. – 1969. – Т. 33, № 5. – С. 813-843.
10. Морарь Г. А. К периодической контактной задаче для полуплоскости с упругими накладками / Морарь Г. А., Попов Г. Я. // Прикладная математика и механика. – 1971. – Т. 35, № 1. – С. 172–178.
11. Гузь О. М. Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями / Гузь О. М., Бабич С. Ю., Рудницький В. Б. – К. : Вища школа, 1995. – 304 с.
12. Гузь А. Н. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями / Гузь А. Н., Рудницький В. Б. – Хмельницький : ПП Мельник, 2006. – 710 с.
13. Бабич Є. М. Оцінювання технічного стану залізобетонних кріплень ґрунтових укосів гідротехнічних споруд в процесі експлуатації та методи його відновлення. Рекомендації / Бабич Є. М., Гірський О. В. – Рівне–Южноукраїнськ : НУВГП, 2009. – 39 с.
14. Кудишин Ю. И. Задача о подкреплении полуплоскости ребром с учетом пластических свойств материала. / Ю. И. Кудишин // Строительная механика и расчет сооружений. – 1982. – № 2. – С. 25-28.
15. Кундрат М. М. Гранична рівновага та локальне руйнування пластини з накладкою / М. М. Кундрат // Вісник РДТУ. Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво. – Рівне, 1999. – С. 200-204.
16. Кундрат М. М. Періодична пружно-пластична задача для системи жорстких підкріплень у півплощині // Машинознавство. – 2000. – № 3. – С. 38-39.
17. Сулим Г. Т. Пружна накладка скінченної довжини на краю пружної півплощини / Сулим Г. Т., Кундрат М. М. // Тези доповідей міжнародної конференції "Інтегральні рівняння та їх застосування". – Одеса : ОНУ. – 2005. – С. 137-138.
18. Кундрат М. М., Сулим Г. Т. Термопружна рівновага півбезмежної пластини з двома нерозтягливими гнучкими накладками / Кундрат М. М., Сулим Г. Т. // Машинознавство. – 2004. – № 5. – С. 3-8.
19. Кундрат М. М. Пружно-пластична рівновага ортотропної півплощини з накладкою / М. М. Кундрат // Машинознавство. – 2002. – № 1. – С. 31-35.
20. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Мухелишвили Н. И. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
21. Панасюк В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов / В. В. Панасюк. – Киев : Наук. думка, 1991. – 415 с.
22. Kundrat M. M. Exfoliation of a Rigid Linear Inclusion Under Static Loading / M. M. Kundrat // Materials Science. – 2001. – V. 37, № 1. – P. 38-43.

Рецензент: д.т.н., проф. Кундрат М. М. (НУВГП)

Kundrat M. M., Doctor of Engineering, Professor, Kundrat A. M., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
(National University of Water Management and Nature Resources Use, Rivne)

CALCULATION OF THE STRENGTH OF TANGENT REINFORCED BUILDING STRUCTURES ELEMENTS

The limiting equilibrium of the body with the periodic system contacting reinforcements has been investigated. Influence of load on the development zones of prefracture, distribution of contact stresses and axial efforts are found. Limit loads their possible separation or rupture are determined by using deformative criterion of fracture.

Keywords: reinforcement, zone of prefracture, contact stress, axial efforts.

Кундрат Н. Н., д.т.н., профессор, Кундрат А. М., к.ф.-м.н., доцент
(Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)

РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ СИСТЕМЫ КАСАТЕЛЬНЫХ ПОДКРЕПЛЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Исследуется предельное равновесие тела с периодической системой нерастяжимых соприкасающихся подкреплений. Выяснено влияние нагрузки на развитие зон предразрушения, распределение контактных напряжений и осевых усилий. За деформационным критерием разрушения найдены предельные нагрузки их возможного отслоения или разрыва.

Ключевые слова: подкрепление, зона предразрушения, контактные напряжения, осевые усилия.
