

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

УДК 517.958:532.72

Гера Б. В., д.т.н., професор, Николин О. В. (Львівська філія Дніпропетровського національного університету імені академіка В. Лазаряна, м. Львів)

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ УМОВ НЕІДЕАЛЬНОГО ТЕПЛООВОГО КОНТАКТУ ШАРІВ ЧЕРЕЗ ТОНКЕ ВКЛЮЧЕННЯ

Проведено математичне моделювання процесу теплообміну в кусково-неоднорідному шарі, що складається з однорідних шарів, у припущенні, що в зонах поблизу їх контакту діють джерела тепла постійної потужності, а також теплофізичні характеристики значно відрізняються від характеристик контактуючих шарів. Зона контакту представляється як тонке включення між теплопровідними шарами, що є причиною термічного опору і підставою застосування умов неідеального теплообміну. Отримано і досліджено розв'язок задачі теплопровідності з використанням записаних умов неідеального теплообміну.

Ключові слова: математична модель, теплообмін, теплопровідність.

Вступ. Умови теплової взаємодії контактуючих тіл у багатьох випадках потребують додаткової деталізації при потребі врахування особливостей контакту, їх теплофізичних характеристик, технології з'єднання, шорсткості поверхонь тощо. Огляд літератури останніх років з визначення умов теплового контакту твердих тіл приведено в роботі [1].

Хоча для постановки задач теплопровідності контактуючих тіл переважно формують ідеальні умови теплообміну, що зводяться до рівності теплових потоків і температур на границі між ними, проте в зоні контакту часто спостерігається помітна зміна температури. У певному наближенні для моделювання такого контактного теплообміну приймається, що при переході через границю контакту температура змінюється стрибкоподібно і умови ідеального теплообміну при цьому не виконуються. Додаткові параметри, які входять в умови неідеального теплообміну повинні забезпечити спостережуваний стрибок температури і в загальному випадку їх значення невідомі.

Найпростіше встановлювати параметри, які входять в умови неіде-

ального теплового контакту, досліджуючи тіла шаруватої структури. Один з підходів до моделювання неідеальних умов та встановлення параметрів теплообміну між теплопровідними шарами полягає в тому, що зона контакту представляється як тонке проміжне включення між ними [2]. Якщо включення створює теплоізолюючий ефект і значення його теплових характеристик, зокрема теплопровідності, суттєво відрізняються від характеристик контактуючих шарів, тоді у ньому спостерігається значний перепад температури, який в математичній моделі можна наближено представити функцією стрибка. Умови неідеального теплообміну отримуємо, спрямувавши товщину включення до нуля, зберігаючи при цьому його вплив на передачу тепла, що досягається наявністю в умовах теплообміну контактного термічного опору.

Умови неідеального теплового контакту використані в ряді робіт, присвячених вивченню теплових процесів у тілах з шаруватих матеріалів [3-5]. Проте для їх широкого використання потрібно встановити, які значення матимуть коефіцієнти контактного термоопору у тому чи іншому випадку з'єднання.

Умови теплообміну можуть мати більш складний вигляд, якщо в області контакту відбуваються інші фізико-механічні чи хімічні процеси, що приводять, зокрема, до появи джерел тепла. Потужність джерел тепла потрібно оцінити і врахувати в умовах теплообміну. Це може приводити також до математичного моделювання взаємозв'язаних теплофізичних процесів. Таким чином, отримуємо більш загальні умови теплового контакту, наприклад Барбера – Протасова [6]. Розв'язання задачі теплопровідності з такими умовами дає можливість отримати стрибок теплового потоку при переході через границю контакту, що спостерігається експериментально і використано в ряді робіт [6-7].

У даній роботі для задачі теплопровідності контактуючих через тонке включення шарів, у якому діють джерела тепла, отримано умови неідеального теплообміну. Значення термічного опору пропонується визначати через більш звичні для вимірювання – коефіцієнт теплопровідності та товщину включення. Отримано розв'язок задачі теплопровідності з неідеальними умовами теплообміну, що дозволяє досліджувати особливості теплового контакту тіл більш складної конфігурації.

Теплообмін через тонке включення. Для запису умов неідеального теплового контакту у неоднорідному тілі розглянемо теплопровідний шар складений з двох шарів ① та ②, які контактують через тонке включення ③ (рис. 1). За допомогою включення, теплофізичні характеристики якого відрізняються від характеристик основних шарів, моделюємо вплив поверхні розділу на особливості передачі тепла між частинами тіла.

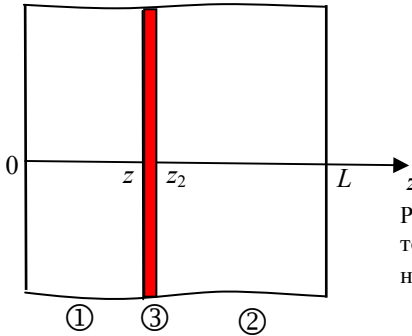


Рис. 1. Теплопровідний шар з тонким проміжним включенням товщини $h = z_2 - z_1$

Опишемо процес теплопровідності у шарі товщини L , якщо у включенні ③, починаючи з деякого моменту часу діють джерела тепла постійної потужності Q_* . На зовнішніх границях $z = 0$ і $z = L$ вважаємо відомими значення температури, а на внутрішніх – $z = z_1$ та $z = z_2$ приймаємо умови ідеального теплового контакту – рівність потоків тепла та температур з обох боків. Узагальнені теплофізичні характеристики включення, які залежать від способу і технології з'єднання шарів, якості внутрішніх поверхонь визначають тепловий обмін між основними шарами ① і ②. Коефіцієнти теплопровідності та теплоємності шарів ①, ② позначатимемо як λ_1, c_1 та λ_2, c_2 , а включення ③ – λ_3, c_3 .

Рівняння теплопровідності в областях $\Omega_1 = (0; z_1)$ та $\Omega_2 = (z_2; L)$ запишемо у вигляді

$$c_i \frac{\partial t_i(z, \tau)}{\partial \tau} - \lambda_i \frac{\partial^2 t_i(z, \tau)}{\partial z^2} = 0, \quad z \in \Omega_i \quad (i=1; 2), \quad \tau > 0, \quad (1)$$

а у включенні

$$c_3 \frac{\partial t_3(z, \tau)}{\partial \tau} - \lambda_3 \frac{\partial^2 t_3(z, \tau)}{\partial z^2} = Q_*, \quad z \in (z_1; z_2), \quad \tau > 0. \quad (2)$$

Тут $t_i(z, \tau)$ – функція температури ($i=1; 2; 3$), z – координата, τ – час, Q_* – питома потужність джерел тепла.

У початковий момент часу задано розподіл температури

$$t_i(z, 0) = \varphi_i(z) \quad (i=1; 2; 3). \quad (3)$$

На границях $z = 0$ та $z = L$ відомі значення температури

$$t_1(0, \tau) = f_0, \quad t_2(L, \tau) = f_L. \quad (4)$$

На внутрішніх границях $z = z_1$ і $z = z_2$ запишемо умови ідеально-

го теплового контакту:

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_1-0} = \lambda_3 \frac{\partial t_3(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_1+0}, \quad t_1(z_1-0, \tau) = t_3(z_1+0, \tau) \quad (5)$$

$$\lambda_3 \frac{\partial t_3(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_2-0} = \lambda_2 \frac{\partial t_2(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_2-0}, \quad t_3(z_2-0, \tau) = t_2(z_2+0, \tau). \quad (6)$$

Для тонкостінних елементів конструкцій часто використовують наближення лінійного розподілу температури по товщині [2]. Зважаючи на малу товщину включення, також скористаємось наближеним представленням його функції температури $t_3(z, \tau)$ і, враховуючи дію джерел тепла, запишемо її у вигляді

$$t_3(z', \tau) = T_1(\tau) + \frac{z'}{h} T_2(\tau) - \frac{Q_*}{\lambda_3} \frac{z'^2}{2}, \quad (7)$$

де $T_1(\tau)$ та $T_2(\tau)$ приведені температура та температурний момент включення, $z' = z - (z_1 + z_2)/2$ – змінена координата по товщині так, що початок координат переміщено у середину включення. Останній доданок (7) забезпечує виконання рівняння теплопровідності з джерелами тепла. Підставимо вираз (7) в умови (5), (6) теплового контакту на внутрішніх поверхнях. Отримаємо при $z = z_1$:

$$t_1(z_1, \tau) = T_1(\tau) - \frac{1}{2} T_2(\tau) - \frac{Q_*}{\lambda_3} \frac{h^2}{8}; \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_1} = \frac{\lambda_3}{h} T_2(\tau) + \frac{Q_* h}{2}; \quad (8)$$

при $z = z_2$:

$$t_2(z_2, \tau) = T_1(\tau) + \frac{1}{2} T_2(\tau) - \frac{Q_*}{\lambda_3} \frac{h^2}{8}; \quad \lambda_2 \frac{\partial t_2(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_2} = \frac{\lambda_3}{h} T_2(\tau) - \frac{Q_* h}{2}. \quad (9)$$

З чотирьох умов (7), (8) виключимо $T_1(\tau)$ і $T_2(\tau)$. Отримаємо дві умови:

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_1} = \frac{\lambda_3}{h} (t_2(z_2, \tau) - t_1(z_1, \tau)) + \frac{Q_* h}{2}, \quad (10)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_2} = \frac{\lambda_3}{h} (t_2(z_2, \tau) - t_1(z_1, \tau)) - \frac{Q_* h}{2}. \quad (11)$$

Зауважимо, що при цьому $T_2(\tau) = t_2(z_2, \tau) - t_1(z_1, \tau)$, тобто $T_2(\tau)$ має значення перепаду температур на границях включення.

Позначимо в (10), (11) $w = Q_* h$ – питома потужність поверхневих

джерел тепла, $R = \frac{h}{\lambda_3}$ – контактний термічний опір. Замість однієї з умов (10), (11) візьмемо їх суму і запишемо контактні умови, що враховують вплив включення на температуру, але не містять явно $t_3(z, \tau)$ у наступному вигляді

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_1} - \lambda_2 \frac{\partial t_2(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_2} = w. \quad (12)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=z_1} = \frac{1}{R} (t_2(z_2, \tau) - t_1(z_1, \tau)) + \frac{w}{2}. \quad (13)$$

Вони дозволяють замкнути задачу теплопровідності для шарів ①, ② і визначати функції температури $t_1(z, \tau)$ та $t_2(z, \tau)$ з рівнянь (1) і умов (3), (4), (12), (13) не визначаючи температури у тонкому включенні. Вплив прошарку на температурне поле при цьому враховується через коефіцієнт контактного термічного опору R в умові (13). Згідно умови (13) отримаємо, що перепад температури на внутрішніх поверхнях, пропорційний потокові тепла та R . Потік тепла при такій постановці задачі також має стрибкоподібний характер і змінюється на величину потужності джерел тепла w при переході з шару ① до шару ②.

Якщо нехтувати товщиною включення і спрямувати товщину $h \rightarrow 0$ ($z_1 \rightarrow z_*$, $z_2 \rightarrow z_*$, $z_* \in (z_1; z_2)$), то вплив його на теплообмін можна врахувати залишивши в контактних умовах коефіцієнт R та w , значення яких отримано з врахуванням характеристик включення. Отримані при граничному переході умови називаються умовами неідеального теплообміну.

Задача теплопровідності з неідеальними умовами теплообміну. Використаємо умови неідеального теплообміну (12), (13) для постановки задачі теплопровідності двох контактуючих шарів $\Omega_1 = (0; z_*)$ та $\Omega_2 = (z_*; L)$. Позначимо через $t(z, \tau)$ функцію температури, $\lambda(z)$, $c(z)$ – коефіцієнти теплопровідності та теплоємності у складеному шарі:

$$t(z, \tau) = \begin{cases} t_1(z, \tau), & z \in \Omega_1 \\ t_2(z, \tau), & z \in \Omega_2 \end{cases}, \quad \lambda(z) = \begin{cases} \lambda_1, & z \in \Omega_1 \\ \lambda_2, & z \in \Omega_2 \end{cases}, \quad c(z) = \begin{cases} c_1, & z \in \Omega_1 \\ c_2, & z \in \Omega_2 \end{cases}.$$

Рівняння теплопровідності в області $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ запишемо у вигляді:

$$c(z) \frac{\partial t(z, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(z) \frac{\partial t(z, \tau)}{\partial z} \right) = 0, \quad z \in \Omega, \quad \tau > 0. \quad (14)$$

Початкова умова

$$t(z, 0) = \varphi(z) \quad z \in \Omega. \quad (15)$$

Умови на зовнішніх границях

$$t(0, \tau) = f_0, \quad t(L, \tau) = f_L. \quad (16)$$

Контактні умови (12),(13) при $z = z_*$ набувають вигляду:

$$\left[\lambda(z) \frac{dt(z, \tau)}{dz} \right]_{z=z_*-0} = \frac{1}{R} (t(z_*+0, \tau) - t(z_*-0, \tau)) + \frac{w}{2}. \quad (17)$$

$$\left[\lambda(z) \frac{dt(z, \tau)}{dz} \right]_{z=z_*-0} - \left[\lambda(z) \frac{dt(z, \tau)}{dz} \right]_{z=z_*+0} = w. \quad (18)$$

Розв'язок задачі (14)-(18) – функція $t(z, \tau)$ та тепловий потік при $z = z_*$ матимуть стрибкоподібну зміну. Проведемо декомпозицію лінійної задачі теплопровідності. Для цього представимо шукану функцію $t(z, \tau)$ у вигляді суми

$$t(z, \tau) = t_\varphi(z, \tau) + t_{\tilde{a}}(z, \tau) + t_w(z, \tau), \quad (19)$$

де $t_\varphi(z, \tau)$ – розв'язок рівняння теплопровідності при $w = 0$ в умовах (17),(18) що задовольняє початкову умову (15) і має нульові значення на границях $z = 0$ та $z = L$, $t_{\tilde{a}}(z, \tau)$ – розв'язок задачі теплопровідності з граничними умовами (16)-(18), нульовою початковою температурою та $w = 0$, $t_w(z, \tau)$ – функція температури від джерел тепла з нульовими умовами на границі і при $\tau = 0$.

Кожна функція, що входить у (19) є розв'язком рівняння теплопровідності. Отримаємо їх застосовуючи метод розділення змінних. Представимо $t_\varphi(z, \tau)$ у вигляді ряду

$$t_\varphi(z, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i Z_i(z) \Theta_i(\tau). \quad (20)$$

Підставимо в рівняння теплопровідності складову розв'язку $Z_i(z) \Theta_i(\tau)$ – добуток функцій від координати та від часу. Поділимо на $Z_i(z) \Theta_i(\tau)$ і отримаємо рівність для знаходження $Z_i(z)$ та $\Theta_i(\tau)$ ($i = 1, 2, \dots$)

$$\frac{\dot{\Theta}_i(\tau)}{\Theta_i(\tau)} = \frac{1}{c(z)Z(z)} \frac{d}{dz} \left(\lambda(z) \frac{dZ_i(z)}{dz} \right) \equiv - \left(\frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{\bar{c}}} n_i \right)^2. \quad (21)$$

Праву частину рівності записано зі сталим множником, що забезпечує бажану масштабованість та розмірність власних значень n_i . Через $\bar{\lambda}$, \bar{c} позначено середні значення коефіцієнтів теплопровідності та теплоємності у складеному шарі.

Знайдемо розв'язок рівняння

$$\frac{1}{c(z)Z(z)} \frac{d}{dz} \left(\lambda(z) \frac{dZ_i(z)}{dz} \right) = - \left(\frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{\bar{c}}} n_i \right)^2. \quad (22)$$

Власні функції $Z_i(z)$, як і $t_\phi(z, \tau)$, задовольняють нульові умови на границях

$$Z_i(0) = 0, \quad Z_i(L) = 0. \quad (23)$$

та умови при $z = z_*$, які випливають з умов (17), (18):

$$\left[\lambda(z) \frac{dZ_i(z)}{dz} \right]_{z=z_*-0} = \frac{1}{R} (Z_i(z_*+0) - Z_i(z_*-0)), \quad (24)$$

$$\left[\lambda(z) \frac{dZ_i(z)}{dz} \right]_{z=z_*-0} = \left[\lambda(z) \frac{dZ_i(z, \tau)}{dz} \right]_{z=z_*+0}. \quad (25)$$

Отримуємо власні функції відповідної задачі Штурма-Ліувіля, що мають стрибок першого роду при $z = z_*$

$$Z_i(z) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi n_i}{L} \gamma_1 z\right), & z \in \Omega_1 \\ -\frac{\lambda_1 \gamma_1 \cos\left(\frac{\pi n_i}{L} \gamma_1 z_*\right)}{\lambda_2 \gamma_2 \cos\left(\frac{\pi n_i}{L} \gamma_2 (L - z_*)\right)} \sin\left(\frac{\pi n_i}{L} \gamma_2 (L - z_*)\right), & z \in \Omega_2 \end{cases}. \quad (26)$$

Тут позначено $\gamma_j = \sqrt{\frac{\bar{\lambda} c_j}{\bar{c} \lambda_j}}$, ($j = 1; 2$).

Для знаходження власних значень n_i отримано рівняння $F(n_i) = 0$, де

$$F(n) = \left[\frac{\pi n}{L} \lambda_1 \gamma_1 R \cos\left(\frac{\pi n}{L} \gamma_1 z^*\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{L} \gamma_1 z^*\right) \right] \cos\left(\frac{\pi n}{L} \gamma_2 (L - z^*)\right) + \frac{\lambda_1 \gamma_1}{\lambda_2 \gamma_2} \cos\left(\frac{\pi n}{L} \gamma_1 z^*\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L} \gamma_2 (L - z^*)\right). \quad (27)$$

Зауважимо, що $n_0 = 0$ і при цьому $Z_0(z) = 0$. Функції $Z_i(z)$ ($i = 1, 2, \dots$) ортогональні з ваговим множником $c(z)$, тобто

$$\int_0^L c(z) Z_k(z) Z_l(z) dz \begin{cases} = 0, & k \neq l \\ \neq 0, & k = l \end{cases}. \quad (28)$$

З другого рівняння розділення змінних

$$\dot{\Theta}_i(\tau) + \left(\frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{\bar{c}}} n_i \right)^2 \Theta_i(\tau) = 0 \quad (29)$$

отримаємо, що

$$\Theta_i(\tau) = e^{-\left(\frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{\bar{c}}} n_i \right)^2 \tau}. \quad (30)$$

Оскільки $\Theta_i(0) = 1$, то при $\tau = 0$ умова (15) зводиться до

$\varphi(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i Z_i(z)$. Коефіцієнти σ_i отримуємо розкладаючи $\varphi(z)$ по

системі ортонормованих функцій $Z_i(z) / \|Z_i(z)\|$. Тобто

$$\sigma_i = \frac{1}{\|Z_i(z)\|} \int_0^L \varphi(z) c(z) Z_i(z) dz, \text{ де } \|Z_i(z)\| = \int_0^L c(z) Z_i^2(z) dz. \quad (31)$$

Отримана функція забезпечить для $t(z, \tau)$ виконання початкової умови (15).

Інші доданки у (19) представимо як суму стаціонарного і нестаціонарного розв'язків відповідної задачі теплопровідності, а саме:

$$t_{\bar{a}}(z, \tau) = t_G(z) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i Z_i(z) \Theta_i(\tau), \quad (32)$$

$$t_w(z, \tau) = t_Q(z) + \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i Z_i(z) \Theta_i(\tau). \quad (33)$$

Функція $t_G(z)$ задовольняє граничні умови (16) і має вигляд:

$$t_G(z) = \begin{cases} k_1 z + f_0, & z < \Omega_1 \\ k_1 \lambda_1 \lambda_2^{-1} (z - L) + f_L, & z < \Omega_2 \end{cases}, \quad (34)$$

$$\text{де } k_1 = \frac{f_L - f_0}{R \lambda_1 + z_* + \lambda_1 \lambda_2^{-1} (L - z_*)}.$$

Функція $t_Q(z)$ задовольняє умови (17), (18) з джерелами тепла. Її вигляд

$$t_Q(z) = \begin{cases} k_2 z, & z \in \Omega_1 \\ (\lambda_1 k_2 - w) \lambda_2^{-1} (z - L), & z \in \Omega_2 \end{cases}, \quad (35)$$

$$\text{де } k_2 = \frac{w [R/2 + \lambda_2^{-1} (L - z_*)]}{R \lambda_1 + z_* + \lambda_1 \lambda_2^{-1} (L - z_*)}.$$

Коефіцієнти μ_i , ν_i визначаємо як коефіцієнти розкладів функцій $-t_G(z)$ та $-t_Q(z)$ по $Z_i(z)$ подібно як σ_i за формулами вигляду (31). Підставимо (20),(32),(33) у (19) і отримаємо формулу для обчислення $t(z, \tau)$:

$$t(z, \tau) = t_G(z) + t_Q(z) + \sum_{i=1}^{\infty} (\sigma_i + \mu_i + \nu_i) Z_i(z) \Theta_i(\tau). \quad (36)$$

Таке представлення розв'язку рівняння теплопровідності забезпечує виконання початкових (15) і граничних (16), (17)-(18) умов. При $\tau \rightarrow \infty$ отримуємо стаціонарний режим, оскільки тоді $t(z, \tau) \rightarrow t_G(z) + t_Q(z)$.

Обчислення та дослідження особливостей розв'язку. Проведено обчислення функції температурного поля у шарі з включенням іншого матеріалу, на границі $z = 0$ якого підтримуються постійна температура f_0 , на границі $z = L$ температура рівна $f_L = 0$, а початковий розподіл $\varphi(z) = 0$, що зумовлює $t_\varphi(z, \tau) = 0$. Для обчислень інших функцій приймалися наступні вхідні дані: товщина шару $L = 0,025$ м, коефіцієнти теплопровідності та теплоємності: $\lambda_1 = 0,8 \frac{Вт}{м \cdot К}$,

$c_1 = 1,5 \cdot 10^6 \frac{Дж}{м^3 \cdot К}$, $\lambda_2 = 0,5 \frac{Вт}{м \cdot К}$, $c_2 = 1 \cdot 10^6 \frac{Дж}{м^3 \cdot К}$. Границя розділу $z_* = 0,011$ м чинить термічний опір $R = 0,01 \frac{м^2 \cdot К}{Вт}$ і тут діють дже-

$$\text{рела тепла } w = 100 \frac{Bm}{M^2}.$$

На рис. 2 показано графіки зміни функції температури $t_a(z, \tau)$ по товщині шару отримані при врахуванні термічного опору (суцільні лінії) і без нього, якщо $R=0$ (штрихові лінії), у деякі моменти часу $\tau = 20; 100; 500$ с. На рис. 3 відповідно показані графіки для функції $t_w(z, \tau)$. В обох випадках врахування термічного опору R приводить до стрибка температури (суцільні лінії). Якщо $R=0$, маємо неперервність температури (штрихові лінії). Як показали дослідження величина стрибка залежить від R і зростає з його збільшенням. При цьому стрибок функції температури добре прораховується при великих часах, а при малих функція має пилоподібну зміну в околі $z = z_*$. Як показано в [5], це є наслідком того, що термічний опір, який регулює стрибок температури прийнято постійним.

На рис. 4 приведено вигляд графіки функції $t(z, \tau)$, що отримується як сума функцій, показаних на рис. 2 та рис. 3. При вхідних даних прийнятих для обчислень стрибок спадання однієї функції практично компенсується стрибком зростання іншої. У такому випадку експериментально стрибкоподібна зміна температури не спостерігатиметься. Однак прогини функції температури, особливо при малих часах вказують на наявність на неї впливу поверхні контакту. На рис. 5 приведено графіки функції $t(z, \tau)$ у шарі зі зміненими коефіцієнтами теплопровідності контактуючих шарів. При такому варіанті вхідних даних стрибок функції $t(z, \tau)$ при $z = z_*$ додається від $t_a(z, \tau)$ та $t_w(z, \tau)$.

Слід також зазначити, що функція теплового потоку має стрибок величиною w і при виході на стаціонарний режим приймає постійне значення в області Ω_1 та постійне значення в Ω_2 .

Висновки. Утворення між контактуючими частинами шаруватого тіла тонкого прошарку “збуреного матеріалу”, характеристики якого можуть суттєво відрізнятись від характеристик основних шарів, призводить до стрибка функції температури на границі контакту.

Використовуючи умови неідеального теплообміну між частинами шаруватого тіла, контактний термічний опір, що входить в ці умови, можна наближено отримувати за узагальненими теплофізичними характеристиками і геометричними параметрами тонкого проміжного включення, яке моделює зону контакту. Дія джерел тепла в зоні контакту при одночасному нагріві тіла з поверхні призводить до додаткових локальних екстремумів функції температури всередині тіла та може

вплинути на величину стрибка температури.

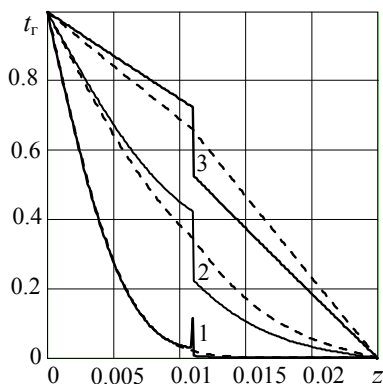


Рис. 2. Зміна температури по товщині складеного шару при нагріві з поверхні. Криві 1-3 відповідають часам $\tau = 20; 100; 500$ с

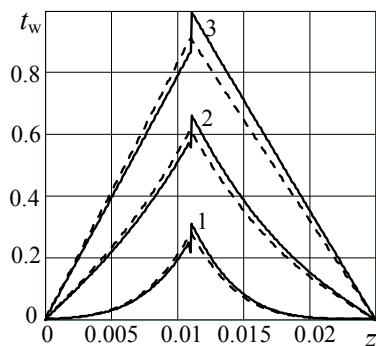


Рис. 3. Зміна температури по товщині складеного шару при нагріві внутрішніми джерелами тепла. Криві 1-3 відповідають часам $\tau = 20; 100; 500$ с

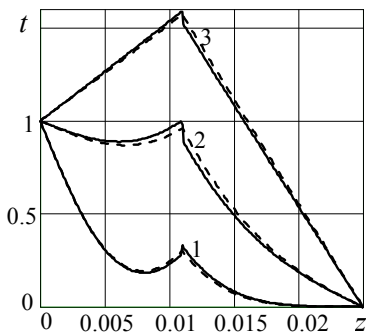


Рис. 4. Зміна температури по товщині шару, якщо $\lambda_1 = 0,8$, $\lambda_2 = 0,5$, криві 1-3 відповідають часам $\tau = 20; 100; 500$ с

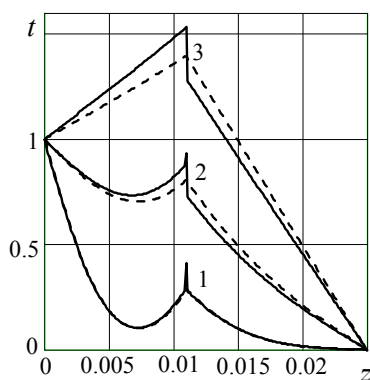


Рис. 5. Зміна температури по товщині шару, якщо $\lambda_1 = 0,5$, $\lambda_2 = 0,8$, криві 1-3 відповідають часам $\tau = 20; 100; 500$ с

1. Меснянкин С. Ю. Современный взгляд на проблемы теплового контактирования твердых тел / Меснянкин С. Ю., Викулов А. Г., Викулов Д. Г. // Успехи физических наук. – 2009. – Т. 179, № 9. – С. 495-970. 2. Підстригач Я. С. Вибрані праці / Підстригач Я. С. – Київ : Наукова думка, 1995. – 460 с. 3. Веселовский В. Б. Контактное термическое сопротивление в элементах конструкций / Веселовский В. Б. // Гидродинамика и процессы тепломассобмена. – Киев : Наукова думка, 1986. – С. 120-125. 4. Веселовский В. Б. Температурные поля многослойных элементов конструкций при воздействии полей различной физической природы / Веселовский В. Б., Берлов А. В. // Металлургическая теплотехника. – Вып 1(16), 2009. 5. Гера Б. В. Моделювання умов неідеального теплообміну контактуючих теплопровідних шарів / Гера Б. В. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – Вып. 16, 2012– С. 52-60. 6. Беляков Н. С. Неидеальный тепловой контакт тел при трении. / Беляков Н. С., Носко А. П. – М. : Книжный дом Либорком, 2010. – 104 с. 7. Belyakov N. S. Mathematical Simulation of Thermal Friction Processes under Conditions of Nonideal Contact. / Belyakov N. S., Nosko A. P. // Heat and Mass Trasfer and Physical Gasdynamics. – 2009. – Vol. 46, No 1. – Pp. 129-136.

Рецензент: д.т.н., професор Бомба А. Я. (НУВГП)

Hera B. V., Doctor of Engineering, Professor, Nykolyn O. V. (Lviv Branch of the Dnepropetrovsk National University named after V. Lazaryan, Lviv)

MATHEMATICAL MODELLING OF NONIDEAL CONDITIONS FOR THERMAL CONTACT OF LAYERS THROUGH THIN INCLUSION

The mathematical modelling of heat interchange through heterogeneous layer composed of homogeneous layers is made. It is assumed that in the locality of interior contact surfaces act the heat sources of constant power and the thermal and physical characteristics are differ from such characteristics of main layers. The near contact region we can see as thin inclusion between heat conductance layers. It is cause of the thermal resistance of contact and motive (occasion) to use conditions of nonideal contact. The solution of thermal conductivity problem with nonideal heat transfer conditions is obtained and analyzed.

Keywords: mathematical model, heat transfer, thermal conductivity.

Гера Б. В., д.т.н., профессор, Николин О. В. (Львовский филиал Днепропетровского национального университета имени академика В. Лазаряна, г. Львов)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСЛОВИЙ НЕИДЕАЛЬНОГО ТЕПЛООВОГО КОНТАКТА СЛОЕВ ЧЕРЕЗ ТОНКОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ

Проведено математическое моделирование процесса теплообмена в кусочно-неоднородном слое, составленном из однородных слоев, в предположении, что в зонах вблизи их контакта действуют источники тепла постоянной мощности, а также теплофизические характеристики значительно отличаются от характеристик контактирующих слоев. Зона контакта представляется как тонкое включение между теплопроводными слоями, что является причиной термического сопротивления и основанием для применения условий неидеального теплообмена. Получено и исследовано решение задачи теплопроводности с использованием условий неидеального теплообмена.

Ключевые слова: математическая модель, теплообмен, теплопроводность.
