УДК 532.536

Костин О. В., соискатель (Орловский государственный университет, г. Орел, Российская Федерация)

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ В АНИЗОТРОПНОМ ОДНОРОДНОМ СЛОЕ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ*

Ставится плоскопараллельная задача эволюции границы раздела жидкостей различных вязкостей в анизотропном однородном слое пористой среды. Эта задача исследуется в случае работы одиночной эксплуатационной скважины.
***Ключевые слова*: скважина, плоскопараллельная задача, жидкость, вязкость.**

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Орловской области в рамках научного проекта № 12-01-97522 р_центра

Плоскопараллельная стационарная фильтрация несжимаемой жидкости в недеформируемом анизотропном однородном слое пористой среды (грунте) постоянной толщины с тензором проницаемости $K = \left(K_{ij}\right),\ i, j = 1{,}2$ может быть описана обобщённым потенциалом φ и функцией тока ψ. Эти функции зависят от декартовых координат x, y, времени t (t – параметр) и удовлетворяют всюду в области фильтрации D (за исключением особых точек течения) системе уравнений [1]:

$$K_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$K_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + K_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad (1)$$

Здесь $\varphi = -\left(p + \rho\Pi\right)/\mu$ (p – давление, μ и ρ – динамическая вязкость и плотность жидкости, Π – потенциал массовой силы). Компоненты тензора проницаемости слоя K_{ij}, $i, j = 1{,}2$ – постоянные величины.

Система уравнений (1) относится к эллиптическому типу, если компоненты тензора проницаемости удовлетворяют условиям

$$K_{11} > 0\,, \quad \left|D_s\right| = K_{11}K_{22} - \left(\frac{K_{12}+K_{21}}{2}\right)^2 > 0\,, \qquad (2)$$

где $\left|D_s\right|$ – определитель симметричной части тензора K.

Поставим плоскопараллельную задачу эволюции границы раздела жидкостей Γ_t на комплексной плоскости $z = x + iy$ (физической плоскости). Граница Γ_t делит область фильтрации D на части D_1 и D_2 ($D = D_1 \cup D_2$). Пусть в области D_1 движется жидкость постоянной вязкости μ_1 и плотности ρ_1, а в области D_2 – вязкости μ_2 и плотности ρ_2. Считаем, что при движении одна жидкость полностью замещает другую (модель «поршневого» вытеснения). Течение жидкости в области D описывает обобщённый потенциал $\varphi(z,t)$ и функция тока $\psi(z,t)$, которые удовлетворяют системе уравнений (1).

Считаем, что на границе раздела жидкостей Γ_t капиллярные силы пренебрежимо малы. Тогда условия непрерывности давления и расхода жидкости на этой границе примут вид [1]:

$$\begin{aligned} \mu_1\varphi^+(z,t) - \mu_2\varphi^-(z,t) &= (\rho_2 - \rho_1)\Pi(z,t), \\ \psi^+(z,t) &= \psi^-(z,t), \quad z \in \Gamma_t. \end{aligned} \qquad (3)$$

Здесь и далее «+» («–») обозначают предельные значения функций при подходе к границе Γ_t со стороны (противоположной стороны) орта нормали $\vec{n}$ (орт $\vec{n}$ направлен внутрь области D_1). Положение границы Γ_t в плоскости z в любой момент времени $t > 0$ задаём параметрическим уравнением (s – параметр)

$$z = z(t,s) \quad \left(x = x(t,s), \quad y = y(t,s)\right), \quad z \in \Gamma_t\,. \qquad (4)$$

В начальный момент времени $t = 0$ положение границы Γ_t известно

$$z_0 = z(0,s) \quad \left(x_0 = x(0,s), \quad y_0 = y(0,s)\right), \quad z_0 \in \Gamma_0\,. \qquad (5)$$

Дифференциальное уравнение движения границы Γ_t имеет вид [1]

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\upsilon^{+}(z,t)+\upsilon^{-}(z,t)}{2}, \quad z\in\Gamma_t . \tag{6}$$

Здесь $\upsilon^{\pm}(z,t)$ – предельные значения комплексной скорости фильтрации $\upsilon(z,t)=\upsilon_x(x,y,t)+i\upsilon_y(x,y,t)$. Компоненты скорости фильтрации υ_x и υ_y определяют первое и второе уравнения (1) соответственно.

Задача эволюции границы Γ_t ставится в плоскости z следующим образом. Задано положение границы Γ_0, потенциал массовой силы $\Pi(z,t)$, вязкости μ_1, μ_2 и плотности ρ_1, ρ_2 жидкостей, тензор проницаемости K. Необходимо найти положение границы Γ_t (4) при $t>0$. Решение задачи состоит в интегрировании системы уравнений (1), (6) при условиях (3) и (5).

Поставленная задача эволюции границы раздела жидкостей решается на вспомогательной плоскости $\zeta=\xi+i\eta$ согласно методу, приведённому в статье [2].

Полагаем, что в каждый момент времени $t\geq 0$ граница раздела жидкостей Γ_t является простой (без самопересечений) гладкой кривой. Следуя [1], на плоскости ζ комплексный потенциал возмущений W_*, как аналитическую функцию в области D', представим интегралом типа Коши по гладкой кривой Γ_t':

$$W_*(\zeta,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_t'}\frac{f(\tau,t)}{\tau-\zeta}d\tau, \quad \zeta\in D' , \tag{7}$$

где $f(\tau,t)$ – вещественная непрерывная на Γ_t' функция. Продолжив непрерывно комплексный потенциал (7) на кривую Γ_t' получим его предельные значения:

$$W_*^{\pm}(\zeta,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_t'}\frac{f(\tau,t)}{\tau-\zeta}d\tau\pm\frac{f(\zeta,t)}{2}, \quad \zeta\in\Gamma_t' , \tag{8}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Функция (7) удовлетворяет условию в бесконечности [5]. Подставив предельные значения в граничные условия получим, что второе из условий выполняется, а из первого имеем интегральное уравнение для функции $f(\zeta,t)$

$$f(\zeta,t)-\frac{\lambda}{\pi}\int_{\Gamma_t'} f(\tau,t)\Omega(\tau,\zeta)d\ell_\tau = 2\lambda\varphi_0(\zeta,t), \zeta\in\Gamma_t' \tag{9}$$

Где
$$\Omega(t,\zeta)=\frac{\partial}{\partial\ell_\tau}\left[\arg(\tau-\zeta)-\sqrt{|D_a|/|D_s|}\ln|\tau-\zeta|\right],$$

$\lambda=(\mu_2-\mu_1)/(\mu_2+\mu_1)$, $\lambda\in(-1,1)$. Используя формулу

$$\upsilon(\zeta,t)=2\left[\sqrt{|D_s|}-i\sqrt{|D_a|}\right]\frac{\partial\varphi(\zeta,t)}{\partial\bar{\zeta}}=-2i\frac{\partial\psi(\zeta,t)}{\partial\bar{\zeta}}, \tag{10}$$

где $2\partial/\partial\bar{\zeta}=\partial/\partial\xi+i\,\partial/\partial\eta$ и выражение (7), находим предельные значения сопряжённой скорости возмущений [1]

$$\bar{\upsilon}_*^{\pm}(\zeta,t)=\frac{|D|}{\sqrt{|D_s|}}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_t'}\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial\tau}\frac{d\tau}{\tau-\zeta}\pm\frac{\partial f(\zeta,t)}{\partial\zeta}\right], \quad \zeta\in\Gamma_t'. \tag{11}$$

Дифференциальное уравнение движения границы Γ_t' примет вид

$$\frac{d\bar{\zeta}}{dt}=\left(1-|\kappa|^2\right)\left[\bar{\upsilon}_0(\zeta,t)+\frac{|D|}{2\pi\sqrt{|D_s|}i}\int_{\Gamma_t'}\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial\tau}\frac{d\tau}{\tau-\zeta}\right], \quad \zeta\in\Gamma_t'. \tag{12}$$

Из уравнения (12) следуют два дифференциальных вещественных уравнения движения границы Γ_t' на вспомогательной плоскости ζ :

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt}&=\left(1-|\kappa|^2\right)\upsilon_{0\xi}+\left(1-|\kappa|^2\right)\frac{|D|}{2\pi\sqrt{|D_s|}}\int_{\Gamma_t'}\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial\ell_\tau}\left[\frac{\partial\arg(\tau-\zeta)}{\partial\ell_\tau}\cos\alpha-\frac{\partial\ln|\tau-\zeta|}{\partial\ell_\tau}\sin\alpha\right]d\ell_\tau,\\ \frac{d\eta}{dt}&=\left(1-|\kappa|^2\right)\upsilon_{0\eta}+\left(1-|\kappa|^2\right)\frac{|D|}{2\pi\sqrt{|D_s|}}\int_{\Gamma_t'}\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial\ell_\tau}\left[\frac{\partial\arg(\tau-\zeta)}{\partial\ell_\tau}\sin\alpha+\frac{\partial\ln|\tau-\zeta|}{\partial\ell_\tau}\cos\alpha\right]d\ell_\tau,\\ &\zeta=\xi+i\eta\in\Gamma_t'.\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $\upsilon_0(\zeta,t)=\upsilon_{0\xi}(\xi,\eta,t)+i\upsilon_{0\eta}(\xi,\eta,t)$ – невозмущённое поле скоростей потенциала W_0, α – угол между ортом касательной к Γ_t' и осью $O\xi$.

Исследование задачи эволюции границы раздела жидкостей различных вязкостей в случае анизотропного однородного слоя пористой среды сводится к решению системы уравнений (9), (13) при заданном начальном условии.

Следуя [5], систему уравнений (9) и (13) решается численно на основе метода дискретных особенностей

Исследуем эволюцию границы раздела жидкостей различных вязкостей к скважине, расположенной в анизотропном однородном слое грунта на плоскости z. Течение жидкости создаёт эксплуатационная скважина дебита q, которая расположена в начале координат (рис. 1). Её работу моделируем точечным стоком мощности $-q$ (q – модуль мощности). Полагаем, что граница Γ_0 – окружность радиуса R, центр которой находится в центре скважины. Уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$. Внутри окружности Γ_0 находится область D_2, содержащая жидкость вязкости μ_2, а вне – область D_1, занятая жидкостью вязкости μ_1. Контур скважины на физической плоскости представляет собой окружность малого радиуса R_c ($R_c << R$) с центром в точке расположения скважины.

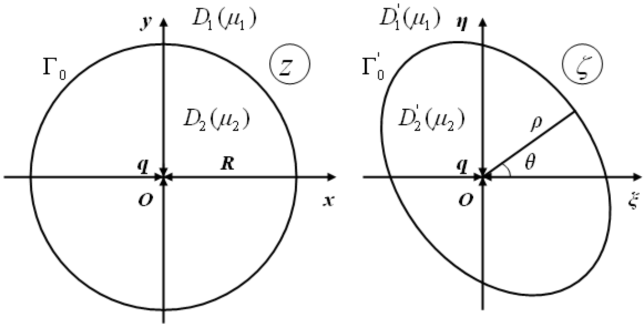

Рис. 1. Постановка задачи

Для модели «разноцветных» жидкостей время достижения границей Γ_t скважины определяется по формуле

$$T = \frac{\pi}{q} \frac{(1-|k|)R^2 - (1+|k|)R_c^2}{1+|k|}. \tag{14}$$

Так как $R_c << R$, то пренебрегая слагаемым $(1+|k|)R_c^2$ в (14), получим известную формулу $T = \frac{1-|\kappa|}{1+|\kappa|}\frac{\pi R^2}{q}$ [3]. В качестве характерного размера выберем радиус окружности Γ_0 ($R = 1$). За характерное время примем время (14) в случае изотропного грунта ($|\kappa| = 0$, $T_0 = \frac{\pi R^2}{q}$). Тогда при расчётах следует положить $q = \pi$.

Введём параметры $\alpha = \frac{K_{22}}{K_{11}}$, $\beta = \frac{K_{12}+K_{21}}{2K_{11}}$, $\gamma = \frac{K_{12}-K_{21}}{2K_{11}}$.

Параметр $\alpha \in (0,+\infty)$ характеризует различие компонентов тензора проницаемости, расположенных на главной диагонали, параметр β показывает наличие в тензоре проницаемости компонент K_{12} и K_{21}, а параметр γ характеризует различие компонент K_{12} и K_{21}. Учитывая, что $\kappa = \left[K_{22} - K_{11} - i\left(K_{12} + K_{21}\right)\right] \Big/ \left(K_{22} + K_{11} + 2\sqrt{|D_s|}\right)$, имеем $|k| = \frac{\sqrt{(\alpha-1)^2 + 4\beta^2}}{\alpha + 1 + 2\sqrt{\alpha - \beta^2}}$, при этом должно выполняться условие $\beta^2 < \alpha$.

Исследуем зависимость времени *T* достижения границей скважины от параметров α, β и γ.

Пусть параметры α и β остаются неизменными, а γ изменяется от 0 до 1. Тем самым исследуем зависимость времени достижения скважины от различия компонент K_{12} и K_{21}. Положим $\alpha = 2$ ($K_{11} = 1$, $K_{22} = 2$), $\beta = 1$ (K_{12} и K_{21} варьируются от 0 до 1 так, чтобы их сумма была постоянной).

В случае модели «разноцветных жидкостей» ($\lambda = 0$) время Т не зависит от параметра γ, что согласуется с результатами исследований. Когда же вязкости жидкостей в областях D_1 и D_2 различны, то время достижения границей скважины зависит от γ. На рис. 2 показаны графики зависимости времени Т от γ при $\lambda = 0$, $\lambda = 0.5$ и $\lambda = -0.5$. Из графиков видно, что при $\lambda = 0.5$ время уменьшается с ростом параметра γ, что объясняется «закруткой» границы при приближении её к скважине и изменением направления «прорыва». При $\lambda = -0.5$ время достижения границей скважины увеличивается по сравнению с γ=0, что вызвано изменением направления прорыва границы при увеличении γ и различием вязкостей, соответственно можно сделать вывод, что в данном случае влияние анизотропии проявляется в большей мере, чем при $\lambda = 0,5$.

Исследуем влияние вязкости жидкостей на продвижение границы Γ_t.

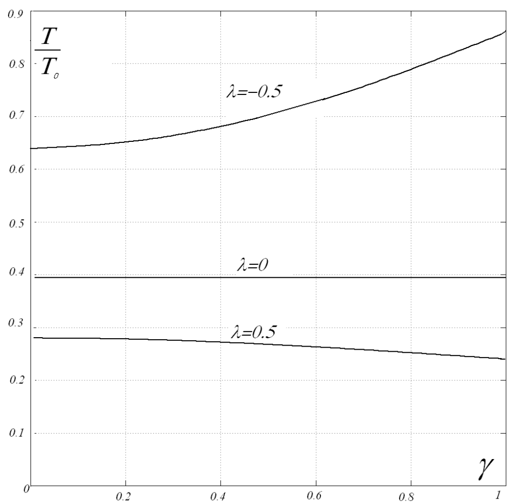

Рис. 2. Зависимость времени T от параметра γ

В момент времени *T*, когда вытесняющая жидкость попадает в скважину, скважину отключают. При этом важно знать объём и конфигурацию целика не извлечённой жидкости, для того чтобы знать, как дальше эксплуатировать месторождение.

Так как исследуется слой толщины *H*=1, то объём не извлечённой жидкости совпадает с площадью целика. На рисунках 3-5 построены целики не извлечённой жидкостей для различных значений параметра λ при $\alpha = 2$ ($K_{11} = 1$, $K_{22} = 2$), $\beta = 1$, $\gamma = 1$ ($K_{12} = 2$, $K_{21} = 0$).

Видим, что с уменьшением λ площадь оставшегося целика уменьшается. На рис. 3 показана эволюция границы Γ_t при $\lambda = 0$, $K_{11} = 1$, $K_{22} = 2$, $K_{12} = 2, K_{21} = 0$. В этом случае время $T = 0{,}394$. На рис. 4 показана эволюция границы Γ_t при $\lambda = 0{,}5$, $K_{11} = 1$, $K_{22} = 2$, $K_{12} = 2, K_{21} = 0$. В этом случае время $T = 0{,}24$. Картина течения похожа на случай $\lambda = 0$, но стягивание происходит быстрее. Это согласуется с результатами работы [4]. На рис. 5 показана эволюция границы Γ_t при $\lambda = -0{,}5$, $K_{11} = 2$, $K_{22} = 1$, $K_{12} = 2, K_{21} = 0$. В этом случае время $T = 0{,}416$. Картина течения похожа на случай $\lambda = 0$, но стягивание происходит медленнее. Процесс вытеснения в этом случае неустойчив. На границе возникают возмущения, которые удаётся сгладить интерполяцией положения границы линейными сплайнами и её переразбиением. При $\lambda \to -1$ неустойчивость движения границы усиливается.

Зная время T вычислим площадь S оставшегося целика. Для этого воспользуемся уравнением неразрывности, которое в нашем случае примет вид: $S_{ост} = S_0 - S_T$, где $S_0 = \pi R^2$ и $S_T = Q \cdot T$ – площади первоначального месторождения и извлечённой за время T жидкости, $S_{ост}$ – площадь целика вытесняющей жидкости, оставшейся в момент времени T. Разделив на S_0 и умножив на 100% правую и левую часть последнего уравнения получим $\eta = \frac{S_{ост}}{S_0} \cdot 100\% = (1 - \frac{S_T}{S_0}) \cdot 100\%$.

Полученный параметр η показывает процент жидкости не извлечённой из месторождения. В таблице приведены полученные значения η для различных λ, β и γ при $\alpha = 2$.

Таблица

Влияние параметров на относительный объём не извлечённой жидкости

λ	0.5	0.25	0	-0.25	-0.5
$\alpha = 2, \beta = 0, \gamma = 0$	45.5%	38.2%	29.2%	17.9%	8.9%
$\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 0$	72%	67.4%	60.6%	51.3%	36.1%
$\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 1$	76%	71%	60.6%	40.4%	14.1%

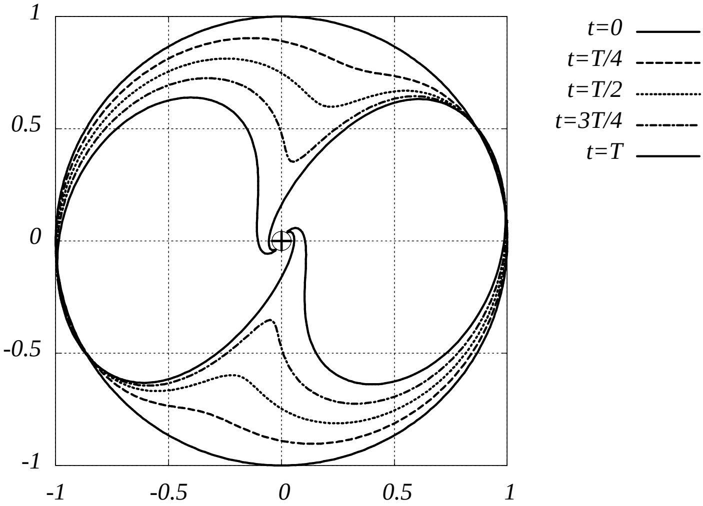

Рис. 3. Эволюция границы раздела жидкостей при $\lambda = 0$

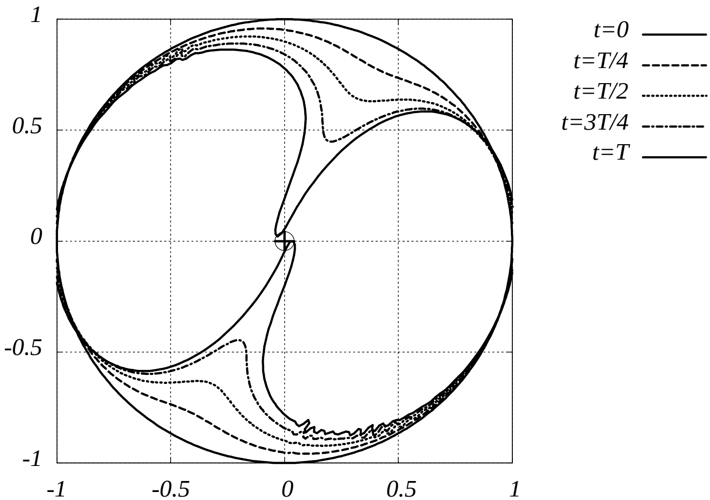

Рис. 4. Эволюция границы раздела жидкостей при $\lambda = 0,5$

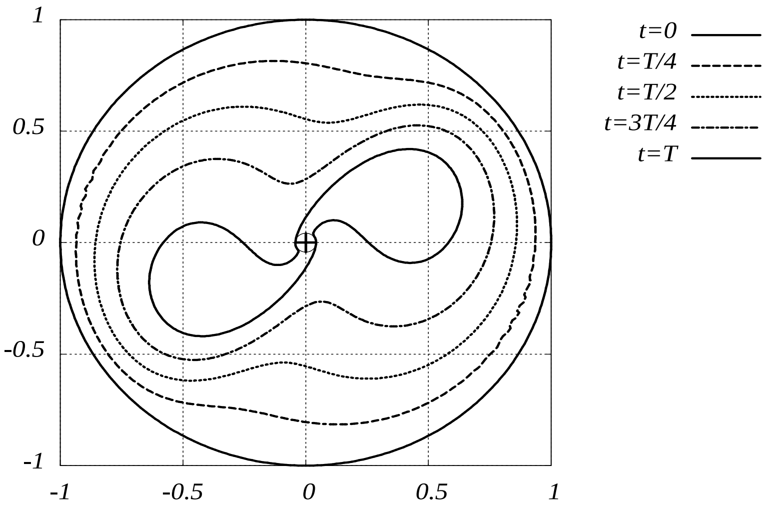

Рис. 5. Эволюция границы раздела жидкостей при $\lambda = -0{,}5$

Выводы. Из таблицы и графиков видно, что различие вязкостей жидкостей λ и наличие недиагональных компонентов K_{12} и K_{21} тензора K сильно влияет на объём жидкости извлечённой из месторождения. Причём коэффициент β влияет гораздо сильнее, чем γ, который заметно проявляет своё влияние лишь при $\lambda < 0$.

1. Пивень В. Ф. Двумерная задача эволюции границы раздела жидкостей в анизотропном слое пористой среды [Текст] / В. Ф. Пивень // Труды Международных школ-семинаров «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» / ГОУ ВПО «Орловский государственный университет». – 2009. – Вып. 7. – С. 81-91. **2.** Федяев Ю. С. Математическое моделирование плоскопараллельной эволюции границы раздела жидкостей в однородном анизотропном слое пористой среды. [Текст] / Ю. С. Федяев // Труды Международных школ-семинаров «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» / ГОУ ВПО «Орловский государственный университет». – 2010. – Вып. 8. – С. 93-104. **3.** Пивень В. Ф., Федяев Ю. С. Математическое моделирование эволюции границы раздела «разноцветных» жидкостей в анизотропном однородном слое пористой среды // Ученые записки Орловского государственного университета, 2010. – № 2(36). Серия: Естественные, технические и медицинские науки. – С. 49-55. **4.** Никольский Д. Н. Математическое моделирование работы системы скважин в однородных и неоднородных слоях с подвижной границей раздела жидкостей различной вязкости. Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. – Орёл, 2001. – 191 с. **5.** Пивень В. Ф., Костин О. В. Исследование плоскопараллельной задачи эволюции границы раздела жидкостей в анизотропной однородной пористой среде // Ученые записки Орловского государственного университета, 2012. № 6 (50). Серия: Естественные, технические и медицинские науки. – С. 64-71.

Рецензент: д.т.н., профессор Бомба А. Я. (НУВХП)

Kostin O. V., Applicant (Orel State University, Orel, Russian Federation)

RESEARCH OF PLANE-PARALLEL PROBLEM OF THE EVOLUTION OF INTERFACES BETWEEN FLUIDS IN ANISOTROPIC HOMOGENEOUS LAYER OF POROUS MEDIUM

We pose the problem of plane-parallel evolution of the interface between fluids of different viscosities in anisotropic homogeneous layer of porous medium. This problem is investigated in case of a single production well.
***Keywords*: well, a plane-parallel evolution, fluid, viscosity.**

Костін О. В., здобувач (Орловський державний університет, м. Орел, Російська Федерація)

ДОСЛІДЖЕННЯ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОЇ ЗАДАЧИ ЕВОЛЮЦІЇ ГРАНИЦІ РОЗДІЛУ РІДИН В АНІЗОТРОПНОМУ ОДНОРІДНОМУ ШАРІ ПОРИСТОГО СЕРЕДОВИЩА

Ставиться плоскопаралельна задача еволюції границі розділу рідин різних вязкостей в анізотропному однорідному шарі пористого середовища. Це завдання досліджується у випадку роботи одиночної експлуатаційної свердловини.
***Ключові слова*: свердловина, плоскопаралельна задача, рідина, в'язкість.**
