

УДК 539.4:621.6

**Можаровский В. В., д.т.н., профессор, Марьин С. А., к.ф.-м.н., Кузьменков Д. С., к.т.н.** (Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, г. Гомель, Республика Беларусь)

## **РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СЛОИСТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

**В работе рассматривается реализация осесимметричной термоупругой задачи для слоистых цилиндрических конструкций из анизотропных материалов, решение которой сводится к системы линейных алгебраических уравнений. Для решения рассматриваемой задачи (расчета напряженно-деформируемого состояния) разработана автоматизированная методика и создан программный комплекс. Также приводятся примеры расчета по МКЭ.**

**Ключевые слова:** термоупругая задача, анизотропные материалы, цилиндрические конструкции.

**Введение.** В настоящее время достаточно актуальной является разработка современных методов оценки ресурса оборудования (сосудов, трубопроводов) из новых материалов, в том числе композиционных, на основе имеющейся диагностической информации. Опыт создания таких комплексных программ и методик уже имеется [1, 2]. Следовательно, разработка программного комплекса на ПЭВМ, позволяющего автоматизировать данный процесс, является довольно актуальной.

При расчете напряженно-деформированного состояния трубопроводов и систем трубопроводов из-за сложной геометрии и особенностей конструкционного строения стенок труб, а также в связи с необходимостью моделирования различных слоистых тел применяется конечно-элементный анализ в двухмерных постановках. Ниже представлена реализация решений расчета слоистых труб согласно алгоритма [3, 5].

**1. Постановка задачи.** Пусть имеется слоистая цилиндрическая толстостенная труба (внутренний радиус –  $r_a$ , внешний –  $r_b$ ,  $n$  – число слоев трубы). Труба находится под действием равномерно распределенной термосиловой нагрузки:  $p$  – интенсивность внутреннего нагружения;  $\Delta T$  – температура нагружения. Таким образом, рассматривается осесимметричная термоупругая задача. Осевые деформации

$\varepsilon_z^{(i)}$  для всех слоев слоистой трубы считаем постоянными и равными некоторой константе  $\varepsilon_0$ , которую требуется определить.

Таким образом, для  $i$ -го анизотропного слоя слоистой цилиндрической трубы справедливы следующие соотношения:

$$\sigma = A^i \varepsilon - \xi \Delta T, \quad (1)$$

где  $\sigma = (\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z)^T$  и  $\varepsilon = (\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z)^T$ , – тензоры напряжений и

деформаций соответственно,  $\xi = (\xi_r, \xi_\theta, \xi_z)^T$ ,  $A^i = \begin{pmatrix} A_{11}^i & A_{12}^i & A_{13}^i \\ A_{21}^i & A_{22}^i & A_{23}^i \\ A_{31}^i & A_{32}^i & A_{33}^i \end{pmatrix}$ .

$$\xi = \alpha^{(i)} \varepsilon, \quad (2)$$

где  $\alpha_r^{(i)}$ ,  $\alpha_\theta^{(i)}$ ,  $\alpha_z^{(i)}$  – коэффициенты температурного расширения в  $i$ -ом слое, в направлении  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  соответственно.

Подставляя выражения для напряжений в уравнения равновесия и используя уравнения Коши, получаем неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 u_r^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial r} - \frac{A_{22}^{(i)} / A_{11}^{(i)}}{r^2} u_r^{(i)} = \frac{\alpha^{(i)} \varepsilon_0}{r} + \frac{\eta^{(i)} \Delta T}{r}, \quad (3)$$

где

$$\alpha^{(i)} = \left( A_{23}^{(i)} - A_{13}^{(i)} \right) / A_{11}^{(i)}, \quad (4)$$

$$\eta^{(i)} = \left( \xi_r^{(i)} - \xi_\theta^{(i)} \right) / A_{11}^{(i)}.$$

В результате решения дифференциального уравнения (1.3), получены следующие аналитические решения:

В случае когда  $A_{22}^{(i)} / A_{11}^{(i)} > 0$ ,  $k = \sqrt{A_{22}^{(i)} / A_{11}^{(i)}}$ .

а)  $k \neq 1$ , материал анизотропен

$$u_r^{(i)} = C_1^{(i)} r^{k^{(i)}} + C_2^{(i)} r^{-k^{(i)}} + \frac{(\alpha^{(i)} \varepsilon_0 + \eta^{(i)} \Delta T) r}{1 - k^2}, \quad (5)$$

б)  $k = 1$ , материал изотропный или изотропный в плоскости  $r - \theta$

$$u_r^{(i)} = C_1^{(i)} r + C_2^{(i)} r^{-1} + \frac{(\alpha^{(i)} \varepsilon_0 + \eta^{(i)} \Delta T) r}{2} \ln(r). \quad (6)$$

В случае, когда  $A_{22}^{(i)} / A_{11}^{(i)} < 0$ , решение имеет следующий вид:

$$u_r^{(i)} = C_1^{(i)} \sin(k^{(i)} \ln r) + C_2^{(i)} \cos(k^{(i)} \ln r) + \frac{(\alpha^{(i)} \varepsilon_0 + \eta^{(i)} \Delta T) r}{1 + k^2}, \quad (7)$$

где  $\tilde{N}_1^{(i)}, \tilde{N}_2^{(i)}, \varepsilon_0$  – искомые коэффициенты, которые находятся из граничных условий:

1. Граничные условия силового нагружения:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)}(r_a) &= -p, \\ \sigma_r^{(n)}(r_b) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

2. Условия непрерывности перемещений и радиальных напряжений на границе раздела слоев:

$$\begin{aligned} u_r^{(i)}(r_i) &= u_r^{(i+1)}(r_i), \quad i = \overline{1, n}, \\ \sigma_r^{(i)}(r_i) &= \sigma_r^{(i+1)}(r_i), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (9)$$

3. Для цилиндрической слоистой трубы с закрытыми концами справедливо следующее соотношение:

$$2\pi \sum_{i=1}^n \int_{r_i}^{r_{i+1}} \sigma_z^{(i)}(r) r dr = \pi r_a^2 p. \quad (10)$$

На основании полученных аналитических выражений для перемещений (3–7), с учетом уравнений связи Коши и закона Гука (1)–(2), аналитические выражения для напряжений в случае, когда, материал анизотропен,  $A_{22}^{(i)} / A_{11}^{(i)} > 0$ ,  $k \neq 1$  строятся аналогично [3].

На основании граничных условий (8)–(10) получаем систему линейных алгебраических уравнений  $2n+1$  уравнений с  $2n+1$  неизвестными  $C_j^{(i)}, \varepsilon_0$ , решая которую получаем решение искомой задачи термоупругости.

**2. Пример численных исследований.** На основании описанной выше методики разработан программный модуль CalcMultilayerPipe входящий в состав общего программного продукта PipeSolutions. Общий вид разработанного программного модуля CalcMultilayerPipe приведен на рисунке 1.

С использованием программы CalcMultilayerPipe был произведен расчет напряженно-деформированного состояния слоистой цилиндрической трубы (Наружный диаметр стальной трубы (3 слой) – 219 мм; материалы: 1 – полиэтилен, толщина – 5 мм; 2 – пенополиуретан, толщина – 50 мм; 3 – сталь (ст-20), толщина – 5 мм), находящейся под действием внутреннего давления 10 МПа и температуры 100°С.

На рисунке 2 представлена картина распределения напряжений  $\sigma_x$  в слоистой трубе. Здесь и далее напряжения представлены в фрагменте, в относительных величинах  $\sigma' = \sigma / p$ . Максимальные значения на-

пряжений  $\sigma_x$  сосредоточены на внутренней поверхности трубы и достигают значения  $42p$ . Распределение напряжений  $\sigma_y$ , представлено на рисунке 3. Максимальная абсолютная величина напряжений составляет  $1.5p$ . В целом напряжения  $\sigma_y$  принимают значения в следующем диапазоне: от минус  $1.1p$  до плюс  $1.5p$ .

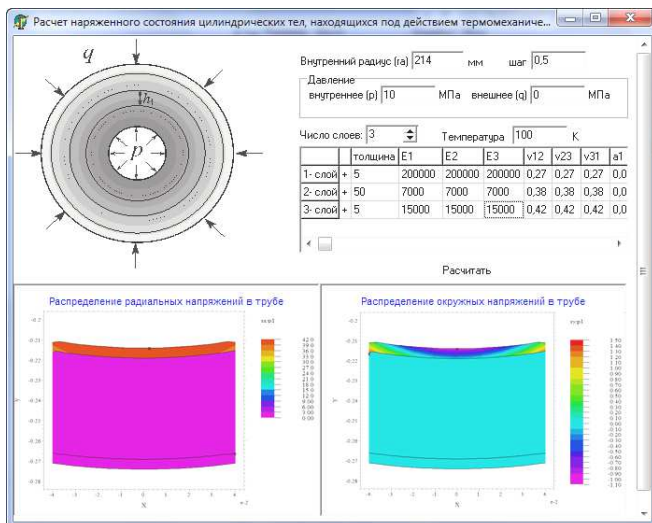


Рис. 1. Общий вид программы

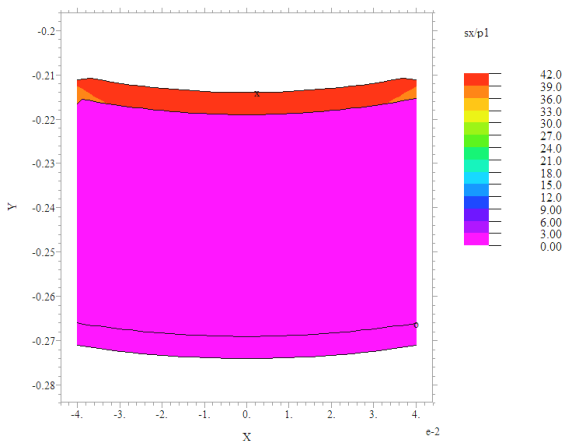


Рис. 2. Распределение напряжений  $\sigma_x$

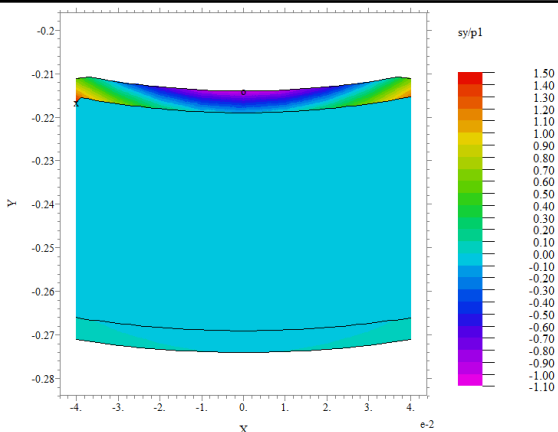


Рис. 3. Распределение напряжений  $\sigma_y$

Аналогично был построен график распределения полей касательных напряжений  $\tau_{xy}$ , на котором четко прослеживается симметричный характер ( $\tau_{xy}$  принимают значения в диапазоне: от минус  $8p$  до плюс  $8p$ ).

**3. Реализация расчета напряжений многослойных труб.** Будем считать, что  $E_y = E_z$ ,  $G_{yy} = G_{zz}$ ,  $\nu_{zx} = \nu_{yx}$ . Напряжения определялись аналогично [3]. Было просчитано множество различных примеров (различные материалы, давление и т.д.). Рассмотрим один из них.  $r_0 = 0.05\text{мм}$ ,  $r_1 = 0.052\text{мм}$ ,  $r_2 = 0.072\text{мм}$ ,  $r_a = 0.074\text{мм}$ ,  $\Delta T = 100\text{K}$ ,  $p_0 = 0.1\text{ГПа}$ . Названия и характеристики материалов труб приведены в таблице.

Таблица

Характеристики материалов для примера

Свойства	Т 300/934	Резина	Е-стекло/эпокс.
$E_x$ (GPa)	141.6	1.2	43.4
$E_y$ (GPa)	10.7	1.2	15.2
$G_{zz}$ (GPa)	3.88	0.46	6.14
$\nu_{yx}$	0.268	0.30	0.29
$\nu_{zy}$	0.495	0.30	0.38

продолжение таблицы

$\alpha_x (10^{-6} K^{-1})$	0.006	110	2.32
$\alpha_y (10^{-6} K^{-1})$	30.04	110	35.19
$\phi$	60	0	60

Ниже на рисунках 4, 5 приведены полученные результаты для рассматриваемого примера ( $r$  приведено в мм., а  $\sigma_r^{(k)}$ ,  $\sigma_\theta^{(k)}$  в МПа, аналогичные графики построены и для  $\sigma_z^{(k)}$ ). На основании полученных результатов можно сделать вывод, что увеличение давления пропорционально ведет к увеличению  $\sigma_r^{(k)}$ ,  $\sigma_\theta^{(k)}$ ,  $\sigma_z^{(k)}$ . Разработанный программный комплекс позволяет свободно варьировать материалами покрытия труб и их характеристиками и показывает правдоподобные результаты.

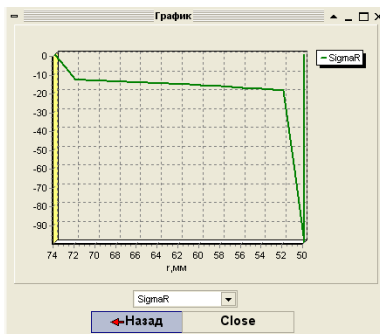


Рис. 4. График зависимости  $\sigma_r^{(k)}$  от  $r$

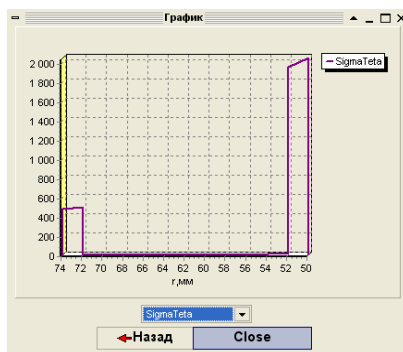


Рис. 5. График зависимости  $\sigma_\theta^{(k)}$  от  $r$

**4. Реализация по МКЭ.** Исследуем напряженно-деформированное состояние слоистой цилиндрической трубы на упругом основании, находящейся под действием внутреннего давления. При исследовании напряженно-деформированного состояния сделаем следующие допущения: 1) труба лишена дна и имеет длину, значительно превышающую наружный диаметр; 2) давление в трубе равномерно распределено по всей длине; 3) геометрия слоистости и неоднородности неизменна по всей длине трубы; 4) упругая опора лежит на жестком основании.

Расчет проведем с использованием аппарата конечно-элементного моделирования. Разбиение расчетной области, производим нерегулярной сеткой, треугольными конечными элементами. Увеличение количества конечных элементов в местах концентрации напряжений позволяет достичь наибольшей точности при расчетах. Общая схема нерегулярной дискретизации представлена на рисунке 6.

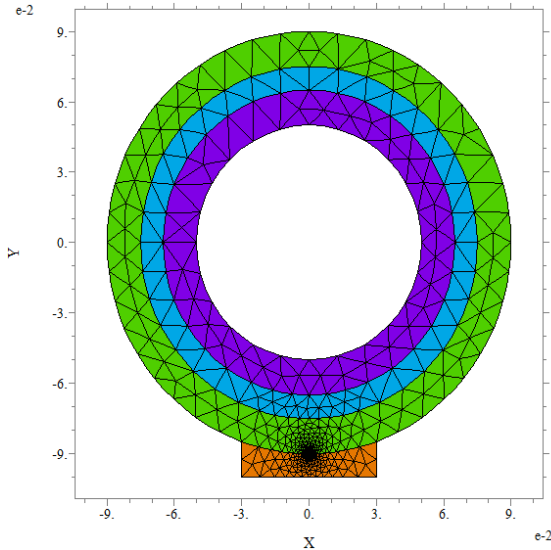


Рис. 6. Общая схема расчета

На рисунке 7 представлена картина распределения напряжений  $\sigma_x$ . Максимальные значения напряжений  $\sigma_x$  сосредоточены на внутренней поверхности трубы непосредственно над опорой и в противоположной стороне (сверху) и достигают значения  $3.6r$ , что в три раза больше чем минимальные напряжения, которые также расположены внутренней поверхности по обе стороны от оси  $Ox$  трубы. Аналогичные

графики были построены и для  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ .

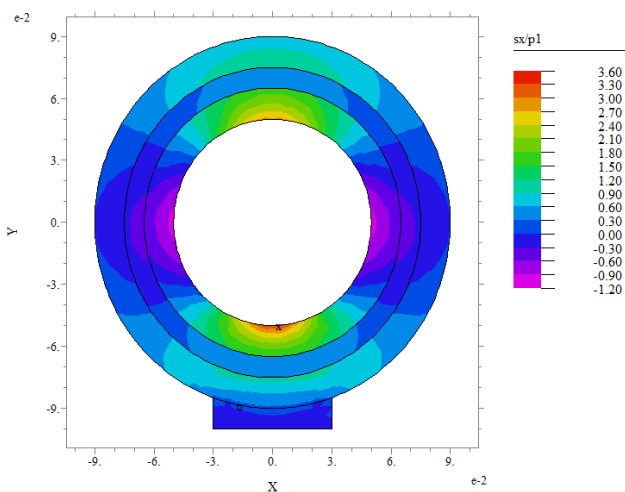


Рис. 7. Распределение напряжений  $\sigma_x$

Применение МКЭ позволяют получить достаточно полную и достоверную информацию о состоянии труб из композитных материалов.

**Выводы.** Для рассматриваемой в работе осесимметричной термоупругой задачи произведен расчет напряженно-деформированного состояния. Разработана автоматизированная методика и создан программный комплекс для нахождения напряжений и деформаций слоистых цилиндрических конструкций из анизотропных материалов. В статье приведены примеры экспериментальных исследований, в том числе и с помощью метода конечных элементов. На основании полученных результатов можно сделать вывод, что увеличение давления пропорционально ведет к увеличению  $\sigma_r^{(k)}$ ,  $\sigma_\theta^{(k)}$ ,  $\sigma_z^{(k)}$ . Исходя их полученных результатов в примерах можно сделать вывод, что при уменьшении угла наклона волокон  $\phi$  с той стороны, где угол уменьшается,  $\sigma_\theta^{(k)}$  увеличивается, а с противоположной – уменьшается. Для анализа результатов расчета трубопроводов по реализации программных разработок применительно к техническим приложениям был использован разработанный ранее программный комплекс [4]. Описанную в статье методику и программный комплекс можно легко применить на другие трубопроводные системы, использующие новые материалы, в том числе и композиционные.

1. Можаровський В. В. Концепція автоматизації процесу контролю технології-



чного стану промислових трубопровідних систем, посудин і резервуарів / В. В. Можаровський, С. А. Мар'їн, І. В. Коробійчук, Н. А. Мар'їна // Вісник Національного університету «Львівська політехніка» Інформаційні системи і мережі». – 2011. – № 699. – С. 175–184. **2.** Можаровский В. В. Программный комплекс контроля и диагностики сосудов и трубопроводов / В. В. Можаровский, С. А. Мар'їн, В. А. Казак, В. В. Орлов // Техническая диагностика и неразрушающий контроль. – 2002. – №1. – С. 28–31. **3.** Xia M. Analysis of filament-wound fiber-reinforced sandwich pipe under combined internal pressure and thermomechanical loading / M. Xia, K. Kemmochi, H. Takayanagi // Comp. Structures. – 2001. – № 51. – P. 273–283. **4.** Можаровский В. В. Автоматизированная методика определения характеристик материалов для труб с ППУ-ОЦМ золяцией / В. В. Можаровский, Д. С. Кузьменков, С. В. Шилько // Вестник Черниговского гос. технологич ун-та. Сер. тех. наук. – 2012. – № 3(59). – С. 42–47. **5.** Можаровский В. В. Напряженно-деформированное состояние слоистых цилиндрических труб / В. В. Можаровский, С. А. Мар'їн, Н. А. Мар'їна // Вестник ХНТУ. – 2008. – № 2(31). – С. 304–309.

Рецензент: д.т.н., профессор Бомба А. Я. (НУВХП)

---

**Mozharovskiy V. V., Doctor of Engineering, Professor, Marjin S. A., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Kuzmenkov D. S., Candidate of Engineering (Gomel State University named F. Scorina Gomel, Belarus)**

### **CALCULATION OF AN INTENSE-DEFORMED STATUS OF LAYERED CYLINDRICAL DESIGNS FROM ANISOTROPIC MATERIALS**

**In article realization of an axially symmetric thermoelastic problem for layered cylindrical designs from anisotropic materials which decision is reduced to the decision of system of the linear algebraic equations is considered. The automated technique is developed for the decision of a considered problem (calculation of an intense-deformable condition) and the program complex is created. Also examples of calculation on a MFE are brought.**

**Keywords:** thermoelastic problem, anisotropic materials, cylindrical structure.

---

**Можаровський В. В., д.т.н., професор, Мар'їн С. А., к.ф.-м.н., Кузьменков Д. С., к.т.н. (Гомельський державний університет імені**

Ф. Скорини, м. Гомель, Республіка Білорусь)

## **РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ШАРУВАТИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ КОНСТРУКЦІЙ ІЗ АНІЗОТРОПНИХ МАТЕРІАЛІВ**

**В роботі розглядається реалізація осесиметричної задачі термopужності для шаруватих циліндричних конструкцій з анізотропних матеріалів, рішення якої зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Для рішення даної задачі (розрахунку напружено-деформованого стану) розроблено автоматизовану методика та створено програмний комплекс. Також приведені приклади розрахунку по МКЕ.**

**Ключові слова:** задача термopужності, анізотропні матеріали, циліндричні конструкції.

---