

УДК 539.3

Шинкарчук Н. В., к.т.н., викладач (Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне)

**КОНТАКТ БЕРЕГІВ РОЗРІЗУ МІЖ НЕСКІНЧЕННОЮ ІЗОТРОПНОЮ ПЛАСТИНКОЮ І ЖОРСТКИМ ДИСКОМ**

Досліджується напружений стан кусково-однорідної пластинки з криволінійним розрізом на лінії розділу матеріалів за умови контактування їхніх берегів.

**Ключові слова:** ізотропна пластинка, жорсткий диск, зона спаю.

**Вступ.** Міцність кусково-однорідних пластин як конструктивних елементів машин і споруд в значній мірі залежить від наявності на лінії розділу матеріалів дефектів типу тріщин. Контактні задачі для однорідних і кусково-однорідних пластин з розрізами по дузі кола, які перебувають в умовах узагальненого плоского напруженого стану, зведенням до задачі лінійного спряження [1] розглянуто в роботах [2, 3]. Розв'язок задачі про передачу силового навантаження від абсолютно жорсткого диска до контуру еліптичного отвору нескінченної ізотропної пластинки при їх неповному ідеальному механічному контакті наведено в [4].

У даній статті запропоновано розв'язок задачі для кусково-однорідної пластинки, яка перебуває в умовах однорідного узагальненого плоского напруженого стану (УПНС) на нескінченності, за наявності на лінії розділу матеріалів зон спаю, гладкого контакту і відставання.

**Постановка задачі.** Нехай криволінійний отвір нескінченної ізотропної пластинки товщиною  $2h$ , обмежений гладким контуром  $\Gamma$  у вигляді правильного чотирикутника із закругленими кутами. Середню площину пластинки віднесемо до системи прямокутних  $(x, y)$  і полярних  $(r, \delta)$  координат з полюсом в центрі отвору.

Розглянемо раціональну функцію [1]

$$\omega(\xi) = \xi + \varepsilon_1/\xi + \varepsilon_2/\xi + \varepsilon_3/\xi, \quad (1)$$

що здійснює конформне відображення зовнішності  $S^-$  одиничного кола  $\gamma$  в площині  $\xi = \rho e^{i\lambda}$  на область, яку займає пластинка в площині  $z$ ;  $\varepsilon_j$  – параметри, які характеризують відхилення форми криволінійного многокутника від кола;  $j=1, 3$ .  $(\rho, \lambda)$  – полярна система коор-

динат в площині  $\xi$ ,  $i = \sqrt{-1}$ .

Допустимо, що в отвір пластинки без зазору і натягу вставлено абсолютно жорсткий диск, спаяний з нею на ділянці  $\Gamma_3 = [\pi + \alpha_1^*, \pi + \beta_1^*]$ . Розглянута конструкція перебуває в умовах однорідного УПНС на нескінченності (рис. 1), викликаного рівномірно розподіленими зусиллями  $p$  і  $q$ , які діють в напрямках координатних осей. Внаслідок цього на

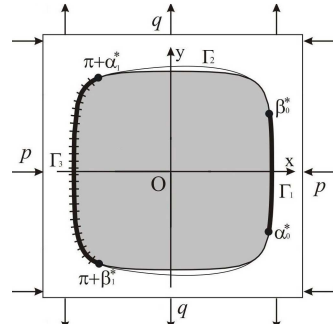


Рис. 1. Розрахункова схема

ділянці  $\Gamma_1 = [\alpha_0^*, \beta_0^*]$  пластинка вступає в контактну взаємодію з диском. На ділянках  $\Gamma_2$  контакт між пластинкою і диском відсутній. Тут  $\alpha_0^*$ ,  $\beta_0^*$ ,  $\pi + \alpha_1^*$ ,  $\pi + \beta_1^*$  – полярні кути межових точок ділянок контакту та спаю.

Розв’язок такої задачі полягає у визначенні напруженого стану на контурі отвору пластинки, величини і положення зон контакту.

**Інтегральні рівняння задачі.** Співвідношення для компонентів вектора зміщення контурних точок пластинки та жорсткого диска при заданому навантаженні, на підставі [5], мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 2Ehu &= (1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\gamma} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + R_0(\lambda) + c_1; \\
 2Eh\nu &= (1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{\gamma} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + Q_0(\lambda) + c_2; \\
 (u+iv)_r^0 &= (U_0 + iV_0), \quad \sigma = e^{i\lambda}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Тут

$$\begin{aligned}
 R_0(\lambda) &= -(3p+q) \cos \lambda - (q-p) [(\varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_3) \cos \lambda + \\
 &\quad + \varepsilon_2 \cos 2\lambda + \varepsilon_3 \cos 3\lambda] + 4\varepsilon_3 (\tilde{\alpha}_1 \cos \lambda - \tilde{\beta}_1 \sin \lambda); \\
 Q_0(\lambda) &= (3q+p) \sin \lambda + (q-p) [(\varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_3) \sin \lambda + \\
 &\quad + \varepsilon_2 \sin 2\lambda + \varepsilon_3 \sin 3\lambda] - 4\varepsilon_3 (\tilde{\alpha}_1 \sin \lambda + \tilde{\beta}_1 \cos \lambda);
 \end{aligned}$$

$$f_1 + if_2 = i \int_{\alpha_0}^{\lambda} (T_{\rho}^* + iS_{\rho\lambda}^*) e^{it} dt; \quad T_{\rho}^* + iS_{\rho\lambda}^* = (T_{\rho} + iS_{\rho\lambda}) \omega'(\sigma); \quad E, \nu -$$

модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона;  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, c_1, c_2$  – сталі;  $\alpha_0, \beta_0, \pi + \alpha_1, \pi + \beta_1$  – образи кутів  $\alpha_0^*, \beta_0^*, \pi + \alpha_1^*, \pi + \beta_1^*$  при відображенні (1);  $T_{\rho}, S_{\rho\lambda}$  – нормальні та дотичні зусилля на контурі;  $U_0, V_0$  – компоненти жорсткого зміщення диска;  $a(\lambda) + ib(\lambda) = \omega'(\sigma) e^{i\lambda}$ .

Граничні умови задачі в зоні гладкого контакту мають вигляд [5]:

$$a(\lambda)u + b(\lambda)v = a(\lambda)U_0 + b(\lambda)V_0; \quad S_{\rho\lambda} = 0, \quad \lambda \in [\alpha_0, \beta_0], \quad (3)$$

а в зоні спаю їх запишемо так [1, 5]:

$$u = U_0; \quad v = V_0, \quad \lambda \in [\pi + \alpha_1, \pi + \beta_1]. \quad (4)$$

Шляхом підстановки (2) у граничні умови (3)-(4), одержимо систему з чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами для визначення функцій  $f_1', f_2'$  на ділянках контакту і спаю

$$\begin{aligned} & a(\lambda) \left[ (1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\gamma} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + R_0(\lambda) \right] + \\ & b(\lambda) \left[ (1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{\gamma} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + Q_0(\lambda) \right] = \\ & = a(\lambda) \tilde{c}_1 + b(\lambda) \tilde{c}_2; \quad f_1'(\lambda) a(\lambda) + f_2'(\lambda) b(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \gamma_1; \quad (5) \end{aligned}$$

$$(1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\gamma} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + R_0(\lambda) = \tilde{c}_1;$$

$$(1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{\gamma} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + Q_0(\lambda) = \tilde{c}_2; \quad \lambda \in \gamma_3, \quad (6)$$

де  $\tilde{c}_1 = 2EhU_0 - c_1, \tilde{c}_2 = 2EhV_0 - c_2$ .

Крім цієї системи рівнянь, повинні виконуватися силові умови рівноваги диска [1, 5], що служать для визначення сталих  $\tilde{c}_1$  і  $\tilde{c}_2$

$$\int_{\gamma} f_2'(t) dt = 0; \quad \int_{\gamma} f_1'(t) dt = 0. \quad (7)$$

Контактні і кільцеві зусилля на контурі отвору пластинки, через функції  $f_1'$ ,  $f_2'$  визначаються за формулами, наведеними в [5, 6].

Якщо величини  $u$ ,  $v$  стануть відомі, то нормальну і дотичну компоненти вектора зміщення можна визначити за формулою [6]

$$u_n + iu_s = (u + iv)e^{-i\theta}. \quad (8)$$

Тут  $\theta$  – кут між нормаллю до контуру  $\Gamma$  і віссю  $Ox$ .

**Наближений розв'язок задачі.** Знаходження точного розв'язку задачі пов'язано із значними математичними труднощами, тому для її наближеного розв'язання необхідно використовувати числові методи.

Оскільки на кінцях зон контакту функції  $f_1'$ ,  $f_2'$  дорівнюють нулю, а на кінцях зон спаю вони мають кореневу особливість з локальною осциляцією, то наближений розв'язок задачі можна знайти методом механічних квадратур і колокації [4, 5, 7].

**Результати числового розрахунку.** Для ізотропної пластинки з квадратним ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ ,  $\varepsilon_3 = \pm 0.1$ ) отвором досліджено вплив на розподіл контактних зусиль по контуру  $\Gamma$  величини і положення зони спаю та виду зовнішнього навантаження.

Результати числового розрахунку нормальних  $T_\rho$  та дотичних  $S_{\rho\lambda}$  зусиль при  $q=1$ ,  $p=0$  ілюструються на рис. 2 – 3. Штрихпунктирні лінії побудовано для випадку  $\beta_1 = \pi/4$ , суцільні –  $\beta_1 = \pi/2$ , а штрихові –  $\beta_1 = 2\pi/3$ . Граничні розміри зони контакту для розглянутого вище випадку, наведено в таблиці.

Таблиця

Граничні розміри зони контакту  $\Gamma_1$  при  $q=1$ ,  $p=0$

$\beta_1 = -\alpha_1$ (град)	$\beta_0^* = -\alpha_0^*$ (град)		Вид лінії на рисунок
	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 = -0.1$	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 = 0.1$	
120	0	8.62	---
90	26.62	8.81	—
45	31.98	9.10	-----

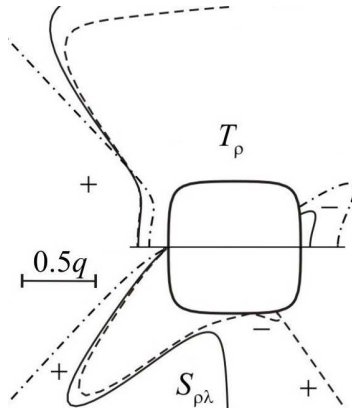


Рис. 2. Епюри розподілу контактних зусиль на контурі отвору при  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ ,  $\epsilon_3 = -0.1$

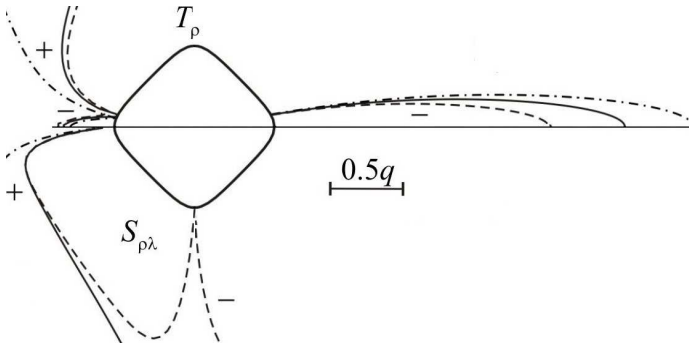


Рис. 3. Епюри розподілу контактних зусиль на контурі отвору при  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ ,  $\epsilon_3 = 0.1$

**Висновок.** Максимальні нормальні зусилля в зоні контакту виникають у точках контуру з найбільшою кривиною, причому ці зусилля зменшуються зі збільшенням зони спаю. Форма отвору пластинки суттєво впливає на величину зони контакту. Збільшення розмірів зон спаю пластинки і жорсткого диска приводить до зменшення зони контакту. На кінцях зони спаю пластинки і жорсткого диска, нормальні і дотичні зусилля набувають необмежених значень.

Запропонований метод може бути використаний за наявності двох зон контакту.

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 708 с. 2. Гриліцький Д. В. Напруження в пластинках з коловою лінією розмежування граничних умов /

Д. В. Гриліцький, Р. М. Луцишин. – Львів : Вид-во “Вища школа” при ЛДУ, 1975. – 111 с. **3.** Гриліцький Д. В. Основні граничні задачі теорії пружності для безмежної ізотропної пластинки з впаяною круглою ізотропною шайбою з розрізами на лінії спаю / Д. В. Гриліцький // Питання механіки і математики. ЛДУ. – 1962. – Вип. 9. – С. 79–86. **4.** Сяський А. О. Мішана контактна задача для пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска / А. О. Сяський, Н. В. Шинкарчук // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 7 (16). – Рівне : РДГУ, 2010. – С. 199–209. **5.** Сяський А. Мішана контактна задача для ізотропної пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска / А. Сяський, Н. Шинкарчук // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – Тернопіль, 2011. – Т. 16. – № 1. – С. 16–21. **6.** Батишкіна Ю. В. Часткове підкріплення криволінійного отвору в нескінченній пластинці тонким пружним стержнем / Ю. В. Батишкіна, А. О. Сяський // Волинський математичний вісник. – 2002. – Вип 9. – С. 4–11. **7.** Сяський А. О. Кусково-однорідна ортотропна пластинка з еліптичним розрізом за умови контактування його берегів / А. О. Сяський, Н. В. Шинкарчук // Наукові нотатки та матеріалознавство». – Луцьк : Луцький національний технічний університет, 2011. – Вип. 30. – С. 168–174.

Рецензент: д.т.н., професор Бомба А. Я. (РДГУ)

---

**Shynkarchuk N. V., Candidate of Engineering, Lecturer (Rivne State Humanitarian University, Rivne)**

### **CONTACT INTERACTION COAST OF THE CUTS BETWEEN INFINITE ISOTROPIC PLATE AND HARD DRIVE**

**The investigated stress state of piecewise homogeneous plate with curvilinear incisions on the line materials division with provided contact them shores.**

**Keywords:** isotropic plate, hard drive, zone of solder.

---

**Шинкарчук Н. В., к.т.н., преподаватель (Ровенский государственный гуманитарный университет, г. Ровно)**

### **КОНТАКТ БЕРЕГОВ РАЗРЕЗА МЕЖДУ БЕСКОНЕЧНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКОЙ И ЖЕСТКИМ ДИСКОМ**

**Исследуется напряженное состояние кусочно-однородной пластинки с криволинейными разрезами на линии раздела материалов при условии контактирования их берегов.**

**Ключевые слова:** изотропная пластинка, жесткий диск, зона спаивания.

---