УДК 65.011.56:629.7.017.4

Брушковський О. Л., к.т.н., доцент, Дубчак І. В., асистент
(Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

ДО ВИЗНАЧЕННЯ ПОЛІВ НАПРУЖЕНЬ І ДЕФОРМАЦІЙ У ЕЛЕМЕНТАХ СИЛОВИХ КОНСТРУКЦІЙ ТЕОРЕТИКО-ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИМ МЕТОДОМ

Розглянута задача визначення полів деформацій і напружень в елементах конструкцій, що знаходяться у плоскому напруженому стані, по експериментально знайденим значенням цих полів в окремих точках.
***Ключові слова:* деформація, напружений стан, конструкція.**

Загальним недоліком сучасних силових конструкцій є те, що вони пасивно сприймають навантаження, без пристосування до їх зміни. Під пристосуванням конструкції будемо розуміти її властивість переносити змінні зовнішні навантаження без перевищення заданого запасу міцності, якщо це можливо. Активною силовою конструкцією називають силову конструкцію, яка може пристосовуватись до змінних зовнішніх навантажень. Розробка таких конструкцій привертає все більшу увагу дослідників [1].

Для надійної роботи активних силових конструкцій при змінних умовах експлуатації необхідно володіти інформацією про стан міцності її елементів у довільний момент часу. Але і при відомій програмі навантаження недосконалість теоретичних та експериментальних методів визначення напружено-деформованого стану (НДС) силових елементів конструкцій не завжди дозволяє це зробити. Розширення можливостей обох методів досягається шляхом їх удосконалення. Метою даного дослідження є виявлення додаткових резервів для визначення полів напружень і деформацій у елементах силових конструкцій під час їх експлуатації, що можуть бути знайдені шляхом раціонального поєднання теоретичних та експериментальних методів.

При експериментальних дослідженнях напружено-деформованого стану елементів силової конструкції (літаків, машин, інженерних споруд) широко застосовується тензометрія. Однак інформації, одержаної при цьому у результаті первинної обробки, недостатньо для висновку про міцність об'єкту з яким-небудь концентратором, оскільки мала ймовірність встановлення тензодатчиків у найбільш небезпечних місцях. У даній роботі наводиться методика визначення полів деформацій і напружень у елементах силових конструкцій по їх відомим значенням в окремих точках, знайденим експериментальними методами, наприклад, по показам тензодатчиків. Питання первинної обробки показів не розглядаються. Перехід від деформацій до напружень здійснюється за допомогою відомих формул фізичного закону.

Розглянемо плоску задачу теорії пружності. Визначення полів напружень і деформацій по їх відомим значенням в окремих точках може проводитися без врахування і з частковим або повним врахуванням розрахункових схем досліджуваних об'єктів.

Визначення полів деформацій і напружень без врахування розрахункових схем досліджуваних об'єктів

Для визначення функції деформації $\varepsilon_r(s)$ на поверхні об'єкту можуть бути застосовані відомі алгоритми наближення функцій однієї або декількох змінних [2].

Поверхня апроксимації може складатись з частин площин, кожна з яких проведена по своїй сукупності датчиків. Наприклад, рівняння кожної з них знаходиться по показам трьох тензодатчиків, що дозволяє визначити поле у внутрішніх точках цього базового трикутника і у деякому околі навколо нього. При цьому використовуються рівняння площини, що проходить через три задані точки: $M_1(x_1;y_1;\varepsilon_1), M_2(x_2;y_2;\varepsilon_2), M_3(x_3;y_3;\varepsilon_3)$:

$$\begin{matrix} x-x_1 & y-y_1 & \varepsilon-\varepsilon_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & \varepsilon_2-\varepsilon_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & \varepsilon_3-\varepsilon_1 \end{matrix} = 0. \qquad (1)$$

Краще проводити апроксимацію неперервною поверхнею, для чого область *D*, у якій проводиться апроксимація, розбивається на трикутники, у вершинах яких відомі експериментальні значення досліджуваної функції, а потім у кожному трикутнику проводиться лінійна апроксимація.

Загальним недоліком вказаних методів є їх погана чутливість до змін поля у точках, відмінних від експериментальних, в силу чого дійсна зміна поля не буде помічена, якщо її не відчули датчики, або згладжена, якщо її екстремальні значення знаходяться не у вузлах інтерполяції.

Визначення полів деформацій і напружень з частковим врахува-

ванням розрахункових схем досліджуваних об'єктів

Розглянемо більш точні методи, що враховують у тій чи іншій мірі фізичну сторону досліджуваного явища.

При частковому врахуванні розрахункової схем можна використати ту властивість, що функції напружень і деформацій є бігармонічними. Тоді для плоского напруженого стану деформації ε_r можуть бути представлені таким чином:

$$\varepsilon_r = \sum_{i=0}^{n} P_i(x,y), \tag{2}$$

де:

$$P_0\left(x,y\right) = a_{00}; P_1\left(x,y\right) = a_{10}x + a_{11}y;$$
$$P_2(x,y) = a_{20}x^2 + a_{21}xy + a_{22}y^2;...;$$
$$P_i\left(x,y\right) = a_{i0}x^i + a_{i1}x^{i-1}y + a_{i2}x^{i-2}y^2 + ... + a_{ii}y^i.$$

Функції $P_i(x,y)$ повинні задовольняти рівнянню

$$\frac{\partial^4 P_i(x,y)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 P_i(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 P_i(x,y)}{\partial y^4} = 0. \tag{3}$$

Кожна з компонент тензорів напружень або деформацій також може бути представлена у вигляді степеневого ряду. Зв'язок між коефіцієнтами цих рядів знаходимо за допомогою рівнянь рівноваги або рівнянь нерозривності.

Рівняння рівноваги можуть бути враховані за допомогою функції напружень $F(x,y)$, представленої у вигляді ряду типу (2). Напруження за допомогою цієї функції визначаються так:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \ \ \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \tag{4}$$

Розглянемо, чи можливо при врахуванні тільки рівнянь нерозривності подібним чином добитися скорочення числа невідомих параметрів.

Виразимо, наприклад, деформації $\varepsilon_x; \varepsilon_y; \gamma_{xy}$ через деяку функцію $\psi(x,y)$ таким чином:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\,;\; \varepsilon_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}; \gamma_{xy} = -2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\,. \tag{5}$$

Тоді рівняння нерозривності

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{6}$$

буде бігармонічним:

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = 0\,. \tag{7}$$

Однак, необхідно визначити які обмеження на функцію $\psi(x,y)$ накладають рівняння рівноваги. У даному випадку:

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y); \\ \sigma_y = \dfrac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x); \Rightarrow \\ \quad \tau_{xy} = \dfrac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{1-\mu^2}\left(\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \mu\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right); \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \\ \sigma_y = \dfrac{E}{1-\mu^2}\left(\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \mu\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right); \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \Rightarrow \\ \qquad\qquad \tau_{xy} = -\dfrac{E}{(1+\mu)}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = F_1(y); \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = F_2(x); \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \text{const}; \Rightarrow \varepsilon_x + \varepsilon_y = \text{const}.$$

Таким чином, за допомогою вказаної функції можна описати тільки частковий випадок деформованого стану, коли перший інваріант тензору деформацій залишається сталим.

Визначення полів деформацій і напружень з повним врахуванням розрахункових схем досліджуваних об'єктів

При визначенні полів напружень і деформацій у деякій області ***D*** з границею ***Г*** по їх відомим значенням у окремих точках, що знаходяться експериментально, найбільш точні результати можуть бути одержані у тому випадку, коли будуть враховані не тільки диференціальні рівняння задачі, але й граничні умови на контурі ***Г***. Але у цьому випадку достатньо експериментально визначити тільки граничні умови задачі. Після цього задача зводиться до розв'язування крайової задачі теорії пружності з заданими (хоч і знайденими експериментально) граничними умовами. Для визначення граничних умов на контурі *Г* можуть бути використані відомі формули інтерполяції функції однієї змінної [2, 3, 4, 5]. Вкажемо деякі алгоритми визначення полів деформацій и напружень в області ***D*** з границею ***Г*** з повним врахуванням розрахункової схеми досліджуваного об'єкту.

У загальному випадку ця крайова задача містить систему з 8 невідомими і граничні умови.

Рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0;\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0. \qquad (8)$$

Рівняння нерозривності деформацій

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \qquad (9)$$

Фізичні рівняння

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left(\sigma_x-\mu\sigma_y\right);\varepsilon_y=\frac{1}{E}\left(\sigma_y-\mu\sigma_x\right);$$
$$\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}=\frac{2\left(1+\mu\right)}{E}\tau_{xy}. \qquad (10)$$

Геометричні рівняння

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x};\varepsilon_y=\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}};\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (11)$$

Умови на контурі, які повинні бути знайдені експериментально,

$$p_{x\nu} = \sigma_x \cdot cos(\nu, x) + \tau_{xy} \cdot cos(\nu, y);$$
$$p_{x\nu} = \tau_{xy} \cdot cos(\nu, x) + \sigma_y \cdot cos(\nu, y). \qquad (12)$$

Розглянемо різні варіанти розв'язування задачі.

1. Розв'язання задачі у напруженнях. Диференціальні рівняння задачі мають вигляд:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0, \qquad (13)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа.

Експериментально повинні бути визначені нормальне та дотичне навантаження на контурі $p_{x\nu}$ і $p_{y\nu}$.

2. Алгоритм, який використовує попереднє визначення першого інваріанту тензора деформацій у досліджуваній області.

Як відомо, перший інваріант тензора деформацій ε^I

$$\varepsilon^I = \varepsilon_x + \varepsilon_y \qquad (14)$$

задовольняє у досліджуваній області рівнянню Лапласа

$$\Delta\varepsilon^I = 0. \qquad (15)$$

Граничні умови на контурі Г мають вид

$$\varepsilon^I\big|_\Gamma = f(t) \qquad (16)$$

і повинні бути визначені експериментально. В частковому випадку для круга (О, R) розв'язком у полярних координатах буде інтеграл Пуассона.

Знаючи поле ε^I в області *D* та інтегруючи рівняння

$$\Delta\varepsilon_x = \frac{1}{(1-\mu)}\left(\frac{\partial^2\varepsilon^I}{\partial y^2} - \mu\frac{\partial^2\varepsilon^I}{\partial x^2}\right);$$

$$\Delta\varepsilon_y = \frac{1}{(1-\mu)}\left(\frac{\partial^2\varepsilon^I}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2\varepsilon^I}{\partial y^2}\right); \tag{17}$$

$$\Delta\tau_{xy} = -\frac{2(1+\mu)}{1-\mu}\frac{\partial^2\varepsilon^1}{\partial x\partial y},$$

визначаємо поля деформацій в області $D_1 \subset D$ з границею $\varGamma_1$. Функції $\varepsilon_x(t), \varepsilon_y(t), \gamma_{xy}(t)$ на контурі $\varGamma_1$ повинні бути знайдені експериментально.

3. Можна визначати поля деформацій і напружень враховуючи, що компоненти тензорів деформацій і напружень, а також переміщення, є бігармонічними функціями. У цьому випадку для формування крайових умов на контурі *Г* повинні бути знайдені експериментально значення вказаних функцій і, наприклад, їх похідних по нормалі до контуру. Таким чином, особливості поєднання теоретичного і експериментального методів дозволяють визначити кожну з вказаних функцій незалежно від інших.

4. Об'єм необхідної експериментальної інформації зменшиться, якщо використати функцію напружень $F(x, y)$, яка задовольняє рівнянню:

$$\Delta\Delta F = 0. \tag{18}$$

Її можна знайти також, шляхом розв'язування системи рівнянь:

$$\left\{\Delta\sigma^I = 0;\ \Delta F(x,y) = \sigma^I\right\}. \tag{19}$$

На контурі *Г* експериментально визначається нормальне і дотичне навантаження. А потім, використовуючи різні аналогії, відомими методами визначаються граничні умови для функції напружень

Напруження через цю функцію визначаються по формулам (4).

5. Задача може бути розв'язана і методом переміщень з використанням рівнянь Ляме

$$(\lambda+G)\frac{\partial\varepsilon^I}{\partial x} + G\Delta u = 0; (\lambda+G)\frac{\partial\varepsilon^I}{\partial y} + G\Delta v = 0, \tag{20}$$

де $\lambda = 2\mu G / (1 - 2\mu)$ (стала Ляме). Функції переміщень на контурі Γ_1 повинні бути знайдені експериментально.

Отже, в роботі теоретико-експериментальним методом розглянута задача визначення полів деформацій і напружень в елементах активних силових конструкцій, що знаходяться у плоскому напруженому стані, по експериментально знайденим значенням цих полів у окремих точках. При цьому зовнішні навантаження на конструкцію можуть бути відомими, частково відомими або зовсім невідомими.

Висновок. При використанні наближених методів для визначення полів напружень і деформацій по їх відомим значенням в окремих точках необхідно виявляти обмеження, які накладає вибір функцій, що використовуються для апроксимації, на досліджувані поля. Інакше результати досліджень і висновки на їх основі можуть виявитися помилковими. Аналіз досліджень [2, 3, 4, 5] дозволяє зробити висновок про те, що раціонально визначати поля напружень і деформацій з повним врахуванням розрахункових схем досліджуваних об'єктів, а експериментальні значення використовувати для знаходження крайових умов відповідних диференціальних рівнянь, або їх систем, та для контролю визначених таким чином полів.

1. Брушковский А. Л. К расчёту на прочность активных силовых элементов, связей и конструкций / А. Л. Брушковский // Укр. ин-т инж. водн. хоз-ва. – Ровно, 1989. – 21 с. – Библиогр. 9 назв. – Рус. – Деп. в УкрНИИНТИ 30.03.89, №904-Ук89. **2.** Брушковский А. Л. Плоская задача теории упругости с определением граничных условий по показаниям тензодатчиков / А. Л. Брушковский // Изв. вузов. Машиностроение, 1985, – № 9. – С. 9-12. **3.** Брушковский А. Л., Решение плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы методом замены / А. Л. Брушковский, А. И. Макеев // Прочность конструкций летательных аппаратов. – Харьков : изд. ХГУ, 1973. – Вып. 1. – С. 96-105. **4.** Брушковский А. Л. Восстановление полей деформаций в районе концентраторов по показаниям тензодатчиков / А. Л. Брушковский // Авиационная техника. – Казань, 1978. – С. 142-144. **5.** Брушковский А. Л. Определение полей деформаций в районе концентраторов по показаниям тензодатчиков для ортотропных элементов / А. Л. Брушковский, Л. П. Литвиненко // Прикладная механіка. – 1982. – Том 18, № 1. – С. 82-85.

Рецензент: д.т.н., професор Кундрат М. М. (НУВГП)

Brushkovskyi A. L., Candidate of Engineering, Associate Professor, Dubchak I. V., Assistant (National University of Water Management and Nature Resources Use, Rivne)

FIELDS FOR DETERMINING STRESSES AND STRAINS IN ELEMENTS OF POWER DESIGNS BY THEORETICAL-EXPERIMENTAL METHODS

The problem of determining the tension and deformation fields in structural elements which are in the plane tense state has been examined with experimentally found values of these fields in the particular points.
Keywords: **deformation, stress state, construction.**

Брушковський А. Л., к.т.н., доцент, Дубчак И. В., ассистент
(Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ В ЭЛЕМЕНТАХ СИЛОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ ТЕОРЕТИКО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

Рассмотрена задача определения полей напряжений и деформаций в элементах конструкций, находящихся в плоском напряжённом состоянии, по экспериментально найденным значениям этих полей в отдельных точках.
Ключевые слова: **деформация, напряженное состояние, конструкция.**
