

УДК 539.3

Андрушков В. І., к.т.н., доцент, Русий Є. М., ст. викладач  
(Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

### ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ РОЗВ'ЯЗКУ ОБОЛОНОК ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ НА ПІДСТАВІ ГІПОТЕЗИ ПРЯМИХ ВЕРТИКАЛЕЙ

Проведено аналіз дослідження збіжності результатів розрахунку оболонок довільної форми в переміщеннях на підставі гіпотези прямих вертикалей з використанням чисельного методу скінченних різниць.

**Ключові слова:** оболонка, переріз, переміщення, напруга, розрахункова сітка, стріла підйому, збіжність, залежність.

**Використання чисельних методів** при розрахунках будівельних конструкцій на міцність та жорсткість потребує проведення дослідження збіжності отриманих результатів в залежності від кроку апроксимації функцій.

**Система диференціальних рівнянь** рівноваги моментної теорії непологих оболонок довільної форми в прямокутних координатах відносно трьох функцій переміщень на підставі гіпотези прямих вертикалей представлена в роботі [1]. Для її розв'язку застосовано чисельний метод скінченних різниць [2]. Точність отриманих за цим методом результатів залежить, як відомо, від кроку розрахункової сітки. Тому є необхідним дослідити його збіжність до точного розв'язку.

**Для досягнення цієї мети** було виконано розрахунок квадратної в плані оболонки в вигляді еліптичного параболоїда (рис. 1) в залежності від відношення стріли підйому до розміру її проекції на горизонтальну поверхню ( $f/a$ ) при різних розрахункових сітках  $n \times n$  ( $n = 6, 8, 10, 12, 14$ ).

$$z = -f \left[ 1 - \frac{2(x^2 + y^2)}{a^2} \right].$$

**Вихідні дані:**  $a=18m$ ;  $\frac{f}{a} = \frac{1}{22}, \frac{1}{11}, \frac{1}{9}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ ;

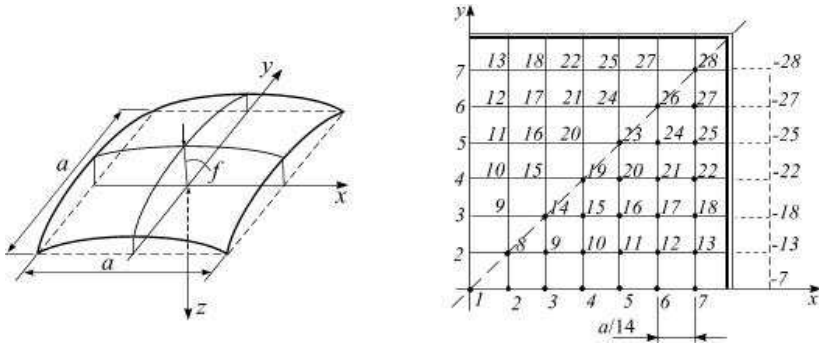


Рис. 1. Схема оболонки та її розрахункової сітки

товщина оболонки –  $\delta = 8\text{см}$ ; коефіцієнт Пуассона –  $\nu = 0.17$ ; модуль пружності матеріалу оболонки –  $E = 3 \times 10^4 \text{МПа}$ ; граничні умови однакові на всіх чотирьох сторонах і відповідають шарнірно нерухомому закріпленню оболонки; вертикальне рівномірно розподілене навантаження –  $Z^* = 5\text{кН/м}^2$ .

Після проведення розрахунків для порівняння були обрані величини вертикальних ( $w$ ) і горизонтальних ( $u$ ) переміщень, поздовжні сили  $N_x^*$  та згинальні моменти  $M_x^*$  в вузлах розрахункової сітки вздовж осі  $x$ . Причому, в силу симетрії оболонки, розглядалась лише половина її перерізу.

Результати розрахунків показали, що із збільшенням відношення  $f/a$  для отримання задовільних результатів потрібно зменшувати крок розрахункової сітки  $\lambda$ . Так, наприклад, для оболонки з відношенням  $f/a = 1/22$  такі результати було отримано навіть при дуже рідкій сітці  $6 \times 6$ , а вже при відношенні  $f/a = 1/11$  – лише при сітці  $8 \times 8$ . Тому для кожної оболонки брались до уваги результати розрахунку лише при тих сітках, коли отримували якісно правильні їх значення. Графічна інтерпретація такої залежності показана на рис. 2. Заштрихована зона графіка характеризує придатність тієї чи іншої розрахункової сітки при заданому відношенні  $f/a$ .

Така характерна особливість розрахунку оболонок за методикою, яка запропонована в роботі [2], пояснюється, очевидно, тим, що розв'язок системи диференціальних рівнянь, про які йде мова в [1], за допомогою чисельного методу скінченних різниць призводить до апроксимації не тільки функцій переміщень, а і змінних коефіцієнтів. Останні, як відомо, являються геометричними характеристиками середньої поверхні оболонки, і від того, наскільки велика відстань між їх

дискретними значеннями (крок сітки), залежить плавність її кривизни. Якщо для пологої оболонки це не є дуже суттєвим, то для оболонок з більшою стрілою підйому рідка сітка призводить до додаткових похибок і для їх усунення необхідно зменшити її крок  $\lambda$ .

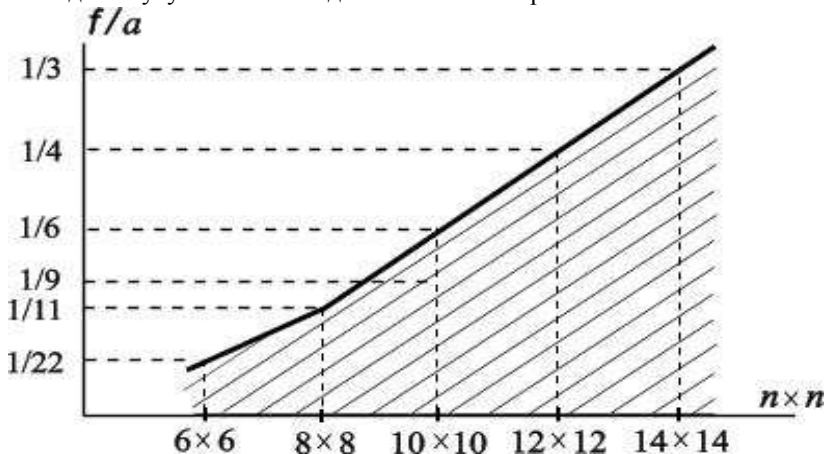


Рис. 2. Зона придатних розмірів розрахункової сітки в залежності від відношення  $f/a$  оболонки

Порівнюючи отримані значення переміщень та зусиль, потрібно відмітити, що для оболонки з заданим відношенням  $f/a$  величини вертикальних та горизонтальних переміщень точок поля оболонки із зміною кроку розрахункової сітки практично не змінюються по характеру їх розподілу і дещо відрізняються за величиною. Такий саме висновок можна зробити і по відношенню до поздовжніх сил та згинальних моментів, крім контурних точок оболонки і біля нього, де похибка при визначенні цих величин може бути значною. Останній висновок є на користь використання при розрахунку більш густої сітки.

На прикладі оболонки з відношенням  $f/a = 1/22$  було проведено оцінку порядку збіжності до точного розв'язку для переміщень та напруг. Оскільки при заданих граничних умовах отримати аналітичні результати досить складно, то було зроблено наступне. Якщо розрахунки були виконані при використанні розрахункових сіток  $n_1 \times n_1$  і  $n_2 \times n_2$ , то результати можна покращити, використовуючи екстраполяційну формулу Ричардсона ([3], С. 267)

$$A_{n_1 n_2} = \frac{n_2^2}{n_2^2 - n_1^2} A_{n_2} - \frac{n_1^2}{n_2^2 - n_1^2} A_{n_1}, \quad (1)$$

де  $A_{n1}$  і  $A_{n2}$  – деякі розрахункові величини, які отримані при використанні розрахункових сіток  $n_1 \times n_1$  і  $n_2 \times n_2$  відповідно.

В формулу (1) підставлялись результати обчислень при розрахункових сітках  $12 \times 12$  і  $14 \times 14$ . Отримані уточнені значення розрахункових величин умовно приймалися за точні результати (т.р.).

На рис. 3, в таблиці, наведені значення безрозмірних коефіцієнтів для визначення максимального прогину оболонки ( $\bar{w}$ ) і величина нормальної напруги в верхніх волокнах ( $\bar{\sigma}_x$ ) в центральній точці оболонки в залежності від кроку розрахункової сітки. Величини цих коефіцієнтів визначаються за формулами (2) і (3) відповідно.

$$\bar{w} = w \frac{E \cdot \delta^3 \cdot 10^4}{z^* \cdot a^4}, \quad (2)$$

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_x \frac{\delta^2 \cdot 10^2}{z^* \cdot a^2}. \quad (3)$$

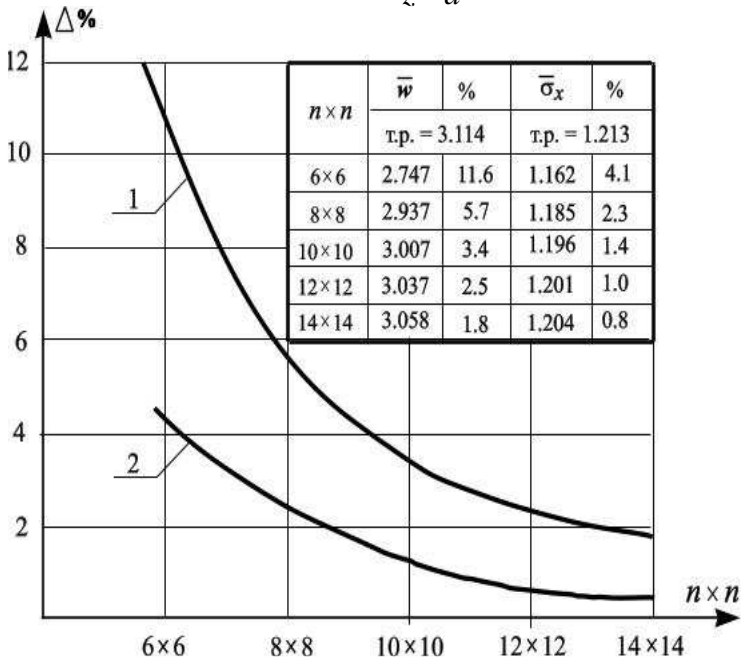


Рис. 3. Величини похибок при визначенні переміщень і напруг в залежності від розмірів розрахункової сітки

В тій самій таблиці наведені відносні похибки в підрахунках значень цих коефіцієнтів методом скінченних різниць в порівнянні з уточненими значеннями, які умовно прийняті за точні.

Крім того, на рис. 3 графічно представлені наближення переміщення  $\bar{W}$  (крива 1) і нормальної напруги  $\bar{\sigma}_x$  (крива 2) в центральній точці оболонки до їх точних значень (т. р.) при поступовому згущенні розрахункової сітки.

**З представлених графіків видно**, що для оболонок з відношенням  $f/a = 1/22$  порядок збіжності як для переміщень, так і для напруг дорівнює  $\lambda^2$ , тому що відносна похибка результатів при розрахунковій сітці  $12 \times 12$  зменшується приблизно в 2,25 рази в порівнянні з відносною похибкою при сітці  $8 \times 8$ . При цьому, похибка для напруг менша ніж для переміщень приблизно вдвічі.

1. Андрушков В. И. К расчету в перемещениях оболочек произвольной формы / Андрушков В. И., Рассказов А. О. // Прикладная механика. – 1981. – Т. 17, № 11. – С. 118–121. 2. Андрушков В. И. Об одном подходе к расчету оболочек на ЭВМ / Андрушков В. И., Коновалюк Д. М., Леонтьев В. А. // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1980. – № 5. – С. 40–43. 3. Назаров А. А. Основы теории и методы расчета пологих оболочек / Назаров А. А. – М.-Л. : Стройиздат, 1966. – 304 с.

Рецензент: д.т.н., професор Пугачов Є. В. (НУВГП)

---

**Andrushkov V. I., Candidate of Engineering, Associate Professor,  
Rusyi Y. N., Senior Lecturer** (National University of Water Management and Nature Resources Use, Rivne)

#### **RESEARCH OF THE NUMERICAL CONVERGENCE OF THE CALCULATED RESULTS FOR RANDOM SHAPED SHELLS BASED ON THE DIRECT VERTICALS HIPOTHESIS**

**We have researched and analyzed the results of the numerical convergence for random shaped shells based on the direct verticals hypothesis using the finite-differences numerical method.**

**Keywords:** shell, cross-section, shift, stress, design grid, camber of arch, convergence, dependency.

---

**Андрюшков В. И., к.т.н., доцент, Русый Е. Н., ст. преподаватель**  
(Национальный университет водного хозяйства и природопользования,  
г. Ровно)

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ  
РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕК ПРОИЗВОЛЬНОЙ  
ФОРМЫ НА ОСНОВЕ ГИПОТЕЗЫ ПРЯМЫХ ВЕРТИКАЛЕЙ**

**Проведен анализ исследования сходимости результатов расчета оболочек произвольной формы в перемещениях на основе гипотезы прямых вертикалей с использованием численного метода конечных разностей.**

***Ключевые слова:* оболочка, сечение, перемещение, напряжение, расчетная сетка, стрела подъема, сходимость, зависимость.**

---