УДК 621.165:534.1

Погребняк А. В., к.т.н., доцент (Харковский национальный автомобильно-дорожный университет)**, Евтушенко А. В., к.т.н., доцент** (Украинская государственная академия железнодорожного транспорта, г. Харьков)

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТЕРЖНЕВОЙ КОНСТРУКЦИИ. СИСТЕМА РАЗРЕШАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрено методику расчетов собственных частот и форм колебаний, а также вынужденных колебаний пространственных стержневых конструкций произвольной структуры.
***Ключевые слова*: метод перемещений, стержневая система, матрица внешних сил.**

Введение

Реальная пространственная стержневая конструкция с бесконечным числом степеней свободы заменяется конструкцией с конечным числом степеней свободы. В методе конечных элементов такая дискретизация основана на представлении конструкции в виде совокупности отдельных конечных стержневых элементов, взаимодействующих в конечном числе узловых точек. Соблюдение энергетического баланса исходной конструкции дискретной моделью ведет к получению такой расчетной схемы, которая описывает поведение исходной конструкции.

Анализ публикаций

Анализ публикаций связанных с этой темой показует, что в большинстве случаев используя для расчетов метод перемещений, не полностью учитывается система линейных неоднородных алгебраических уравнений, а также жесткость амортизаторов и моменты инерции присоединенных к узлам масс. Это не давало возможность учитывать определенные условия заделки, а также симметрию или асимметрию, если они существует [1, 2].

Цель и постановка задачи

Объектом расчета является пространственная конструкция из прямолинейных стержней, жестко соединенных друг с другом в так называемых узлах. Узлы расположены в пространстве произвольным образом. От кажого узла может отходить любое количество стержней. Главные оси поперечных сечений этих стержней могут быть ориентированы также произвольно. Учитывается собственный вес стержней, в узлах допускается присутствие сосредоточенных масс, а также учитываются моменты инерции присоединенных к узлам масс. кроме того, допускается в любых местах конструкции накладывать кинематические абсолютно жесткие или упругие связи, препятствующие всем возможным перемещениям конструкции.

Задача заключается:

- в использовании основных зависимостей, позволяющих описать соответствующую модель;
- в разработке программ для расчета на ЭВМ собственных частот и форм;
- в получении деформированной картины рамной конструкции при вынужденных колебаниях в заданном диапазоне частот;
- в расчете ряда тестовых примеров (собственные и вынужденные колебания плоской рамной конструкции);
- в непосредственной реализации предложенной методики на ЭВМ применительно к компрессорным лопаткам.

Система разрешающих уравнений

В качестве расчетного метода выбран метод перемещений, т.е. за основные неизвестные приняты перемещения в узловых точках. Для определения этих неизвестных следует составить необходимое число уравнений равновесия, представляющих собой систему линейных неоднородных алгебраических уравнений.

Рассмотрим пространственную стержневую систему, отнесенную к некоторой системе координат X'; Y'; Z'. Обозначим через $\{V_i'\}$ матрицу перемещений типового узла i. Число элементов этой матрицы (число степеней свободы узла) зависит от типа конструкции.

В случае пространственной рамы матрица состоит из трех линейных смещений и трех углов поворота (формула 1)

$$\{V_i'\} = \{U_{ix'}, U_{iy'}, U_{iz'}, \theta_{ix'}, \theta_{iy'}, \theta_{iz'}\}. \qquad (1)$$

Матрицу внешних сил, действующих в узле i в направлении перемещения $\{V_i'\}$, обозначим через $\{P_i'\}$. Число элементов этой матрицы совпадает с числом степеней свободы узла; перечислять силы в матрице $\{P_i'\}$ всегда будем в том же порядке, в каком перемещения располагаються в матрице $\{V_i'\}$. Так для пространственной рамы

$$\{P_i'\}= \{P_{ix'}, P_{iy'}, P_{iz'}, M_{ix'}, M_{iy'}, M_{iz'}\}. \qquad (2)$$

Матрицы узловых сил и перемещений для всей конструкции обозначим буквами $\{P'\}$ и $\{V'\}$ и составим их следующим образом

$$\{P'\}= \{P_1', P_2' ... P_m'\}, \{V'\}= \{V_1', V_2' \ldots V_m'\}, \qquad (3)$$

где m – число узлов стержневой системы.

При отсутствии внеузловой нагрузки связь между матрицами $\{P'\}$ и $\{V'\}$ может быть представлена в виде

$$\{P'\} = [K'] \cdot \{V'\}, \tag{4}$$

где $[K']$ – матрица жесткости системы, которая определяет взамосвязь между узлами конструкции через упругие конечные элементы [3, 4]. Она может быть представлена в форме

$$[K'] = \begin{pmatrix} k'_{11} & k'_{12} & .... & k'_{1n} \\ k'_{21} & k'_{22} & .... & k'_{2n} \\ ..... & ..... & .... & ..... \\ k'_{n1} & k'_{n2} & .... & k'_{nn} \end{pmatrix}, (n = 6\ m). \tag{5}$$

Матричное уравнение (4) равновесия конструкции отражает ее статическое нагружение. Соответствующее уравнение для случая динамического нагружения можно получить, если добавить к внешним силам инерционные $\{R'_{ин}\}$. Заменяя их эквивалентными узловыми силами $\{P'_{ин}\}$, получим равенство

$$\{P'\} + \{P'_{ин}\} = [K'] \cdot \{V'\}. \tag{6}$$

Для типового конечного элемента матрица узловых сил инерции $\{P'_{ин}\}_e$ связана с $\{R'_{ин}\}$ зависимостью

$$\{P'_{ин}\}_e = \int_{\tau_e} \{\alpha^T\}\cdot\{R'_{ин}\}\, d\tau, \tag{7}$$

где $\{\alpha^T\}$ – матрица аппромсимирующих функций; τ_e – объем элемента.

Инерционные силы, действующие в направлении перемещений U (X', Y', Z', t) на элементарный объем $d\tau$, определяются матрицей $-\rho\cdot[d^2\{U\}/dt^2$, где ρ – плотность материала. Разделив их на $d\tau$, получим силы, приходящиеся на единицу объема. Обозначая матрицу этих сил через $\{R'_{ин}\}$ и отмечая дифференцирование по времени точками сверху, запишем

$$\{R'_{ин}\} = -\rho\{\ddot{U}\}, \tag{8}$$

а отсюда следует

$$\{P'_{ин}\}_e = -\int_{\tau_e} \{\alpha^T\}\cdot\{\ddot{U}\}\, \rho d\tau. \tag{9}$$

Перемещения $\{U\}$ и узловые перемещения $\{V'\}_e$ связаны приближенной зависимостью

$$\{U\} = \{\alpha\}\cdot\{V'\}_e, \tag{10}$$

тогда и

$$\{\ddot{U}\} = \{\alpha\}\cdot\{\ddot{V}'\}_e, \tag{11}$$

где матрица $\{\ddot{V}'\}_e$ содержит вторые производные по времени от узловых перемещений конечного элемента (узловые ускорения).

Таким образом,

$$\{P'_{\text{ин}}\}_e = -\int_{\tau e} \rho \cdot \{\alpha^T\} \cdot \{\alpha\} \cdot d\tau \{\ddot{V}'\}_e. \tag{12}$$

Этот результат можно представить в виде

$$\{P'_{\text{ин}}\}_e = -[m]_e \cdot \{\ddot{V}'\}_e, \tag{13}$$

где $[m]_e$ = – квадратная симметричная матрица, называемая матрицей масс конечного элемента. Ее можно определить как

$$[m]_e = \int_{\tau e} \rho \cdot \{\alpha^T\} \cdot \{\alpha\} \cdot d\tau. \tag{14}$$

Аналогично (13), для полной конструкции узловые силы связаны с узловыми перемещениями следующей зависимостью

$$\{P'_{\text{ин}}\} = -[M'] \cdot \{\ddot{V}'\}, \tag{15}$$

где $[M']$ – квадратная симметричная матрица называемая матрицей масс конструкции и образуемая суммированием матриц масс конечных элементов.

$$[M'] = \begin{pmatrix} m'_{11} & m'_{12} & \ldots & m'_{1n} \\ m'_{21} & m'_{22} & \ldots & m'_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m'_{n1} & m'_{n2} & \ldots & m'_{nn} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Правило формирования матрицы масс совпадает с правилом формирования матрицы жесткости из матриц жесткости отдельных конечных элементов.

Внося (15) в (6) приходим к равенству

$$[M'] \cdot \{\ddot{V}'\} + [K'] \cdot \{V'\} = \{P'\}, \tag{17}$$

которое и представляет собой матричное уравнение движения конструкции. Оно заключает в себе систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно компонент матрицы $\{V'\}$.

Собственные (или свободные) колебания конструкции совершаются при отсутствии внешних сил. Принимая в (17) $\{P'\} = \{0\}$, получим следующее уравнение

$$[M'] \cdot \{\ddot{V}'\} + [K'] \cdot \{V'\} = \{0\}, \tag{18}$$

решение которого ищем в виде

$$\{V'\} = \{W'\} \cdot \cos \omega t, \tag{19}$$

где ω – круговая частота колебаний, а матрица-столбец $\{W'\}$ содержит амплитудные значения перемещений и называется формой колебаний. Каждой частоте $\omega_к$ соответствует определенная форма колебаний $\{W_к{}'\}$.

Подставив (19) в (18), придем к уравнению

$$([K'] - \omega^2 \cdot [M']) \cdot \{W'\} = \{0\}. \quad (20)$$

Кроме тривиального решения $\{W'\} = \{0\}$, которое не представляет интерес можно получить однородную систему алгебраических уравнений имеющих нетривиальное решение, если ее определитель равен 0, то есть

$$|[K'] - \omega^2 \cdot [M']| = 0. \quad (21)$$

Значения ω, удовлетворяющие условию (21), представляют собой частоты собственных колебаний системы.

Матрицы жесткости $[K']$ и масс $[M']$ для дискретной модели выражаются через матрицы жесткости $[K]_e$ и масс $[m]_e$ для отдельных элементов.

Выводы

Таким образом получены системы разрешающих уравнений основанные на методе перемещений, т.е. за основные неизвестные приняты перемещения в узловых точках. Для определения этих неизвестных следует составить необходимое число уравнений равновесия, представляющих собой систему линейных неоднородных алгебраических уравнений. Предлагаемая методика может быть использована для расчета собственных частот, собственных форм, а также вынужденных колебаний пространственных стержневых конструкций произвольной структуры, приводящихся к совокупности стержней.

1. Постнов В. А. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций / В. А. Постнов, И. Я. Хархурим. – Л. : Судостроение, 1974. – 185 с. **2.** Образцов И. Ф. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов / И. Ф. Образцов. – М. : Высшая школа, 1985. – 202 с. **3.** Бабаков И. М. Теория колебаний / И.М. Бабаков. – М. : Наука, 1988. – 198 с. **4.** Методика и результаты эксперименталого определения собственных частот фирменных направляющих лопаток компрессора ГПА «Эвон» / ООО «Турбогаз» // техническая справка 39-124-10. – С. 49−53. **5.** Пространственные стержневые конструкции / ООО «Турбогаз» // Метод расчета собственных и вынужденных колебаний. Руководящий документ. РД 15878-03-2010. – Х. : ООО «Турбогаз», 2010. – 111 с.

Рецензент: д.т.н., професор Бомба А. Я. (НУВГП)

Pohrebniak A. V., Candidate of Engineering, Associate Professor
(Kharkiv National Automobile and Highway University**),**
Yevtushenko A. V., Candidate of Engineering, Associate Professor
(Ukrainian State Academy of Railway Transport, Kharkiv)

THEORETICAL BASES OF DYNAMIC CALCULATION OF THE SPATIAL CORED CONSTRUCTION. SYSTEM RESOLVENT EQUALIZATIONS

The methods of calculations of eigenfrequencies and forms of vibrations are considered in the article, and also the forced vibrations of the spatial cored constructions of arbitrary structure.
***Keywords*: method of moving, cored system, matrix of external forces.**

Погребняк А. В., к.т.н., доцент (Харківський національний автомобільно-дорожній університет)**, Євтушенко А. В., к.т.н., доцент** (Українська державна академія залізничного транспорту, м. Харків)

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДИНАМІЧНОГО РОЗРАХУНКУ ПРОСТОРОВОЇ СТЕРЖНЕВОЇ КОНСТРУКЦІЇ. СИСТЕМА ДОЗВОЛЯЮЧИХ РІВНЯНЬ

Розглянуто методику розрахунків власних частот і форм коливань, а також вимушених коливань просторових стержневих конструкцій довільної структури.
***Ключові слова*: метод переміщень, стержнева конструкція, матриця зовнішніх сил.**
