

УДК 539.3:534.222

Бомба А. Я., д.т.н., професор, Рябенко О. А., д.т.н., професор, Турбал Ю. В., к.ф.-м.н., доцент (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

МОДИФІКАЦІЯ Т-ПРЕДСТАВЛЕНЬ ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ БРИЗЕРНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ ТИПУ КОРТЕВЕГА – ДЕ ВРІЗА

У статті запропоновано метод для знаходження аналітичного представлення розв'язків рівнянь типу Кортевега – де Вріза як комбінацій солітона та антисолітона. Проведено порівняння теоретичних та експериментальних профілів відокремленої хвилі. Ключові слова: солітон, антисолітон, бризер, КДВ.

Вступ. Останніми роками дослідження відокремлених хвиль відіграє важливе значення у багатьох прикладних галузях. Адже розв'язки типу біжучої хвилі описують процеси виникнення та поширення відокремлених хвиль в механіці рідин, гідродинаміці, оптиці, фізиці плазми, фізиці твердого тіла, біології, метеорології та інших галузях.

Зауважимо, що відокремлені хвилі часто виникають на границях динамічних середовищ з різними фізичними характеристиками, такими як «вода – повітря» (в цьому випадку розглядають рівняння типу мілкої води), на границях стратифікованих рідин, на границі “газ – вакуум” (в [12] розглядалися тонкі газові диски галактик, що повертаються в гравітаційному полі), на границі мантії Землі (поверхня Моховичича). Відокремлені хвилі зараз вивчаються і у твердих тілах, оскільки вони можуть розглядатись як “спусковий механізм” сейсмічних поштовхів. Таким чином, дослідження відокремлених хвиль та знаходження нових підходів до аналітичного представлення розв'язків, що моделюють відокремлені хвилі, на сьогодні є актуальною задачею.

Аналіз останніх досліджень. Існують різні моделі, що описують процеси поширення відокремлених хвиль та методів точного і наближеного розв'язку відповідних модельних диференціальних рівнянь. Добре відомі рівняння Кортевега – де Вріза, які моделюють процеси поширення відокремлених хвиль на мілкій воді та низка їх узагальнень. Зокрема, останніми роками розглядалися узагальнення виду:

$$u_t + (\alpha + \beta u^p)u_x^p + \gamma u_{xxx} = 0 \quad ([8]);$$

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} + u_{xxxx} = 0 \quad (\text{рівняння п'ятого порядку, [9]});$$

$$u_t + au^2u_x + bu_xu_{xx} + cuu_{xxx} + du_{xxxx} = 0 \quad ([9]);$$

$$u_t = u_{xxxx} + 10uu_{xxx} + 20u_xu_{xxx} + 30u^2u_x \quad ([5]);$$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = -\alpha u_{xx} - \beta u_{xxxx} \quad (\text{Курамото-Сивашинського-КдВ, [10]});$$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} - u_{xxxx} = 0 \quad (\text{Кавахари, [13]});$$

$$u_t + vuu_x + \mu u_{xxx} + \alpha u_{xx} + \gamma u_{xxxx} = 0 \quad ([9]);$$

$$u_t + uu_x + \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} + \gamma u_{xxxx} = 0 \quad (\text{КдВ-Бюргерса-Курамото, [7]})$$

та ряд інших.

Ці рівняння моделюють низку фізичних явищ, таких як хвилі на мілкій воді, нескінченно довгі хвилі в стратифікованій воді океану, акустичні хвилі в кристалічній решітці, хвилі в плазмі та інші.

Останніми роками розроблено багато ефективних методів знаходження розв'язків диференціальних рівнянь в частинних похідних типу біжучої хвилі, таких як метод оберненої задачі розсіювання [14], методи перетворення Беклунда, трансформацій Дарбу [3], tanh-метод та його модифікації [5, 6], метод узагальнених гіперболічних функцій [7], метод експонент [8].

В даній роботі пропонується новий підхід до знаходження солітонних розв'язків, зокрема таких, що є комбінацією солітона та антисолітона.

Методика досліджень. В роботі використовуються представлення спеціального типу, які дозволяють знаходити солітонні, антисолітонні та бризерні розв'язки диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Постановка завдання. У низці робіт пропонується знаходити розв'язки диференціальних рівнянь в частинних похідних у вигляді Г-представлень. Розглянемо диференціальне рівняння в частинних похідних виду:

$$F(t, x, \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial x^n}) = 0,$$

де u – невідома функція, $F()$ – поліном. Будемо знаходити часткові розв'язки, що мають характер відокремленої хвилі незмінної в часі форми. Нехай $\tilde{x}(t)$ – функція, що визначає закон руху максимуму збудження, $\exp(-g(x - \tilde{x}(t)))$ – функція, що описує профіль хвилі, де $g(\cdot)$ задовольняє умови:

$$g(x) \geq 0, \quad g(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad g''(0) \geq 0.$$

В найпростішому випадку функція $g(\cdot)$ є мірою, визначеною на множині інтервалів в R^1 . Такий вибір функції забезпечує симетрію профілю хвилі. Солітонні розв'язки знаходимо у вигляді:

$$u(x, t) = \gamma(t) \exp(-g(x - \tilde{x}(t)) / \epsilon), \quad (1)$$

де ε – деякий параметр, який може бути використаний для знаходження інфінітесимальних характеристик.

В роботі ставиться завдання модифікувати представлення (1) так, щоб на його основі можна було моделювати процеси поширення хвиль, які є комбінацією солітона та антисолітона.

Метою роботи є вдосконалення представлення (1) та знаходження на його основі нових класів розв'язків рівнянь типу Кортевега – де Вріза, зокрема, бризерного розв'язку рівняння КдВ.

Результати досліджень

Запропонований нами метод знаходження солітонних розв'язків проілюструємо на прикладі рівняння КдВ виду:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{2}$$

Згідно (1) маємо :

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{g'(x-\tilde{x}(t))}{\varepsilon} u = \eta u, \text{ де } \eta = -\frac{g'(x-\tilde{x}(t))}{\varepsilon}, \\ u_{xx} &= \eta_x u + \eta u_x = \eta_x u + \eta^2 u = (\eta_x + \eta^2) u; \\ u_{xxx} &= (\eta_{xx} + 2\eta\eta_x) u + (\eta_x + \eta^2) \eta u = (\eta_{xx} + 3\eta\eta_x + \eta^3) u; \\ u_t &= (\gamma'(t) / \gamma(t) + \frac{g'(x-\tilde{x}(t))}{\varepsilon} \tilde{x}'(t)) u = (\gamma'(t) / \gamma(t) - \eta \tilde{x}'(t)) u. \end{aligned} \tag{3}$$

Підставляючи (3) в (2), отримуємо:

$$\begin{aligned} &(\gamma'(t) / \gamma(t) - \eta \tilde{x}'(t)) u + 6\eta\eta u + (\eta_{xx} + 3\eta\eta_x + \eta^3) u = 0, \\ &(\gamma'(t) / \gamma(t) + \frac{g'(x-\tilde{x}(x,t))}{\varepsilon} \tilde{x}'_t(t)) u - 6\frac{g'(x-\tilde{x}(t))}{\varepsilon} u^2 - \\ &-\frac{g'''(x-\tilde{x}(t))}{\varepsilon} u + 3\frac{g''(x-\tilde{x}(t))}{\varepsilon} \frac{g'(x-\tilde{x}(t))}{\varepsilon} u - \left(\frac{g'(x-\tilde{x}(t))}{\varepsilon}\right)^3 u = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Нехай $x - \tilde{x}(t) = 0$. Тоді, враховуючи (1), з рівняння (4) отримуємо умову:

$$\begin{aligned} \gamma'(t) u / \gamma(t) - \frac{g'''(0)}{\varepsilon} u &= 0, \\ \gamma'(t) - \frac{g'''(0)}{\varepsilon} \gamma(t) &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Нехай $\gamma'(t) / \gamma(t) = C = const$.

Звідси отримуємо два випадки:

А) $\gamma'(t) = 0, \gamma(t) = \gamma = const, g'''(0) = 0$.

Б) $\gamma'(t) / \gamma(t) = C = const, \gamma(t) = Ce^{\frac{g'''(0)}{\varepsilon} t}, g'''(0) \neq 0$.

Отже, з рівняння (4) отримуємо:

$$\begin{aligned}
 C - \eta \tilde{x}'(t)u + 6\eta\eta u + (\eta_{xx} + 3\eta\eta_x + \eta^3)u &= 0, \\
 C - \frac{g'(x - \tilde{x}(x,t))}{\varepsilon} \tilde{x}_t(t)u + 6 \frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} u^2 + \frac{g'''(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} u - \\
 -3 \frac{g''(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} \frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} u + \left(\frac{g'(x - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} \right)^3 u &= 0.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Нехай $\tilde{x}(x,t) = vt$, $g(\cdot)/\varepsilon = \tilde{g}(\cdot)$, $x - vt = y$. Тоді з рівняння (6) отримуємо:

$$C + \tilde{g}'''(y) - 3\tilde{g}''(y)\tilde{g}'(y) + (\tilde{g}'(y))^3 - v\tilde{g}'(y) + 6\gamma\tilde{g}'(y)e^{-\tilde{g}(y)} = 0.$$

В результаті підстановок $\tilde{g}'(y) = p(\tilde{g})$, $w = p^2$ останнє рівняння запишеться у вигляді:

$$w''/2 - 3w'/2 + w = v - C - 6\gamma e^{-\tilde{g}}. \tag{7}$$

Загальний розв'язок рівняння (7) має вигляд:

$$w = v - C - 2\gamma e^{-\tilde{g}} + C_1 e^{2\tilde{g}} + C_2 e^{\tilde{g}}.$$

Тоді за умов $v - C - 2\gamma e^{-\tilde{g}} + C_1 e^{2\tilde{g}} + C_2 e^{\tilde{g}} \geq 0$, $v - C - 2\gamma + C_1 + C_2 = 0$ можемо визначити функцію $\tilde{g}(y)$, як розв'язок задачі Коші:

$$\begin{aligned}
 \tilde{g}'(y) &= \text{sign}(y) \sqrt{v - C - 2\gamma e^{-\tilde{g}} + C_1 e^{2\tilde{g}} + C_2 e^{\tilde{g}}}, \\
 \tilde{g}(0) &= 0.
 \end{aligned} \tag{8}$$

В роботі [2] показано, що відомий солітонний розв'язок рівняння КдВ $u(x,t) = 2\chi^2 ch^{-2} \chi(x - 4\chi^2 t - \phi)$ є частковим випадком представлень (1), де χ , ϕ – деякі параметри. При цьому $C_1 = C_2 = 0$ та $v = 2\gamma$. Тоді задача (8) запишеться у формі:

$$g'(y) = \text{sign}(y) \sqrt{v - v e^{-g}}, \quad g(0) = 0, \tag{9}$$

а її розв'язок: $g(y) = 2 \ln ch(\chi y)$.

Представлення (1) за умови (9) досить точно описує профіль самотньої хвилі, яка експериментально досліджувалась в [1]. При цьому розглядалось витікання води з-під затвору в умовах білякритичних течій.

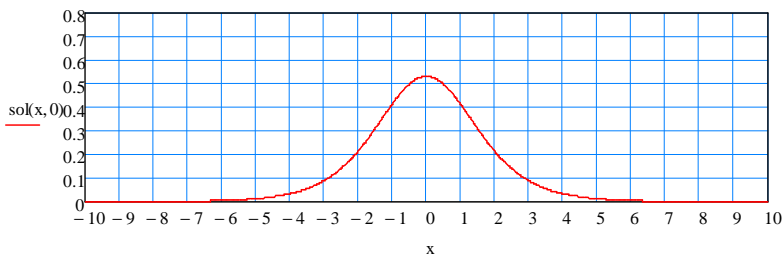


Рис. 1

Таблиця 1

x	Експер.	Теорет.
-5	0.01	0.01
-4	0.04	0.03
-3.5	0.06	0.06
-3	0.1	0.09
-2.5	0.15	0.14
-2	0.23	0.21
-1.5	0.34	0.3
-1	0.45	0.41
-0.5	0.51	0.50
0	0.53	0.53

Таблиця 2

x	Експер.	Теорет.
0.5	0.51	0.51
1	0.42	0.41
1.5	0.31	0.3
2	0.23	0.21
2.5	0.18	0.14
3	0.14	0.09
3.5	0.12	0.06
4	0.08	0.03
4.5	0.07	0.02
5	0.05	0.01
5.5	0.05	0.007
6	0.04	0.004
6.5	0.04	0.003

Відповідні дані вимірювань профілю хвилі та теоретичні результати згідно представлення профілю (1) для функції (9) наведені в табл. 1-2 та на рис. 3. На рис. 1 наведено відповідний теоретичний профіль, рис. 2 – порівняння експериментального профілю (жирна суцільна лінія) з іншими теоретичними представленнями розв'язків, які можна знайти в роботі [1].

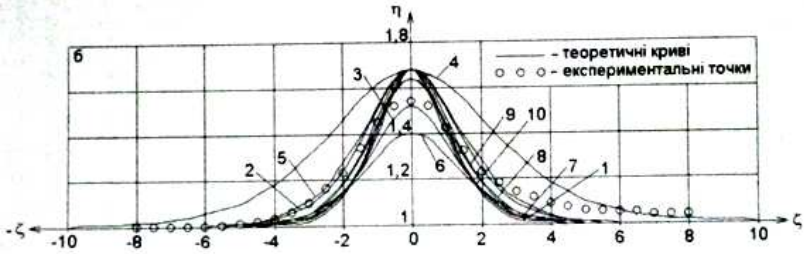


Рис. 2. Порівняння експериментального профілю хвилі з теоретичними

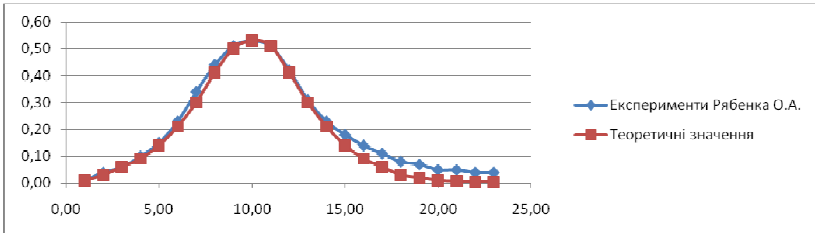


Рис. 3. Експериментальний та теоретичний профілі хвилі

Розглянемо, як за допомогою представлень виду (1) можна отримати бризерні розв'язки. Нехай

$$\tilde{u}(x, t) = (x - \tilde{x}(t))u. \quad (10)$$

Тоді

$$\tilde{u}_x(x, t) = u + (x - \tilde{x}(t))\eta u,$$

$$\tilde{u}_{xx}(x, t) = 2\eta u + (x - \tilde{x}(t))(\eta_x + \eta^2)u,$$

$$\tilde{u}_{xxx}(x, t) = 3(\eta_x + \eta^2)u + (x - \tilde{x}(t))(\eta_{xx} + 3\eta\eta_x + \eta^3)u,$$

$$\tilde{u}_t(x, t) = -\tilde{x}'(t)u + (x - \tilde{x}(t))(\gamma'(t) / \gamma(t) - \eta\tilde{x}'(t))u.$$

Підставляючи останні вирази в рівняння (2), маємо:

$$-\tilde{x}'(t)u + (x - \tilde{x}(t))(\gamma'(t) / \gamma(t) - \eta\tilde{x}'(t))u + 6(x - \tilde{x}(t))u(u + (x - \tilde{x}(t))\eta u) + 3(\eta_x + \eta^2)u + (x - \tilde{x}(t))(\eta_{xx} + 3\eta\eta_x + \eta^3)u = 0 \quad (11)$$

Нехай $\tilde{x}(x, t) = vt$. $g(\cdot) / \varepsilon = \tilde{g}(\cdot)$ $x - vt = y$. Тоді рівняння (11) запишемо у вигляді:

$$-\tilde{x}'(t) + y(\gamma'(t) / \gamma(t) - \eta\tilde{x}'(t)) + 6y(u + \eta u) +$$

$$+ 3(\eta_x + \eta^2) + y(\eta_{xx} + 3\eta\eta_x + \eta^3) = 0 \text{ або}$$

$$-v + y(\gamma'(t) / \gamma(t) - \eta v) + 6y(u + \eta u) + 3(\eta_x + \eta^2) + y(\eta_{xx} + 3\eta\eta_x + \eta^3) = 0.$$

Звідси отримуємо рівняння для знаходження функції $g(\cdot)$:

$$-v - \nu \tilde{g}'(y) + 6y(1 + y\tilde{g}'(y))\gamma e^{-g(y)} + 3(\tilde{g}''(y) + (\tilde{g}'(y))^2) + y(\tilde{g}'''(y) + 3\tilde{g}'(y)\tilde{g}''(y) + (\tilde{g}'(y))^3) = 0 \quad (12)$$

Нехай $\nu = 2, g(0) = 0, g'(0) = 0, g''(0) = \frac{2}{3}, \gamma(t) = 0.01$. Тоді отримуємо розв'язок, представлений на рис. 4.

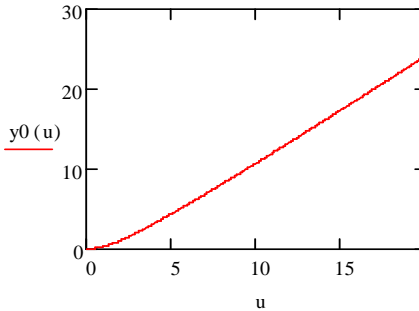


Рис. 4. Графік функції $g(\cdot)$

Бачимо, що функція $g(\cdot)$ належить потрібному нам класу функцій і забезпечує умову локалізації розв'язку. На рис. 5 наведена поверхня $\tilde{y}(x, t)$, що описує збурення як комбінацію солітона та антисолітона, а на рис.6 – значення функції $\tilde{y}(x, t)$ при фіксованому значенні t .

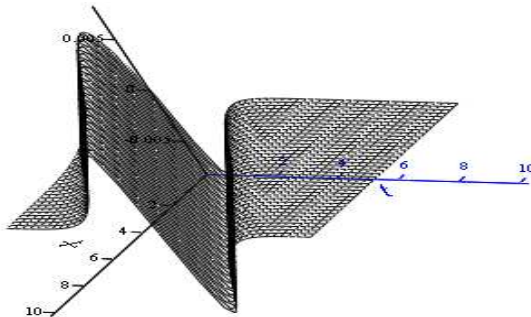


Рис. 5. Поверхня $\tilde{y}(x, t)$

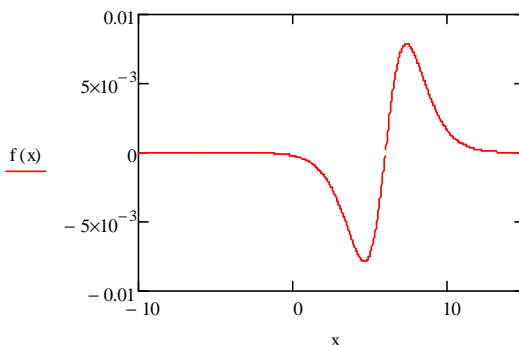


Рис. 6. Функція $\tilde{y}(x,1)$

Висновок. Таким чином, в роботі на основі Т-представлень узагальнено відомі солітонні розв'язки рівняння КдВ та а також знайдено нові класи точних розв'язків. Показано, що солітон Кортевега – де Вріза є частковим випадком відповідних узагальнень, знайдених у формі Т-представлень.

Також знайдено розв'язок, що представляє собою комбінацію солітона та антисолітона (брисер). Теоретично описаний профіль хвилі добре узгоджується з експериментальними дослідженнями профілю хвилі у каналі при витіканні води з-під затвору.

Представлення розв'язків, запропоновані у роботі, можуть бути використані для дослідження солітонних розв'язків інших диференціальних рівнянь типу КдВ.

1. Рябенко О. А. Теоретичні основи і методи розрахунків білякритичних течій рідини з вільною поверхнею : дис. ... доктора тех. наук : 05.23.16 / Рябенко Олександр Антонович. – Р., 2003. – 376 с. **2.** Турбал Ю. В. О необходимых и достаточных условиях существования решений уравнений движения для анизотропных упругих тел в виде уединенных волн типа δ -солитонов / Турбал Ю. В. // Проблемы прикладной математики и математического моделирования.- 2012.-вып.2012-С.78-86. **3.** Asaraii A. Infinite Series Method for Solving the Improved Modified KdV Equation/ A. Asaraii //Studies in Mathematical Sciences. – 2012. – V. 4, N. 2. – P. 25–31. **4.** Matveev V. B. Darboux Transformations and Solitons / V. B. Matveev, M. A. Salle. – Berlin : Springer., 1991. **5.** Evans D. J. The Tanh Function Method for Solving Some Important Non-Linear Partial Differential Equation / D. J. Evans, K. R. Raslan // Int. J. comput. Math. – 2005. – № 82. – С. 897–905. **6.** Elwakil, S. A. Modified Extended Tanh-Function Method For Solving Nonlinear Partial Differential Equations.// S. A. Elwakil, E. L. Labany, S. K. Zahran, M. A. Sabry // Phys. Lett. – 2002. – А., 299. – С. 179–188. **7.** Gao Y. T. Generalized Hyperbolic-Function Method with Computerized Symbolic Computation to Construct the Solitonic Solutions to Nonlinear Equations of Mathematical Physics / Y. T. Gao, B. Tian //Comput. Phys. Commun. – 2001. – № 133. – С. 158–164. **8** Kim J. M. New Exact Solutons to the Kdv-Burgers-Kuramoto Equation whith the Exp-Function Method / J. M. Kim, C. Chun //

Abstract and Applied Analysis. – 2012. – Volume 2012. – Article ID 892420. **9.** Adomian G. The fifth-order kortevæg-de vries equation./ G. Adomian // Internet J. Math. & Math. Sci. – 1996. – Vol. 19, No 2. – С. 415. **10.** Maomao C. The Coupled Kuramoto Sivashinsky-KDV Equations for Surface Wave in Multilayered Liquid Films / C., Maomao, L. Dening, C. Rattanakul // Mathematical Physics. – 2013. – Volume 2013. – Article ID 673546. **11.** Salas A. H. Exact Solutions for a Third-Order KdV Equation with Variable Coefficients and Forcing Term / A. H. Salas, C. A. Gomez // Mathematical Problems in Engineering. – 2009. – Volume 2009. – Article ID 737928. **12.** Turbal Y. The trajectories of self-reinforcing solitary wave in the gas disc of galaxies// Proceedings of the 3-rd International Conference on Nonlinear Dynamic. – Kharkov, 2010. – P. 112–118. **13.** Doronin G. Well and ill-posed problems for the KdV and Kawahara equations/ G. Doronin, N. A. Larkin // Bol. Soc. Paran. Mat. – 2008 – (3s.) v. 26. – С. 133–137. **14** Рыскин Н. М. Нелинейные волны. Учеб. пособие для вузов / Рыскин Н. М., Трубецков Д. И. – М. : Наука. Физматлит, 2000. – 272 с.

Рецензент: д.т.н., Щодро О. Є. (НУВГП)

Bomba A. Y., Doctor of Engineering, Professor, Ryabenko O. A., Doctor of Engineering, Professor, Turbal Y. V., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor (National University of Water Management and Nature Resources Use, Rivne)

MODIFIED T-REPRESENTATION METHOD FOR FINDING BREATHER SOLUTIONS OF THE KORTEWEG-DE VRIES TYPE EQUATIONS

This paper proposes a method for finding the analytical representation of KDV solutions as a combination of the soliton and antisoliton.

Keywords: soliton, antisoliton, breather, KDV solutions.

Бомба А. Я., д.т.н., профессор, Рябенко А. А., д.т.н., профессор, Турбал Ю. В., к.ф.-м.н., доцент (Национальний університет водного господарства та природодопользования ния, г. Ровно)

МОДИФИКАЦИЯ Т-ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ БРИЗЕРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТИПА КОРТЕВЕГА-ДЕ ВРИЗА

В статье предложен метод для нахождения аналитического представления решений уравнений типа Кортевега де-Вриза как комбинаций солитона и антисолитона. Приведены сравнения теоретических и экспериментальных значений профиля уединенной волны.

Ключевые слова: солитон, антисолитон, бризер, КДВ.
