

УДК 539.3

**Кундрат М. М., д.т.н., професор, Мисюкевич А. М., аспірант, Кундрат А. М., к.ф.-м.н., доцент** (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

### **ЛОКАЛІЗОВАНІ ЗОНИ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ В ПЛАСТИНІ З НЕРОЗТЯГЛИВИМ ЛІНІЙНИМ ПІДСИЛЕННЯМ**

За умов плоскої задачі досліджується гранична рівновага пластини з підсиленням при розтягу зосередженими силами та напруженнями на безмежності. Локалізовані зони передруйнування розвиваються вздовж межі підсилення від його торців до центральної частини. З'ясовано вплив навантаження, розподіл контактних напружень, осьових зусиль, характер руйнування композиції.

**Ключові слова:** підсилення, зона передруйнування, контактні напруження, осьові зусилля.

Ще до втрати утримувальної здатності конструкційних матеріалів у них відбуваються процеси локального руйнування: порушення адгезійних зв'язків, розпушення матеріалу, нелінійне та пластичне деформування матриці чи контактної прошарку між компонентами. Тому для розуміння кінетики руйнування таких матеріалів необхідний детальний аналіз полів напружень та деформацій біля концентраторів з додатковим урахуванням явищ нелінійного деформування чи розшарування. Локальні зони передруйнування можуть мати різноманітні форми й отримання точних розв'язків відповідних задач для різних випадків навантаження, геометрії тіла чи включення пов'язане зі значними математичними труднощами. Один з ефективних підходів до розв'язання проблеми полягає в моделюванні їх тонкими прошарками матеріалу, в яких напруження досягають зсувної межі міцності чи при пластичному деформуванні зсувного порогу текучості. При достатньо великій довжині смуг у нелінійній механіці руйнування застосовують заміну їх розрізами, поверхні яких взаємодіють між собою за деяким законом, тобто нехтується шириною смуги в порівнянні з її довжиною і якщо сили взаємодії між берегами розрізу відомі, задача приводиться до деякої змішаної задачі теорії пружності.

**Огляд досліджень.** Розв'язок плоскої задачі теорії пружності для тіла з еліптичним ядром подано у праці М. Мусхелішвілі [1]. Поля напружень і переміщень біля вершин підсилень, включень та їх асимптотичні подання досліджувалися в широкому колі праць, найбільш повно

їх огляд подано в монографії Г. Сулима [2]. Точна границя локалізованої пластичної зони за умов антиплоскої деформації біля “тунельної” неоднорідності в ізотропному тілі для ідеально пружнопластичної матриці має вигляд [3] циліндричної кругової області радіуса  $r_{pl} = 0,5(k_3/\tau_T)^2$ , зміщеної на  $r_{pl}$  від вершини в сторону неоднорідності, де  $\tau_T$  – межа текучості при зсуві. Для плоскої задачі виявлено [4, 5], що на відміну від тріщини, область пластичності в околі неоднорідності зміщена в її сторону на  $1,3d$ ,  $d = (\pi K_1/\sqrt{2}\tau_T)$ . Отриманий результат якісно узгоджується з експериментальними даними руйнування композитів [6–8].

Задачі про початковий розвиток смуг ковзання в околі вершини підсилення (чи в частковому випадку біля тріщини) розв’язані у працях [9, 10]. Отримано оцінку розвитку локалізованих пластичних деформацій для ідеально пружнопластичного тіла, що задовольняє умові Треска-Сен-Венана. При цьому в напрямку розвитку смуг найбільша розбіжність між максимальними дотичними напруженнями  $\tau_{\max}$  і відповідними дотичними напруженнями  $\sigma_{r\theta}$  не перевищує 3%. Розміри смуг вздовж контактної межі матриця-підсилення досліджено в працях [10, 11] за тих же умов, їх довжина за умовою максимальних дотичних напружень  $\tau_{\max}$  та за умовою  $\sigma_{r\theta} = \tau_s^*$  збігаються. Аналіз напружень в кутовій точці підсилення з пластичною зоною, що моделюється лінією ковзання, виконано в [12].

Аналітичний розв’язок задачі уже без обмежень на довжину зони ковзання отримано в працях [13, 14]. Але при цьому залишалася логарифмічна особливість в околі вершини підсилення, що затрудняло інтерпретацію отриманих даних як розв’язок модельної пружнопластичної задачі. В працях [15–17] сформульовано нову модельну постановку, яка передбачає двофазну зону передруйнування, що складається з спричиненого високою концентрацією пружних напружень ділянки розпушення та області пластичного зсуву чи адгезії. Це дало змогу отримати більш високий рівень фізичної адекватності моделі та уникнути внаслідок цього сингулярності напружень, отримавши природним чином в усіх точках композиції механічно коректні обмежені напруження. Розрахункова модель описується, крім пружних сталей, ще трьома характеристиками: зсувною міцністю (порогом текучості)  $\tau_s^*$ , граничним значенням зсувів  $\delta_{2c}$  та міцністю підсилення на розрив  $P_{ut}$ . Вивчено [18, 19] розвиток локалізованих в тонких областях зон

передруйнування в тілі з тонкими пружними включеннями. У цій праці розвиваємо дослідження про розвиток локалізованих зон передруйнування за умов більш загального навантаження.

**Математична модель задачі.** За умов плоскої задачі теорії пружності розглядаємо однорідне ізотропне тіло з лінійним підсиленням завдовжки  $2a$ . Осі декартової системи координат  $xOy$  збігаються з осями геометричної симетрії композиції (рис. 1). Міцність матеріалу межі матриця-підсилення вважаємо не меншою від міцності матриці.

У симетричних стосовно осі  $Ox$  точках  $z_k = x_k + iy_k$  ( $k = 1; 2; \dots$ ) прикладені зосереджені сили  $Q_k = X_k + iY_k$  та на нескінченності рівномірно розподілені сталі напруження

$$\sigma_{xx}^{\infty} = q, \quad \sigma_{yy}^{\infty} = p. \quad (1)$$

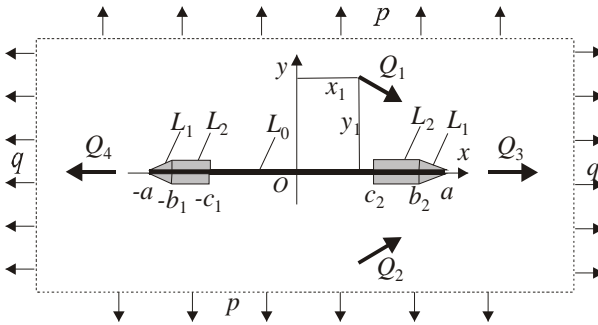


Рис. 1. Схема задачі

Аналіз напруженого стану такої композиції за суто пружним розв’язком [20] свідчить, що максимальні дотичні напруження  $\tau_{\max}$  мають місце в околах кінців підсилення уздовж його межі з пластиною. Вважаємо, що саме тут і зароджуються зони передруйнування, просуваючись від кожного краю до центральної частини уздовж межі і складаються з двох ділянок: малих областей розпушення  $x \in L_1 = (-a, -b_1) \cup (b_2, a)$  та ділянок пластичного деформування  $x \in L_2 = (-b_1, -c_1) \cup (c_2, b_2)$ . Зони передруйнування в околах лівої та правої вершин підсилення будуть різними за довжиною, але на верхньому (“+”) та нижньому (“-”) краях однакові. Впливом пластичних зон у точках прикладання сил нехтуємо. При цьому виконуються такі

крайові умови: на ділянках розпушення (ослабленого, неідеального контакту) дотичні напруження лінійно зростають від нуля до свого граничного значення  $\tau_s^*$  –

$$\sigma_{xy}^+(x) = -\sigma_{xy}^-(x) = -\tau_s^* \frac{a+x}{a-b_1}, \quad x \in (-a, -b_1), \quad (2)$$

$$\sigma_{xy}^+(x) = -\sigma_{xy}^-(x) = \tau_s^* \frac{a-x}{a-b_2}, \quad x \in (b_2, a),$$

а на ділянках пластичного деформування вони стали –

$$\sigma_{xy}^+(x) = -\sigma_{xy}^-(x) = \tau_s^* \text{sign}(x), \quad x \in L_2. \quad (3)$$

На ділянці  $x \in L_0 = (-c_1, c_2)$  зв'язок з матрицею ідеальний

$$(\partial u / \partial x)^\pm = (\partial v / \partial x)^\pm = 0, \quad y = 0 \quad (x \in L_0). \quad (4)$$

Величину  $\tau_s^*$  трактуємо як теоретичну зсувну міцність межі поділу або як технічну зсувну міцність межі поділу з урахуванням її структурних недосконалостей, чи за пластичного деформування – як зсувний поріг пластичності;  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  – компоненти тензора напружень;  $u, v$  – компоненти вектора переміщень відповідно уздовж декартових координат  $Ox$  та  $Oy$ ; знаки “+” та “-” відповідають граничним значенням на дійсній осі відповідно з верхньої ( $y > 0$ ) та нижньої ( $y < 0$ ) півплощин;  $\text{sign}(x) = \{1 \text{ для } x > 0; -1 \text{ для } x < 0; 0 \text{ для } x = 0\}$ .

Таке подання дає можливість привести розв'язання поставленої нелінійної задачі до задачі лінійної теорії пружності. Значення параметрів  $c_i$  ( $i = 1; 2$ ) знаходимо з додаткових фізичних умов, а  $b_i$  ( $i = 1; 2$ ) задаємо – умов для їх обчислення поки що немає. Їх доцільно пов'язати з розмірами структурних елементів (зерен) матеріалу адгезійного прошарку, що виражає інтегральний вплив неоднорідності структури на напружено-деформований стан.

Околиці вершин підсилення є місцями найбільш інтенсивного локального деформування і при досягненні в них максимальними переміщеннями  $u(a)$  певної межі  $\delta_{2c}$  настає можливість розшарування композиції, тобто втрати зв'язку. Таке розшарування визначаємо як процес розриву ослаблених перед тим зв'язків, а умовою розриву, аналогічно відомій [21]  $\delta_c$ -моделі, приймається рівність  $u(a) = \delta_{2c}$ . З іншого боку, дотичні напруження уздовж поверхні зчеплення матриці з включенням спричиняють у поперечному перерізі останнього появу осово-

го зусилля, яке за перевищення границі міцності підсилення  $P_{ut}$  може його розірвати.

Таким чином, розрахункова модель описується трьома міцнісними характеристиками: адгезійною міцністю контактної межі –  $\tau_s^*$ , граничним значенням переміщень  $\delta_{2c}$  та міцністю підсилення на розрив  $P_{ut}$ . І за фіксованої довжини підсилення або розривається або відшаровується від матриці залежно від того, яка із критеріальних умов ( $u(a) = \delta_{2c}$  чи  $P_{max} = P_{ut}$ ) досягається раніше. Найменше значення навантаження, при досягненні якого реалізується хоча б одна з прийнятих двох критеріальних умов, називаємо граничним навантаженням.

**Побудова розв'язку задачі.** Напружено-деформований стан у композиції визначаємо як суперпозицію розв'язків двох задач:

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_*(z), \quad (5)$$

де індексом “0” позначені складові, що дають розв'язок задачі для суцільного тіла при відсутності неоднорідності (однорідний розв'язок), а “\*” – розв'язок задачі, що враховує розрив переміщень (збурений розв'язок);  $z = x + iy$ . Однорідний розв'язок відомий [1]

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{4}(q + p) - \frac{1}{2\pi(\kappa + 1)} \sum_k \frac{Q_k}{z - z_k}.$$

Координати точок прикладання сил згідно рис. 1 та їх значення прийнято такими:  $Q_1 = X_1 - iY_1$  ( $z_1 = x_1 + iy_1$ ),  $Q_2 = X_1 + iY_1$  ( $z_1 = x_1 - iy_1$ ),  $Q_3 = X_3$  ( $z_3 = x_3$ ),  $Q_4 = -Q_3 = -X_3$  ( $z_4 = -x_3$ ).

Збурений розв'язок після задоволення крайових умов (2)–(4) пов'язаний із задачею лінійного спряження для функції  $\Phi_*(z)$ :

$$\begin{aligned} \Phi_*^+(x) + \Phi_*^-(x) &= A_1 / \kappa - 2\Phi_0(x) \quad (x \in L_0), \\ \Phi_*^+(x) - \Phi_*^-(x) &= -2i\sigma_{xy}^+(x) / (\kappa + 1) \quad (x \in L_1 + L_2), \end{aligned} \quad (6)$$

де  $A_1 = [(\kappa - 1)q + (3 + \kappa)p] / 4$ .

Після розв'язання задачі (6), врахувавши формули (5), поведінку функцій на нескінченності та умови однозначності переміщень при обході контуру підсилення, отримаємо вираз для функції напружень

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{A_1}{2\kappa} - \frac{2\tau_s^*}{\pi(\kappa + 1)} [I_0 + zI_1 + \ln(c_1 + c_2)] + \\ &+ \frac{1}{X_0(z)} \left[ \frac{\tau_s^*}{2\pi(\kappa + 1)} g_5 - \frac{z^2 \tau_s^*}{\pi(\kappa + 1)} g_2 + z \left( \frac{A_2}{2\kappa} + \frac{\tau_s^*}{\pi(\kappa + 1)} (g_4 + 2 \ln(c_1 + c_2)) \right) \right] + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\pi(\kappa+1)} \left( \frac{\sqrt{r_1}((x_1-z)F_{1\alpha} + y_1F_{2\alpha})}{(z-x_1)^2 + y_1^2} - \frac{zX_3\sqrt{(x_3+c_1)(x_3-c_2)}}{z^2 - x_3^2} \right), \quad (7)$$

де  $F_{1\alpha} = X_1 \cos(\alpha_1/2) + Y_1 \sin(\alpha_1/2)$ ,  $F_{2\alpha} = X_1 \sin(\alpha_1/2) - Y_1 \cos(\alpha_1/2)$ ,

$$\alpha_1 = \arctg \frac{y_1(2x_1 + c_1 - c_2)}{(x_1 + c_1)(x_1 - c_2) - y_1^2}, \quad r_1 e^{i\alpha_1} = (x_1 + c_1 + iy_1)(x_1 - c_2 - iy_1),$$

$$I_0 = \frac{1}{a-b_1} [b_1 I_3(b_1) - a I_3(a)] + \frac{1}{a-b_2} [b_2 I_4(b_2) - a I_4(a)],$$

$$I_1 = \frac{1}{a-b_1} [I_3(b_1) - I_3(a)] + \frac{1}{a-b_2} [I_4(a) - a I_4(b_2)],$$

$$I_3(\omega) = \ln \frac{\sqrt{(z-c_2)(\omega-c_1)} + \sqrt{(z+c_1)(\omega+c_2)}}{\sqrt{z+\omega}},$$

$$I_4(\omega) = \ln \frac{\sqrt{(z-c_2)(\omega+c_1)} + \sqrt{(z+c_1)(\omega-c_2)}}{\sqrt{z-\omega}},$$

$$g_2 = \frac{1}{a-b_1} [g_6(a) - g_6(b_1)] + \frac{1}{a-b_2} [g_7(b_2) - g_7(a)],$$

$$g_6(\omega) = 2 \ln(\sqrt{\omega-c_1} + \sqrt{\omega+c_2}), \quad g_7(\omega) = 2 \ln(\sqrt{\omega+c_1} + \sqrt{\omega-c_2}),$$

$$g_4 = \frac{1}{a-b_1} [X_0(a) - X_0(b_1) + b_1 g_6(b_1) - a g_6(a)] +$$

$$+ \frac{1}{a-b_2} [X_1(a) - X_1(b_2) + b_2 g_7(b_2) - a g_7(a)],$$

$$g_5 = \frac{1}{a-b_1} [(a-c_3)X_1(a) - (b_1-c_3)X_1(b_1)] +$$

$$\frac{1}{a-b_2} [(b_2+c_3)X_0(b_2) - (a+c_3)X_0(a)],$$

$$X_0(\omega) = \sqrt{(\omega+c_1)(\omega-c_2)}, \quad X_1(\omega) = \sqrt{(\omega-c_1)(\omega+c_2)},$$

$$A_2 = [(\kappa+1)q - (3-\kappa)p]/4, \quad c_3 = (c_1 - c_2)/2.$$

Умова обмеженості напружень у вершинах зон передруйнування ( $x = \{-c_1, c_2\}$ ) зводиться до виконання системи двох нелінійних рівнянь:

$$\frac{\tau_s^*}{\pi(\kappa+1)} (2c_2 \ln(c_1 + c_2) + c_2 g_4 - c_2^2 g_2 + 0,5 g_5) - \frac{c_2}{4\kappa} A_2 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{\sqrt{\eta_1}((x_1 - c_2)F_{1\alpha} + y_1 F_{2\alpha})}{(c_2 - x_1)^2 + y_1^2} - \frac{c_2 X_3 \sqrt{(x_3 + c_1)(x_3 - c_2)}}{c_2^2 - x_3^2} \right) \frac{1}{\pi(\kappa + 1)} = 0, \quad (8) \\
 & - \frac{\tau_s^*}{\pi(\kappa + 1)} \left[ 2c_1 \ln(c_1 + c_2) + c_1 g_4 + c_1^2 g_2 - 0,5 g_5 \right] + \frac{c_1}{4\kappa} A_2 + \\
 & + \left[ \frac{\sqrt{\eta_1}((h_1 + c_1)F_{1\alpha} + y_1 F_{2\alpha})}{(x_1 + c_1)^2 + y_1^2} + \frac{c_1 X_3 \sqrt{(x_3 + c_1)(x_3 - c_2)}}{c_1^2 - x_3^2} \right] \frac{1}{\pi(\kappa + 1)}.
 \end{aligned}$$

При навантаженні лише на нескінченності розподіленими сталими напруженнями величини  $q, p$  приймаємо в отриманому розв'язку  $c_2 = c_1 = c, b_1 = b_2 = b, X_1 = Y_1 = X_3 = 0$ . Функція напружень та умови на довжину зон передруйнування при цьому збігаються з отриманими раніше [15, 16].

**Дві зосереджені сили.** Нехай зосереджені сили  $Q_3 = Q$  та  $Q_4 = -Q$  прикладені в точках  $x = \pm x_3$  на лінії продовження підсилення. Приймаючи у формулах (7), (8)  $q = p = 0, X_1 = Y_1 = 0, c_2 = c_1 = c, b_2 = b_1 = b$ , отримуємо вираз для функції напружень

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi(\kappa + 1)} \left[ \tau_s^* f_3(z, a, b, c) + \frac{1}{\sqrt{z^2 - c^2}} \left( 2\tau_s^* f_4(a, b, c) - \frac{Q\sqrt{x_3^2 - c^2}}{z^2 - x_3^2} \right) \right], \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned}
 f_3(z, a, b, c) &= [b\Gamma_1(z, b, c) - a\Gamma_1(z, a, c) + z(\Gamma_2(z, b, c) - \Gamma_2(z, a, c))]/(a - b), \\
 f_4(a, b, c) &= \left[ b \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - c^2}}{c} - a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{c} + \right. \\
 & \left. + \sqrt{a^2 - c^2} - \sqrt{b^2 - c^2} \right] / (a - b).
 \end{aligned}$$

Система рівнянь (8) на обчислення довжини зон спрощується до одного

$$Q / (2\tau_s^*) + \sqrt{x_3^2 - c^2} f_4(a, b, c) = 0. \quad (10)$$

За результатами розв'язування рівняння (10) на рис. 2 подано залежність знерозміреного навантаження  $\tilde{Q} \equiv Q / (2a\tau_s^*)$  від параметрів  $\alpha \equiv b/a$  і  $\beta \equiv c/b$  при фіксованій відстані до точок прикладання сил  $\tilde{x}_3 \equiv x_3/a = 1,1$  ( $\kappa = 2,2$ ). Номери біля ліній відповідають різним зна-

ченням параметра  $\beta$ :  $1-\beta=1$ ;  $2-\beta=0,95$ ;  $3-\beta=0,90$ ;  $4-\beta=0,85$ ;  $5-\beta=0,80$ ;  $6-\beta=0,7$ . Збільшення ділянки розпушення за фіксованого рівня навантаження видовжує зону передруйнування, хоча сама ділянка пластичного деформування при цьому зменшується.

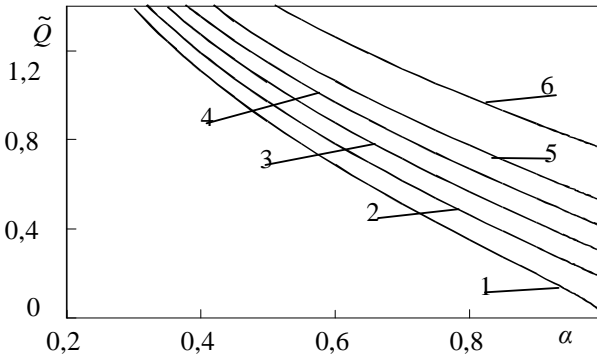


Рис. 2. Розміри зон передруйнування

На рис. 3 подано залежності довжин зон передруйнування  $\varepsilon = (a-c)/a$  від відносної відстані  $\tilde{x}_3/a$  до точок прикладання сил за зафіксованого рівня навантаження  $\tilde{Q} = 0,5$ , номери біля ліній відповідають різним довжинам ділянки розпушення  $\gamma \equiv (a-b)/a$ :  $1-\gamma=10^{-5}$  (ділянка розпушення практично відсутня);  $2-\gamma=0,05$ ;  $3-\gamma=0,15$ ;  $4-\gamma=0,25$ . Обрив ліній обумовлений тим, що постановка задачі передбачає існування ділянки розпушення завдовжки  $\gamma$ . Зауважимо, що на відміну від задачі з однорідним напруженим станом на нескінченності розміри зон передруйнування залежать лише від міцнісних характеристик межі поділу.



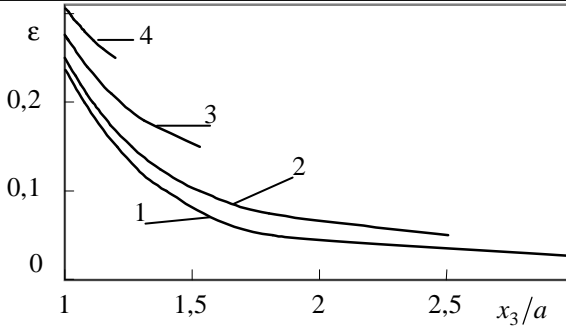


Рис. 3. Довжина зон передруйнування для різних ділянок розпушення

У випадку дуже малих ділянок розпушення  $b \rightarrow a$  ( $\gamma \rightarrow 0$ ) за малих навантажень і відповідно малих довжин зон передруйнування ( $\varepsilon \ll 1$ )

$$a - c = \frac{Q^2}{8(\tau_s^*)^2} \frac{a}{x_3^2 - a^2}. \quad (11)$$

Тобто, у першому наближенні довжина зон пропорційна квадрату прикладених сил, довжині підсилення та обернено пропорційна різниці квадратів відстаней між точками прикладання сил та вершинами підсилення.

Граничне навантаження  $Q = Q^*$  за деформаційним критерієм у першому наближенні можна оцінити за формулою

$$Q^* = 2\sqrt{\bar{x}_3^2 - 1} \sqrt{\pi(\kappa + 1)G\delta_{2c}a\tau_s^*/\kappa}. \quad (12)$$

Отримані співвідношення придатні для експериментальної механіки руйнування, оскільки за відомою довжиною локалізованої зони передруйнування та граничним навантаженням можна оцінити граничні розриви переміщень  $\delta_{2c}$  та питому енергію відшарування для конкретних композицій.

Найбільше значення розривних зусиль досягається посередині включення

$$P_{\max} = P(0) = (2\tau_s^*/\pi)f_5(a, b, c), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{де } f_5(a, b, c) = & \left[ b^2 \arctg\left(c/\sqrt{b^2 - c^2}\right) - a^2 \arctg\left(c/\sqrt{a^2 - c^2}\right) + \right. \\ & \left. + 0,5\pi(a^2 - b^2) + c\left(\sqrt{b^2 - c^2} - \sqrt{a^2 - c^2}\right) \right] / (a - b). \end{aligned}$$

Зміна довжини ділянки розпушення слабо впливає на розподіл осьових розривних зусиль у підсиленні і на їхні максимальні значення. На рис. 4 відображено залежність величини  $\tilde{P}(0) \equiv P(0)/(2\tau_s^* a)$  від параметра навантаження при  $\tilde{x}_3 = 1,1$  як розв'язок системи рівнянь (13), (10). Номери біля ліній відповідають тим же довжинам ділянок розпушення що і на рис. 3. Зі збільшенням довжини ділянки розпушення значення розривних зусиль дещо зменшується. Зі збільшенням навантаження та розвитком локалізованих зон передруйнування осьові зусилля також зростають. Збільшення розривних зусиль у підсиленні (із збільшенням навантаження) буде проходити до досягнення розривами переміщень граничного значення  $\delta_{2c}$ . З іншого боку, міцність підсилення на розрив обмежена і для того, щоб воно залишалось цілим, максимальні осьові зусилля  $P_{\max}$  не повинні перевищувати його міцності на розрив  $P_{\max} \leq P_{ut}$ .

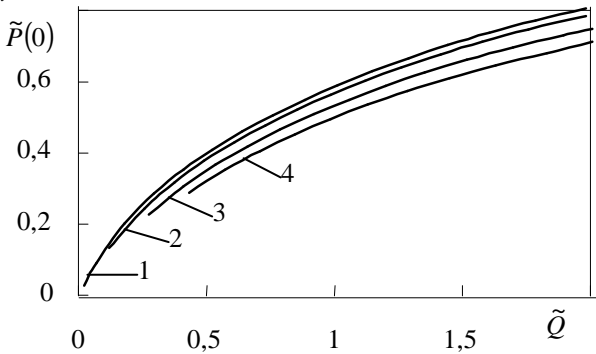


Рис. 4. Осьові зусилля у підсиленні

Значення граничного навантаження розриву  $Q = Q^{**}$  визначаємо із розв'язку системи рівнянь

$$Q^{**} - 2\tau_s^* \sqrt{\tilde{x}_3^2 - c^2} f_4(a, b, c) = 0,$$

$$\pi P_{ut} - 2\tau_s^* f_5(a, b, c) = 0.$$

Таким чином, характер руйнування в композиції буде визначатися: з однієї сторони – міцнісними параметрами  $\delta_{2c}$ ,  $\tau_s^*$  (чи  $\gamma_\tau^* = 4\delta_{2c}\tau_s^*$ ), з іншого боку – міцністю підсилення  $P_{ut}$  і при фіксованій довжині воно або відшаровується від матриці або розривається в залежності від того, яка із граничних рівностей досягається раніше.

- 1.** Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с. **2.** Сулим Г. Т. Основы математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г. Т. Сулим. – Львів : Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с. **3.** Громьяк Р. С. О зоне пластичности в окрестности вершины жесткого включения при антиплоской деформации / Р. С. Громьяк // Физико-химическая механика материалов. – 1979. – Т. 15, № 4. – С. 124–126.
- 4.** Бережницкий Л. Т. Применение метода локальных вариаций для определения зон пластичности возле дефектов / Бережницкий Л. Т., Сенюк М. Н. // Тез. докл. III Респ. конф. “Вычислительная математика в современном научно-техническом прогресе”. – Киев, 1982. – С. 113–114. **5.** Громьяк Р. С. Определение границы пластической зоны в окрестности жесткого включения при растяжении тонкой несжимаемой пластины / Бережницкий Л. Т., Сенюк М. Н. // Материалы 9-й конф. молод. ученых Физ.-мех. ин-та АН УССР. Секц. физ.-хим. механики материалов. – Львов, 1979. – С. 33–35. **6.** Шами К. Механизм передачи нагрузки через поверхность раздела / Шами К. // Композиционные материалы. Т. 6. Поверхности раздела в полимерных композитах. – М. : Мир, 1978. – С. 42–87. **7.** Эберт Л. Дж., Райт П. К. Механические поверхности раздела / Эберт Л. Дж., Райт П. К. // Композиционные материалы. – Т. 1. Поверхности раздела в металлических композитах. – М. : Мир, 1978. – С. 42–76.
- 8.** Fukuda Hiroshi. Stiffness and strength of short fibre composites as affected by crack and plasticity /. Fukuda Hiroshi, Chou Tsu-Wei. // Fibre Sci. and Technol. – 1981. – V. 15, № 4. – P. 243–256. **9.** Бережницкий Л. Т. О пластических полосах у вершины линейного жесткого включения / Бережницкий Л. Т., Кундрат Н. М. // Проблемы прочности. – 1982. – № 11. – С. 66–69. **10.** Кундрат Н. М. Полосы скольжения в окрестности жестких волокон, включений и трещин: Автореф. дис... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Кундрат Н. М. ; Ин-т прикладных проблем механики и математики АН Украины. – Львов, 1984. – 18 с.
- 11.** Кундрат Н. М. О полосах скольжения вдоль границы матрица-включение / Кундрат Н. М. // Физико-химическая механика материалов. – 1983. – Т. 19, № 1. – С. 102–105. **12.** Каминский А. А. Об анализе напряжений в угловой точке жесткого включения при наличии пластической зоны, моделируемой линиями скольжения / Каминский А. А., Кипнис Л. А., Хазин Г. А. // Теор. и прикл. механика. – 2001. – № 32. – С. 93–102. **13.** Brussat T. R. Interfacial slip around rigid fiber inclusions / Brussat T. R., Westmann R. A. // J. Comp. Mater. – 1974. – V. 8, № 4. – P. 364–377. **14.** Бережницкий Л. Т. Локальное упругопластическое разрушение одного класса композитов / Бережницкий Л. Т., Кундрат Н. М. // Физико-химическая механика материалов. – 1984. – Т. 19, № 5. – С. 57–64.
- 15.** Кундрат М. М. Композиція з жорстким лінійним включенням в модельному формулюванні / Кундрат М. М. // Вісник Львівського Університету. Серія прикладна математика. – 1999. – Вип. 1. – С. 146–151. **16.** Кундрат М. М. Гранична рівновага композиції з жорсткими лінійними включеннями / Кундрат М. М. // Шоста Всеукраїнська наукова конф. “Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання у наукових дослідженнях”. – Львів, 1999. – С. 61–62. **17.** Sulym H. T. Limiting Equilibrium and Fracture in an Orthotropic

Body Containing a Thin Rigid Inclusion / Sulym H. T., Kundrat M. M. // *Materials Science*. – 2006. – V. 42, № 2. – P. 220–232. **18.** Кундрат М. М. Зони передруйнування в композиції з пружним високомодульним стрічковим включенням за симетричного та антисиметричного навантажень / Кундрат М. М., Сулим Г. Т. // *Машинознавство*. – 2003. – № 11. – С. 3–8. **19.** Сулим Г. Т. Композиция с упругим ленточным включением и зонами предразрушения у его вершин / Сулим Г. Т., Кундрат Н. М. // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2004. – Т. 10, № 2. – С. 224–230. **20.** Бережницкий Л. Т. К оценке предельного состояния матрицы в окрестности остроконечного жесткого включения / Бережницкий Л. Т., Громьяк Р. С. // *Физико-химическая механика материалов*. – 1977. – Т. 13, № 2. – С. 39–47. **21.** Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В. В. Панасюк. – Киев : Наук. думка, 1968. – 248 с.

Рецензент: д.т.н., професор Трач В. М. (НУВГП)

---

**Kundrat M. M., Doctor of Engineering, Professor, Mysyukevich A. M., Post-graduate Student, Kundrat A. M., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor (National University of Water Management and Nature Resources Use, Rivne)**

## **LOCALIZED ZONES OF PREFRACTURE IN THE PLATE WITH INEXTENSIBLE LINE STRENGTHENING**

**Limiting equilibrium of the composition with line strengthening in conditions of plane problem is research by tension on infinity and concentrated forces. Localized zones of prefracture are developed along the plate-strengthening boundary from its ends to central part. Influence of load on development of prefracture zones, sharing contact stresses, axial forces, character of fracture in composition are research.**

**Keywords:** strengthening, zone of prefracture, contact stress, axial efforts.

---

**Кундрат Н. М., д.т.н., профессор, Мисюкевич А. М., аспирант, Кундрат А. М., к.ф.-м.н., доцент (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)**

## **ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ЗОНЫ ПРЕДРАЗРУШЕНИЯ В ПЛАСТИНЕ С НЕРАСТЯЖИМЫМ ЛИНЕЙНЫМ ПОДКРЕПЛЕНИЕМ**

**В условиях плоской задачи исследуется предельное равновесие пластины с подкреплением при растяжении сосредоточенными силами и напряжениями на бесконечности. Локализованные зоны предразрушения развиваются вдоль границы подкрепления от его торцов к центральной части. Выяснено влияние нагрузки, распределение контактных напряжений, осевых усилий, характер разрушения композиции.**

***Ключевые слова:* подкрепление, зона предразрушения, контактные напряжения, осевые усилия.**

---