УДК 519.17

Бабич С. В., аспірант, Турбал Ю. В., к.ф.-м.н., професор
(Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ ДОПУСТИМОЇ МАТРИЦІ РОЗКЛАДІВ

У статті виділені основи формування розкладів при використанні систем різних представників конфігурацій та перманентів матриці.
***Ключові слова*: задачі розкладу, календарний обрахунок, конфігураційний підхід, системи різних представників, перманент.**

Вступ. Задачі календарного планування є важливим розділом загальної теорії розкладів, який не втратив актуальності і сьогодні. Незважаючи на існування низки програмних продуктів для автоматизації процесу складання розкладу занять навчальних закладів, ряд аспектів розв'язку відповідної задачі вимагають вдосконалення та допускають різноманітні теоретичні та технічні підходи до їх вирішення. Специфікою задачі складання розкладу занять навчального закладу є її багатокритеріальність та залежність від значних обчислювальних ресурсів. В основі побудови розкладу занять лежить теорія розкладів, що широко використовується як при організації роботи підприємств так і для побудови розкладів в навчальних закладах. Також до даної проблематики стосується розділ динамічного програмування в теорії управління та теорії обчислювальних систем [6].

Аналіз останніх досліджень. З 1903 по 1919 рік американський вчений Генрі Гант публікує ряд наукових робіт і пропонує новий спосіб представлення розкладу, що отримав назву «Діаграма Ганта» (схематичне зображення календарного плану). Методи теорії розкладів почали широко використовуватись на виробництві та мали застосування при розробці методик управління, починаючи з організації конвеєрного виробництва 1908 року Генрі Фордом. Ці методики були прийняті японськими автомобільними заводами й на разі відомі всьому світові як методи «Канбан» та «Just-in-time» [4]. Використовувались вони і в Україні, зокрема в Новочеркаському електровозобудівному заводі, Львівському заводі телевізорів та ін.

В 1967 році була опублікована монографія Конвея, Максвелла і Міллера «Теорія розкладів» [3], котра була переведена російською мовою в 1975 році із синхронним виходом книги радянських авторів В.С. Танаєва та В.В. Шкурби «Введення до теорії розкладів» [2].

Останнім часом задачі теорії розкладів відносять до систем штучного інтелекту, зокрема, задача задоволення обмежень (Constraint satisfaction problems [1]) є важливою задачею штучного інтелекту. За думкою Р. Дехтер [1], мережі обмежень являються графовим представленням, що може бути використаним для пошуку стратегій вирішення задач.

Методика досліджень. В роботі пропонується новий конфігураційний підхід до аналізу матриць розкладів, в основі якого використовуються комбінаторні властивості алгебраїчних структур, зокрема перманент.

Постановка завдання. Усім добре відомі критерії, яким повинен задовольняти розклад занять: студенти не повинні мати "вікон", викладачі не повинні мати "вікон", кількість робочих днів викладача повинна бути мінімальною, побажання викладачів повинні враховуватись максимально тощо [5]. Очевидно, що оптимальний в певному розумінні розклад є оптимальним для кожного дня учбового тижня. Тому обмежимося розглядом одного робочого дня.

Якщо кожному викладачу поставимо деяке натуральне число (номер, вагу тощо), то розклад являє собою матрицю розмірності $3\times n$, де n-кількість груп (підгруп), для яких складається розклад. Будемо називати таку матрицю матрицею розкладу і позначати R. Очевидно, що при аналізі матриць розкладу виникає низка задач, які пов'язані з вимогами до розкладу занять. В даній роботі стоїть завдання розробити методику перевірки допустимості матриць розкладу та алгоритмічні аспекти їх побудови.

Метою нашої роботи є розробка нової методики аналізу матриць розкладів для задачі календарного планування, що ґрунтується на застосуванні певних модифікацій перманент.

Результати досліджень.

Тернарною конфігурацією розкладу, утвореною елементом матриці розкладу *d*, будемо називати множину елементів матриці *R*, таких, що $a_{ij} = a_{kl} = a_{mp} = d$, i, k, m є {1, 2, 3}, $1 \le j$, $p \le n$. Аналогічно можемо ввести поняття бінарних та унарних конфігурацій (бінарна конфігурація не може бути елементом тернарної). Природньою для тернарної конфігурації є умова: $i \ne k \ne m$ (викладач не може проводити кілька пар одночасно). Аналогічна умова має місце і для бінарної конфігурації. Відмітимо, що початковий процес формування конфігурацій може бути або автоматичним з міркувань мінімальності кількості робочих днів викладача, або являти собою результат домовленості з викладачем (наприклад, деяким викладачам важко проводити три пари в один день, тоді можна утворити відповідні бінарні чи навіть унарні конфігурації, якщо такі усіх влаштовують). При такому підході вирішується проблема мінімізації "вікон" викладачів вже на початковому етапі розв'язку задачі: матриця розкладу являє собою набір вже оптимізованих (що не мають вікон) конфігурацій.

В даній роботі обмежимось розглядом ситуації, коли в матриці денного розкладу немає потоків. Тоді вона являє собою сукупність тернарних, бінарних, унарних конфігурацій та нулів (нуль означає, що пари немає). Очевидно, що набір конфігурацій повинен бути таким, щоб матриця розкладу взагалі могла утворитись (в одній групі повинно бути не більше 3 пар в день). Матрицю розкладу будемо називати допустимою, якщо в рядку немає двох однакових елементів. Розглянемо наступні критерії, по яких буде здійснюватись оптимізація:

К1 – викладач не має "вікон", тобто якщо для будь-якої бінарної конфігурації $\{a_{ij}, a_{kl}\}$ виконується умова: $|i\text{-}k|=1$;

К2 – студенти не мають "вікон", тобто не існує стовпчика в матриці розкладу, що містить два ненульових елементи та нуль в другому рядку.

Допустиму матрицю розкладу будемо вважати оптимізованою за відповідним критерієм, якщо виконується умова, що визначає критерій. Очевидно, що різні матриці розкладів можна утворювати шляхом довільної перестановки елементів стовпчиків (при цьому, очевидно, можуть виникати недопустимі матриці).

Нехай маємо довільну матрицю денного розкладу, розмірністю *3xn*. Розглянемо стовпчики матриці розкладу: $R_1, R_2, ..., R_n$ як деяку конфігурацію. Модифікована матриця інцидентності будується таким способом : по горизонталі записуємо всі елементи, що утворюють матрицю розкладів. Причому, якщо якийсь елемент *x* утворює потік, то виділяємо йому окремий стовпчик матриці інцидентності, позначивши його x_n (можна використовувати індекс, що є кількістю елементів потоку). Кожному потоку, утвореному елементом x відповідає інший стовпчик матриці.

$$\mathrm{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & & x_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{n11} & \alpha_{n2} & ... & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \end{array}, \text{ де } \alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{коли} \quad x_i \in \mathrm{R_j} \\ 0, & \text{в противному випадку} \end{cases} \qquad (1)$$

Наприклад, для матриці розкладів:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 & 4 \end{array} \qquad (2)$$

побудуємо наступну матрицю інцидентності конфігурацій стовпчиків:

$$\begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 1^{п} & 2 & 3 & 4 & 4^{п} & 5 \\ R_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ R_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ R_3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ R_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ R_5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ R_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad (3)$$

Модифікації вимагає і поняття перманент матриці конфігурацій.

Означення *Модифікованим перманентом матриці інцидентності будемо називати суму всіх можливих добутків елементів матриці, кожен з яких містить по одному елементу з кожного рядка та з різних стовпчиків, причому елемент потокового стовпчика (стовпчика, що відповідає потоковому елементу) не може бути в добутку разом з елементами інших рядків, що відповідають цьому ж потоку.*

Очевидно, що у випадку відсутності потокових елементів модифікований перманент є звичайним перманентом.

Для розрахунку модифікованого перманента матриці інцидентності можемо використовувати розклад за рядком. Виходячи з означення, процедура розкладу буде наступною: ненульовий елемент рядка множиться на модифікований перманент матриці, утвореної за наступними правилами: якщо елемент рядка належить потоковому стовпчику, то матриця утворюється з вихідної викреслюванням стовпчика, де цей елемент знаходиться та всіх рядків, що відповідають всім елементам даного потоку. Якщо елемент рядка не належить потоковому стовпчику, то матриця утворюється шляхом викреслювання рядка, та стовпчика, де стоїть цей елемент, а також всіх потокових стовпчиків, на перетині яких з цим рядком стоять ненульові елементи. Відмітимо й те, що викреслення усіх наявних елементів дасть у кінцевому результаті – одиницю.

Приклад. Розкладемо матрицю (3) за першим рядком (потокові стовпчики – 2-й та 4-й):

$$permodA = 1 * permod\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+1 * permod\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 * permod\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Розглянемо теорему, доведення котрої майже тотожне до відповідної теореми для класичних перманент.

Твердження 1. *Матриця розкладів має СРПС тоді і тільки тоді, коли модифікований перманент матриці інцидентності відмінний від нуля.*

Доведення. Нехай маємо матрицю розкладів розмірності $3 \times n$ та існує СРПС матриці розкладів $x_1, x_2, ...x_n$. Тоді , побудувавши матрицю інцидентності, бачимо, що перманент матриці відмінний від нуля, оскільки перманент матриці, утвореної стовпчиками, відповідних елементів $x_1, x_2, ...x_n$ є одиницею:

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix} \quad (5)$$

Наявність потокових елементів не змінює ситуацію. Якщо, наприклад, $x_1 = x_2$, а інші елементи не тотожні, маємо матрицю інцидентності, модифікований перманент якої теж, очевидно, є одиницею:

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix} \quad (6)$$

Нехай модифікований перманент матриці інцидентності відмінний від нуля. Тоді в його розкладі є одиничний елемент, тобто перманент певної матриці, утвореної підсистемою стовпчиків, що дорівнює 1.

Проте розглянувши елементи, які відповідають стовпчикам даної підсистеми, можна беззаперечно стверджувати про утворення СРПС.

Доведення даної теореми спонукає зробити висновок, що в процесі розкладу модифікованого перманента матриці інцидентності конфігурацій стовпчиків за рядком легко побудувати всі можливі СРПС. Кожній СПРС відповідає підматриця матриці інцидентності з одиничним перманентом. Крім того, саму СПРС можна отримати, якщо ввести процес “запам’ятовування” елемента стовпчика, що відповідає одиниці, яка використовується при побудові добутку в даний момент та рядка, в якому ця одиниця стоїть у вихідній матриці інцидентності. Тому в процесі обчислення перманента будемо кожній одиниці дописувати два індекси: верхній-елемент, що відповідає стовпчику, де стоїть ця одиниця, нижній-номер рядка, в якому ця одиниця стоїть у вихідній матриці.

Приклад: нехай маємо матрицю розкладу:

$$R=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix} \qquad (7)$$

Тоді матриця інцидентності має вигляд:

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 1^n & 2 & 3 & 4\\ R_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ R_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ R_3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array} \qquad (8)$$

Побудуємо процес розкладу модифікованого перманента з запам’ятовуванням за першим рядком:

$$permod\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=1_1^{1^n}*1+1_1^2*permod\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}+\ldots+$$

$$+1_1^3*permod\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=1_1^{1^n}*1+1_1^2*\left(1_2^1\,permod\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}+1_2^3\,per\bmod\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\right)+ \qquad (9)$$

$$+\ldots+1_1^3 1_2^1\,per\bmod\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}=1_1^{(1^n)}+1_1^2 1_2^1 1_3^4+1_1^2 1_2^3 1_3^1+1_1^2 1_2^3 1_3^4+1_1^3 1_2^1 1_3^4 n$$

При недостатній кількості СРПС, відносно кількості пар, неможлива побудова розкладу.

Бачимо, що модифікований перманент рівний 5 (і це є кількість всіх можливих СРПС). Крім того, відомі й самі СРПС . Вони записуються як верхні індекси одиничок. Причому, якщо певні нижні індекси відсутні, то відповідну кількість разів повторюється верхній елемент (ситуація потокового елементу): 111, 214, 231, 234, 314.

При наявності всіх можливих СПРС, є допустимим вирішення задач різних класів. Наприклад, якщо нас цікавить допустима форма матриці розкладу , то вона в існує лише за умови, коли у множині всіх СПРС є такі три СПРС, що не містять в собі на однакових місцях однакових елементів , окрім елементів потоків.

Для даного прикладу існує тільки один набір СПРС: 111, 314, 231.

Висновок. В даній роботі запропонований новий підхід до задач календарного планування, що ґрунтується на поняттях конфігурації та матриць розкладів. Отримано критерій існування системи різних представників матриць розкладів на основі введених модифікацій перманент. Запропоновано алгоритм побудови системи різних представників стовпчиків. Отримані теоретичні результати можуть бути підґрунтям для розробки автоматизованої системи для складання розкладу занять а також вирішення інших задач теорії розкладів.

1. Dechter R. Constraint Processing / R. Dechter – Kaufmann, 2003. – 481 p. **2.** Танаев В. С. Теория расписаний. Одностадийные системы / В. С. Танаев, В. С. Гордон, Я. М. Шафранский.– Москва : Наука, 1984. – 345 с. **3.** Конвей Р. В. Теория расписаний / Р. В. Конвей, В. Л. Максвелл, Л. В. Миллер. – Москва : Наука, 1975. – 389 с. **4.** Complexity results for scheduling problems [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www2.informatik.uni-osnabrueck.de/knust/class/ **5.** Кузьмичев А. Б. О подходе к автоматизации составления расписания в учебном заведении / А. Б. Кузьмичев // Техника машиностроения. – 2014. – № 3. – С. 23–26. **6.** Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – Издательство иностранной литературы, 1960. – 400 с.

Рецензент: д.т.н., професор Щодро О. Є. (НУВГП)

Babych S. V., Post-graduate Student, Turbal Y. V., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor (National University of Water Management and Nature Resources Use, Rivne)

ALGORITHM FOR SCHEDULE MATRIX CONSTRUCT

The article highlighted the basis for framing scheduling systems using different configurations and permanent representatives matrix.
***Keywords*: task scheduling, calendar calculation, configuration approach, systems different representatives, permanent.**

Бабич С. В., аспирант, Турбал Ю. В., к.ф.-м.н., профессор
(Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ДОПУСТИМОЙ МАТРИЦЫ РАСПИСАНИЙ

В статье выделены основы формирования расписаний при использовании систем различных представителей конфигураций и перманента матрицы.
***Ключевые слова*: задачи расписания, календарный расчет, конфигурационный подход, системы различных представителей, перманент**.
