ЗЕМЛЕВПОРЯДКУВАННЯ ТА КАДАСТР

УДК 528.236

Мельник В. М., д.т.н., професор, Расюн В. Л., аспірант
(Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, м. Луцьк)

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ПОПРАВОК ТРАНСФОРМАЦІЇ КООРДИНАТНИХ СИСТЕМ

Досліджено точність інтерполяції поправок трансформування координатних систем і встановлена залежність точності від розміщення та кількості опорних точок. Розглянуто два випадки: рівномірної та випадкової локалізації опорних точок трансформації.
***Ключові слова*: інтерполяція, координатні системи, поправки.**

Постановка проблеми. Згідно стандарту ISO 19111 (Geographic information – Spatial referencing by coordinates) координатні операції включають перетворення та трансформування. У координатному трансформуванні використовують параметри, отримані емпірично через набір пунктів з відомими координатами в двох референцних системах координат. Застосовується цей метод в тому випадку, коли не відомі теоретичні істинні параметри зв’язку [1]. При створенні нової геодезичної референцної системи УСК-2000 у Науково-дослідному інституті геодезії і картографії (м. Київ) було отримано більше 25 тис. різниць геодезичних координат СК42 – УСК-2000, на основі яких отримано рівномірну сітку [2]. Така сітка координатних різниць дозволяє отримувати поправки за перехід від однієї координатної системи до УСК-2000 в проміжних точках шляхом поліноміальної інтерполяції. Цей підхід є порівняно новим в задачах трансформування координатних систем, відповідно є потреба теоретично дослідити вплив кількості та локалізації опорних точок на точність інтерполяції.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Вивченню проблеми трансформації систем координат присвячені роботи І. Зайця, О. Марченка, Ю. Карпінського, І. Тревого, О. Кучера, С. Савчука, К. Третяка та інших, а також зарубіжних вчених – М. Машимова, К. Насретдінова, J. Kostelecky, R. Kadaj. Питаннями створення систем координат та можливостями їх представлення в інших системах займалися в минулому такі визначні вчені: Ф. Красовський, А. Ізотов, М. Молоденський та інші.

Метою даної статті є дослідження точності інтерполяції поправок трансформування координатних систем.

Одним із головних завдань, що вирішуються в цій роботі, є встановлення залежності точності визначення поправок трансформації від розміщення та кількості опорних точок. Проведемо аналіз для випадків рівномірної та випадкової локалізації опорних точок.

Результати досліджень. Точність інтерполяції задачі трансформування координатних систем залежить від розміщення і числа опорних точок [3]. Їх розташування може бути рівномірним чи нерівномірним. В обох випадках опорні точки повинні покривати все досліджуване поле, що дозволить отримати найбільш достовірну інформацію про задачу трансформування. З метою спрощення математичних викладок розглянемо випадок рівномірного розташування опорних точок. Кількість опорних точок має подвійний вплив. З одного боку, збільшення числа точок повинно підвищити точність інтерполяції, а з іншого – таке збільшення ускладнює процес трансформації.

Дослідимо більш строго цю задачу. Для цього розглянемо загальний випадок розміщення m – опорних точок рядами по r – точок у кожному і одержимо формули вагових коефіцієнтів, що характеризують точність калібрування у випадку інтерполювання геометричних спотворень поліномами третього степеня.

Запишемо рівняння похибок в наступному порядку:

$$\begin{aligned} &a_{00}+a_{20}x_i^2+a_{02}y_i^2+a_{11}x_i\,y_i+a_{10}x_i\;+a_{30}x_i^3+a_{12}x_iy_i^2+\\ &+a_{01}y_i\;+a_{03}y_i^3+a_{21}x_i^2y_i+lx_i=vx_i. \end{aligned} \tag{1}$$

Рівняння для ординат не розглядається, тому що воно має аналогічний вигляд. Припускаючи, що вага поправок трансформації не змінюється, вирішимо задачу визначення невідомих коефіцієнтів за методом найменших квадратів.

Матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь

$$N_{10\cdot10}=A^T_{10\cdot n}\cdot A_{n\cdot10}\,, \tag{2}$$

де $A_{n\cdot10}$ – матриця коефіцієнтів рівнянь похибок;

$A^T_{10\cdot n}$ – транспонована матриця, прийме вигляд:

$$N_{10\bullet 10}=\begin{bmatrix} n & \sum x^2 & \sum y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum x^2 & \sum x^4 & \sum x^2y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum y^2 & \sum y^2x^2 & \sum y^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sum x^2y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sum x^2 & \sum x^4 & \sum x^2y^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sum x^4 & \sum x^6 & \sum x^4y^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sum x^2y^2 & \sum x^4y^2 & \sum x^2y^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum y^2 & \sum y^4 & \sum x^2y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum y^4 & \sum y^6 & \sum x^2y^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum x^2y^2 & \sum x^2y^4 & \sum x^4y^2 \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Ця матриця квадратна і має квазідіагональний вид, тобто

$$N_{10\bullet 10}=\begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & A_3 & \\ 0 & & & A_4 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

тоді

$$\Delta=\left|N_{10\cdot 10}\right|=\left|A_1\right|\cdot\left|A_2\right|\cdot\left|A_3\right|\cdot\left|A_4\right|. \qquad (5)$$

Значення вагових коефіцієнтів Q_{ij} обчислимо як:

$$Q_{ij}=\Delta_{ij}/\Delta, \qquad (6)$$

де Δ_{ij} – алгебраїчні доповнення.

Беручи до уваги розташування точок, виразимо елементи матриці Δ_{ij} як функції кількості точок у ряді і координат крайніх точок, тобто

$$Q_{ij}=\varphi(r,a) \qquad (7)$$

де a – абсциси й ординати крайніх точок.

Інтервали між точками і загальна кількість точок рівні

$$\Delta y=\frac{2a}{r-1},\ n=r^2. \qquad (8)$$

Позначивши $(r-1)/2=k$, запишемо:

$$\sum x^2 = 2r\left\{a^2 + \left(\frac{k-1}{k}\right)^2 a^2 + \left(\frac{k-2}{k}\right)a^2 + \cdots + \left(\frac{k-k+1}{k}\right)^2 a^2\right\} =$$
$$= \frac{2ra^2}{k^2}\left\{k^2 + (k-1)^2 + (k-2)^2 + \cdots + 1^2\right\} = \frac{a^2 n(r+1)}{3(r-1)}. \tag{9}$$

Для квадратної тестової сітки $\sum x^2 = \sum y^2$. Аналогічно

$$\sum x^4 = \sum y^4 = \frac{na^4(r+1)(3n-7)}{15(r-1)^3}; \tag{10}$$

$$\sum x^2 y^2 = \frac{na^4(r+1)^2}{9(r-1)^2}; \tag{11}$$

$$\sum x^6 = \sum y^6 = \frac{na^6(r+1)(3n^2 - 18N + 31)}{21(r-1)^5}; \tag{12}$$

$$\sum x^4 y^2 = \sum y^4 x^2 = \frac{na^6(r+1)^2(3n-7)}{45(r-1)^4}. \tag{13}$$

При цьому сума степеневого ряду нами знаходилася за формулою

$$1^F + 2^F + \cdots + n^F = \frac{(n+B)^{F+1} + (-1)^F B^{F+1}}{P+1}, \quad (P = 1,2,...). \tag{14}$$

Остання формула являє собою символічно записане обчислювальне правило: варто виконати розкладання за формулою бінома:

$$(1+x)F = \sum_{k=0}^{\infty} C_\rho^k x^k \tag{15}$$

і замінити числами Бернуллі. Тоді

$$Q_{ij} = \frac{D_{ij}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \sum x^4 & \sum x^2 y^2 \\ \sum x^2 y^2 & \sum y^4 \end{vmatrix}}{|A_1|} = \frac{7n^2 - 41n + 52}{2 - n(n-4)^2}. \tag{16}$$

Аналогічно визначаються інші Q_{ij} .

$$Q_{22} = Q_{33} = \frac{45(r-1)^3}{4na^4(r+1)(n-4)}, \tag{17}$$

$$Q_{44} = \frac{1}{n}\left[\frac{3(r-1)}{a^2(r+1)}\right], \tag{18}$$

$$Q_{55} = Q_{88} = \frac{5(r-1)(3n-7)\left(3n^2-25n+52\right)}{2na^2(r+1)\left(n^3-17n^2+88n-144\right)}, \tag{19}$$

$$Q_{66} = Q_{99} = \frac{175(r-1)^5(n-4)}{4na^6(r+1)\left(n^3-17n^2+88n-144\right)}, \tag{20}$$

$$Q_{77} = \frac{135(r-1)^4\left(n^2-13n+36\right)}{4na^6(r+1)^2\left(n^3-17n^2+88n-144\right)}, \tag{21}$$

$$Q_{10\cdot 10} = Q_{77}. \tag{22}$$

Отримані формули (17-22) дозволяють строго визначити значення вагових коефіцієнтів при довільному числі точок. Відповідні обчислення показують, що точність визначення коефіцієнтів, що обумовлюють паралельне перенесення і нелінійні спотворення 2-го порядку порівняно слабко залежать від щільності точок. Помилки визначення інших коефіцієнтів, що викликають нелінійні спотворення більш високого порядку, є функцією числа опорних точок.

Відомо [4], що обернена вагова функція врівноважених елементів визначається як

$$\begin{aligned}\frac{1}{P} = {} & f_1^2 Q_{11} + 2 f_1 f_2 Q_{12} + 2 f_1 f_n Q_{1n} + f_2^2 Q_{22} + \cdots + \\ & + 2 f_{2n} f_n Q_{2n} + \cdots + f_n^2 Q_{nn}\end{aligned}, \tag{23}$$

де f – часткові похідні ; Q_{ij} – вагові коефіцієнти.

З врахуванням (23) і використовуючи раніше знайдені Q_{ij}, нами отримана в явному вигляді формула середньої квадратичної помилки визначення поправок трансформації $m_x\left(m_y\right)$. Опускаючи досить громіздкі викладки, запишемо її для кутових точок.

$$m_{\Delta x}^2 = m_{\Delta y}^2 = m_{\Delta x,y\ вимір.}^2 = \left[\frac{135n^6 - (1032r + 815)n^5 + (16360r - 6935)n^4}{2n(r+1)^2(n-4)^2(n^3 - 17n^2 + 88n - 144)} - \right.$$

$$-\frac{(102640r - 87115)n^3 + (301600r - 337420)n^2 - (353280r - 506960)n}{2n(r+1)^2(n-4)^2(n^5 - 17n^2 + 88n - 144)} + \quad (24)$$

$$\left. + \frac{(158528r - 147520)}{2n(r+1)^2(n-4)^2(n^5 - 17n^2 + 88n - 144)}\right].$$

За даною формулою обчислені значення $k = \dfrac{m_{\Delta x,\Delta y}}{m_{x_{вимір.}}}$, які для наочності відображені на рисунку 1.

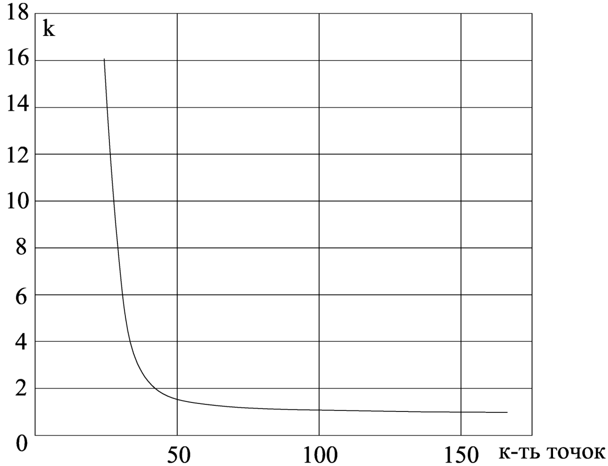

Рис. 1. Залежність відношення k до кількості опорних точок

З рисунку 1 видно, що зі збільшенням числа опорних точок від 25 до 60 точність апроксимуючого полінома зростає порівняно швидко. При більшому числі точок похибки поправок практично не змінюються і, отже, точність трансформування координатних систем стабілізується для 60-80 точок.

В загальному випадку вибір степені апроксимуючого полінома здійснюється із застосуванням статистичної перевірки гіпотези про рівність нулю математичного очікування оцінок.

Якщо дисперсія первинних визначень (трансформації) апріорі невідома і може бути знайдена лише її статистична оцінка, то перевірку статистичної гіпотези можна здійснити на основі критерію Фішера (F).

Для наочності аналізу здійснимо нормування поля похибок трансформування відносно центральної точки території (району), на яку здійснюється перетворення координатних систем.

На рисунку 2 показана залежність помилок інтерполяції від кількості опорних точок рівновіддалених від центральної точки поля трансформування.

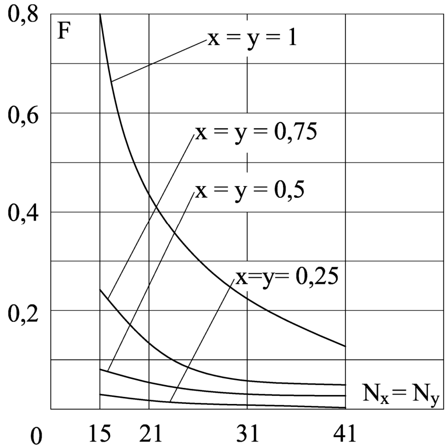

Рис. 2. Залежність помилок інтерполяції від кількості опорних точок

З рисунка 2 видно, що при інтерполяції похибок трансформування поліномами 3 ступеня дисперсія апроксимуючого полінома в найбільш слабких місцях буде приблизно в 2 рази менше дисперсії початкових визначень, а в навколоцентральних областях (при $x = y \leq 0,5$) має місце згладжування похибок початкових визначень (приблизно в 20 разів).

Розглянемо можливий випадок, коли опорні точки розглядаються як випадкові просторові вектори, а не як фіксовані точки [5].

Припустимо, що опорні точки є випадковими вибірками незалежних змінних x_1 і x_2. Розглянемо випадок гауссівського просторового розподілу опорних точок і обмежимося біквадратним перетворенням, у якому вектор-функція перетворення має вигляд:

$$\Phi^T(x) = \left[\left(1 \quad (x_1 - \bar{x}_1) \quad (x_2 - \bar{x}_2) \quad (x_1 - \bar{x}_1)^2 \quad (x_2 - \bar{x}_2)^2 \quad (x_1 - \bar{x}_1) \times (x_2 - \bar{x}_2)\right)\right], \quad (25)$$

де $\bar{x}$ − середнє значення з використаних опорних точок.

Матриця нормальних рівнянь для методу найменших квадратів має вигляд [6] : $< N_i >= tr < \Phi_j^T W_j \Phi >$, де $< \cdot >$ означає математичне очікування відносно x, а tr – оператор сліду.

Матриця $< N_j >$ діагональна, тому $< N_j >^{-1} = < N_j^{-1} >$. Математичне очікування дисперсії у випадку гауссівського розподілу дорівнює [7]:

$$< \hat{D}_j > = \left[tr\left(W_j\right)\right]^{-1} \Phi^T(x) \times \left[diag\left(1, \sigma_{x_1}^{-2}, \sigma_{x_2}^{-2}, \frac{1}{2}\sigma_{x_1}^{-4}, \frac{1}{2}\sigma_{x_2}^{-4}, \sigma_{x_1}^{-2}\sigma_{x_2}^{-2}\right)\right]\Phi(x).$$

Для одержання $< \hat{D}_j >$ в явному вигляді необхідно виконати центрування та нормування координат $u_j = \dfrac{\left(x_j - \bar{x}_j\right)}{\sigma_{x_j}^2}$, $j = 1,2$.

Тоді $< \hat{D}_j > = \left[tr\left(W_j\right)\right]^{-1}\left(1 + u_1^2 + u_2^2 + \dfrac{1}{2}\left(u_1^2 + u_2^2\right)^2\right)$.

Визначивши радіус r в нормованих координатах $\left(u_1, u_2\right)$: $r = \left(u_1^2 + u_2^2\right)^{1/2}$, отримаємо:

$$< \hat{D}_j > = \left[tr\left(W_j\right)\right]^{-1}\left(1 + r^2 + \frac{1}{2}r^4\right). \quad (26)$$

З виразу (26) видно, що дисперсія монотонно зростає зі збільшенням радіуса r, а при великому r в основному впливає на неї доданок, який містить r в четвертому степені. Якщо значення дисперсії трансформації координат на опорних точках одинакові, то $tr\left(W_j\right) = tr\left(\sum_j^{-1}\right) = \dfrac{n}{\sigma_j^2}$, а дисперсія інтерполяції пропорційна загальній дисперсії помилок трансформації опорних точок σ_j^2 і обернено пропорційна кількості опорних точок.

Якщо відповідною моделлю спотворень є білінійне або афінне перетворення, то рівність (26) набуває вигляду:

$$< \hat{D}_j > = \left[tr\left(W_j\right)\right]^{-1}\left(1 + r^2\right). \quad (27)$$

Неважко переконатися, що в цьому випадку помилка зростає, але не так швидко із збільшенням r, як для біквадратної моделі. З цього випливає, що необхідно застосовувати перетворення того ж порядку, що і ступінь спотворення трансформації координат, інакше перетворення більш вищого порядку можуть тільки збільшити невизначеність.

1. Заєць І. М. Вдосконалення технології створення координатної основи для забезпечення загальнодержавного картографування України: Автореф. дис. канд. техн. наук / І. М. Заєць / Нац. ун-т "Львів. політехніка". – Львів, 2004. – 20 с. **2.** Кубах С. М. Алгоритм узгодження існуючих матеріалів кадастрових знімань з використанням трансформаційної сітки у форматі NTv2 / С. М. Кубах // Містобудування та територіальне планування. – Київ, 2012. – Вип. 46. – С. 296–303. **3.** Gary E., Ford G., Claudio I. Zanelli. Analysis and Quantification of Errors in the Geometric Correction of Satellite Images // Photogrammetric Engineering and Remote Sensing. – 1985. – V. 51, № 11. – P. 1725–1734. **4.** Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Корн Г., Корн Т. – М. : Наука, 1973. – 681 с. **5.** Мельник В. М. Кількісна стереомікрофрактографія: монографія / В. М. Мельник, А. В. Шостак; Волин. нац. ун-т ім. Лесі Українки. – Луцьк : Твердиня, 2010. – 460 с. **6.** Войтенко С. П. Математична обробка геодезичних вимірів. Метод найменших квадратів: навч. посібник / С. П. Войтенко. – К. : КНУБА, 2005. – 236 с. **7.** Вентцель Е. С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов / Вентцель Е. С. – 6-е изд. – М. : Высш. шк., 1999. – 576 с.

Рецензент: д.с.-г.н., професор Мошинський В. С. (НУВГП)

Melnyk V. M., Doctor of Engineering, Professor, Rasiun V. L., Post-graduate Student (Lesia Ukrainka Eastern European National University, Lutsk)

INTERPOLATION OF AMENDMENTS TRANSFORMATION OF COORDINATE SYSTEMS

Investigated the accuracy of interpolation amendments transforming coordinate systems and the dependence of the accuracy of the location and number of control points are considered two cases: even and random localization of the reference points of transformation.
***Keywords*: interpolation, coordinate system, correction.**

Мельник В. Н., д.т.н., профессор, Расюн В. Л., аспирант
(Восточноевропейский национальный университет
имени Леси Украинки, г. Луцк)

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПОПРАВОК ТРАНСФОРМАЦИИ КООРДИНАТНЫХ СИСТЕМ

Исследованы точность интерполяции поправок трансформации координатных систем и установлена зависимость точности от размещения и количества опорных точек. Рассмотрены два случая: равномерной и случайной локализации опорных точек трансформации.
***Ключевые слова*: интерполяция, координатные системы, поправки.**
