

УДК 519.633.2

Мартинюк П. М., д.т.н. проф., Степанченко О. М., к.т.н., доц., Бобошко В. М., магістрант (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНСОЛІДАЦІЇ ҐРУНТІВ ПРИ НЕЛІНІЙНИХ КОМПРЕСІЙНИХ ЗАЛЕЖНОСТЯХ

Розглянуто математичну модель фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням лінійних та нелінійних компресійних залежностей. Наближені розв'язки відповідних нелінійних крайових задач знайдено методом скінченних різниць. Здійснено програмну реалізацію задачі в одновимірному випадку, проведено ряд чисельних експериментів та їх аналіз.

Ключові слова: фільтраційна консолідація, надлишкові напори, коефіцієнт фільтрації, коефіцієнт стискуваності.

На сьогоднішній день **важливе значення для безпеки людської діяльності** мають дослідження та прогнозування в області механіки ґрунтів. Саме тому актуальною є задача фільтраційної консолідації ґрунтів, яка пов'язана з безпекою та безаварійністю експлуатації гідротехнічних, промислових та цивільних споруд, які побудовані на цих ґрунтах. Будівельні роботи в природних умовах часто доводиться виконувати на водонасичених ґрунтах. Прикладені зовнішні навантаження, якими є зведені будівлі, спричиняють появу надлишкових тисків у порах ґрунтового середовища. Недостатнє урахування динаміки зміни надлишкових напорів у ґрунті, який консолідується, може призвести до негативних наслідків й нерівномірних деформацій фундаментів споруд, руйнування ґрунтових гребель, що, відповідно, загрожує погіршенням екологічної та економічної ситуації в окремому регіоні та держави в цілому.

Протікання самого процесу консолідації ґрунту зумовлюється такими факторами, як структурна міцність, фільтраційні властивості (зокрема, коефіцієнт фільтрації) ґрунту та нелінійні компресійні криві [8], які виражаються у залежності коефіцієнта стискуваності ґрунту від функції надлишкових напорів. **Авторами запропоновано врахувати вплив змінного коефіцієнта стискуваності** на проходження фільтраційної консолідації ґрунту та порівняти відмінності в розподілах напорів при сталому та змінному коефіцієнті стискуваності.

Розглянемо одновимірну задачу фільтраційної консолідації шару ґрунту товщиною l нескінченної ширини під впливом рівномірно прикладеного зовнішнього навантаження інтенсивністю $q(t)$ (рис. 1) [13, 14].

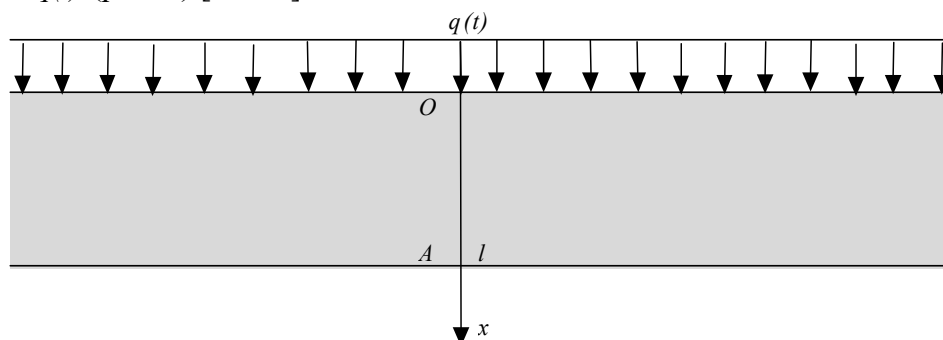


Рис. 1. Консолідація шару ґрунту під впливом рівномірно прикладеного зовнішнього навантаження інтенсивністю $q(t)$

Математична модель одновимірної задачі фільтраційної консолідації ґрунтового масиву може бути описана наступною крайовою задачею [1]:

$$\frac{(1+e)}{\gamma \left(-\frac{de}{d\Theta}\right)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial (\Theta^* + \gamma h^*)}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad x \in (0; l], t > 0, \quad (1)$$

$$u = ev - k \frac{\partial h}{\partial x}, \quad x \in [0; l], t \geq 0, \quad (2)$$

$$h(0, t) = h(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$h(x, 0) = h_0(x), \quad x \in [0; l], \quad (4)$$

де $h_0(x)$ – задана функція;

e – коефіцієнт пористості ґрунту;

k – коефіцієнт (тензор) фільтрації;

h – напір;

h^* – напір в момент повної стабілізації;

Θ – сума головних напружень в скелеті ґрунту;

Θ^* – сума головних напружень в скелеті ґрунту в умовах повної стабілізації;

γ – питома вага води, що рівна $\gamma = g\rho = 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}$;

u – вектор швидкості фільтрації;

v – вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту.

Оскільки швидкість руху твердих частинок ґрунту значно менша за швидкість фільтрації [7], то в узагальненому законі Дарсі-Герсеванова (2) в подальшому нехтується швидкістю руху твердої фази ґрунту.

Початковий розподіл напорів залежить від властивостей ґрунту, а також від типу прикладеного зовнішнього навантаження. Оскільки розглядається певний ідеальний ґрунт (“ґрунтова маса”) [6], тобто ґрунт повністю насичений поровим розчином з наявністю в порах вільної нестискуваної та гідравлічно-неперервної рідини, то при прикладенні до даного ґрунту миттєвого зовнішнього навантаження інтенсивністю q в початковий момент часу весь тиск повністю передається на порову рідину. Таким чином

$$h_0(x) = \frac{q}{\gamma} + h_p(x). \quad (5)$$

Чисельний розв’язок крайової задачі знаходимо методом скінченних різниць.

Покриємо замикання $\overline{Q}_T = [0; l] \times [0; T]$ області Q_T рівномірною сіткою $\overline{Q}_T^{(m,n)} = [0; m h_1] \times [0; n \tau]$ з кроками h_1 та τ відповідно по змінній x та часу t . Нехай m – кількість кроків по просторовій змінній, n – кількість кроків по часу.

Для дискретизації рівняння (1) використаємо неявну різницеву схему. В результаті отримаємо скінченнорізницевий аналог диференціального рівняння (1)

$$\frac{h_i^{(j+1)} - h_i^{(j)}}{\tau} = \frac{(1+e_i^{(j)})}{\gamma_1 \left(-\frac{de_i^{(j)}}{d\Theta}\right)} \left[\left(a_{i+1}^{(j+1)} \frac{h_{i+1}^{(j+1)} - h_i^{(j+1)}}{h_1} - a_i^{(j+1)} \frac{h_i^{(j+1)} - h_{i-1}^{(j+1)}}{h_1} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\gamma_1 \tau} \left\{ \left(a_{i+1}^{(j+1)} \frac{h_{i+1}^{(j+1)} - h_i^{(j+1)}}{h_1} - a_i^{(j+1)} \frac{h_i^{(j+1)} - h_{i-1}^{(j+1)}}{h_1} \right) - \left(a_{i+1}^{(j)} \frac{h_{i+1}^{(j)} - h_i^{(j)}}{h_1} - a_i^{(j)} \frac{h_i^{(j)} - h_{i-1}^{(j)}}{h_1} \right) \right\} \right] + f_i^{(j+1)}, \quad (6)$$

$i = \overline{1, m_1 - 1}$, $j = \overline{0, n_1 - 1}$, та закону (2)

$$u_i^{(j)} = -k_i^{(j)} \frac{h_{i+1}^{(j)} - h_{i-1}^{(j)}}{2h_1}, \quad (7)$$

$$i = \overline{1, m_1 - 1}, \quad j = \overline{1, n_1}, \quad \text{де} \quad a_i^{(j)} = \frac{1}{2}(k_i^{(j)} + k_{i-1}^{(j)}).$$

Для знаходження дискретних значень напору $h(x, t)$ з різницевого рівняння (6) використаємо метод прогонки [10, 12]. Для цього зведемо дане рівняння до прогоночного вигляду

$$a_i h_{i-1}^{(j+1)} - c_i h_i^{(j+1)} + b_i h_{i+1}^{(j+1)} = F_i^{(j)},$$

де

$$a_i = r'' a_i^{(j+1)}, \quad c_i = 1 + r''(a_i^{(j+1)} + a_{i+1}^{(j+1)}), \quad b_i = r'' a_{i+1}^{(j+1)},$$

$$F_i^{(j)} = r''' a_i^{(j)} h_{i-1}^{(j)} - (1 + r'''(a_i^{(j)} + a_{i+1}^{(j)})) h_i^{(j)} + r''' a_{i+1}^{(j)} h_{i+1}^{(j)},$$

$$r' = \frac{\tau(1+e)}{h_1^2 \gamma \left(-\frac{de_i^{(j)}}{d\Theta}\right)}, \quad r'' = r'(1 + \frac{1}{\gamma\tau}), \quad r''' = \frac{r'}{\gamma\tau}.$$

Можна показати, що умови стійкості прогонки $|c_i| > |a_i| + |b_i|$ виконуються. Значення напорів на часовому шарі $(j+1)$ послідовно знаходимо, використовуючи співвідношення

$$h_i^{(j+1)} = \alpha_{i+1} h_{i+1}^{(j+1)} + \beta_{i+1}, \quad (8)$$

де

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{a_i \beta_i - F_i^{(j)} + \tau \cdot f_i^{(j+1)}}{c_i - a_i \alpha_i}.$$

Для початкової умови (4) отримаємо наступний скінченнорізницевий аналог:

$$h_i^{(0)} = h_0(ih_1), \quad i = \overline{0, m_1}, \quad (9)$$

Для граничних умов (3) першого роду маємо наступний скінченнорізницевий аналог:

$$h_0^{(j)} = h_{m_1}^{(j)} = 0, \quad j = \overline{1, n_1}, \quad (10)$$

При $x=0$ для напору для граничної умови першого роду в методі прогонки маємо $\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0$.

В якості чисельного експерименту розглянемо процес фільтраційної консолідації шару двохфазного глинистого ґрунту товщиною $l=20\text{м}$, в якого верхня та нижня межі дренавані (рис. 1).

На верхню межу ґрунту рівномірно прикладається зовнішнє навантаження інтенсивністю $q = 20 \cdot 10^4 \frac{\text{кґ}}{\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2}$. Тоді початковий розподіл напорів згідно (9) буде $h_0(x) = 20\text{м}$ при $\gamma = 10^4 \frac{\text{кґ}}{\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2}$. Кількість часових шарів $m=13$. Значення решти вхідних даних беремо наступними :

$$f(x, t) = 0, \quad \rho = 1000 \frac{\text{кґ}}{\text{м}^3}, \quad n = 301.$$

Залежність коефіцієнта пористості e від суми напружень Θ в скелеті ґрунту представлена в таблиці.

Значення згідно роботи Н.Н. Маслова [8, ст. 149]

Θ (Па)	0	98000	196000	294000	392000	490000	588000	686000
e	0,66	0,62	0,59	0,56	0,55	0,54	0,53	0,51

Припустимо, що коефіцієнт фільтрації сталий і $k = 0.001 \frac{м}{доба}$. Час, протягом якого розглядається процес консолідації, дорівнює 1 рік. В рівнянні (1) $\frac{\partial h^*}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \Theta^*}{\partial t} = 0$, оскільки зовнішнє навантаження вважається миттєво прикладеним і незмінним у часі.

Використовуючи дані табл. 1, апроксимуємо залежність коефіцієнта пористості e від напружень Θ в скелеті ґрунту за допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа [11].

Для випадку, коли $e = L(\Theta)$, то $\frac{de}{d\Theta} = \frac{dL(\Theta)}{d\Theta}$.

Значення коефіцієнта стискуваності a у випадку його сталості дорівнює відношенню різниці значень початкового та кінцевого коефіцієнта пористості до значення максимального напруження в скелеті ґрунту

$$a = \frac{0.66 - 0.51}{686000} = 2.18 \cdot 10^{-7} \left(\frac{1}{Па} \right).$$

Як видно з рис. 2 і рис. 3, при умові, що коефіцієнт стискуваності $a = const$, надлишкові напори розсіюються швидше, ніж у випадку, коли $a = -\frac{dL(\Theta)}{d\Theta}$. Рис. 2. показує, що на першому часовому шарі надлишкові напори розсіюються найповільніше (графік синього кольору). З плином часу вони збільшують свою швидкість розсіювання і уже на останньому часовому шарі надлишкові напори розсіюються найшвидше (графік зеленого кольору).

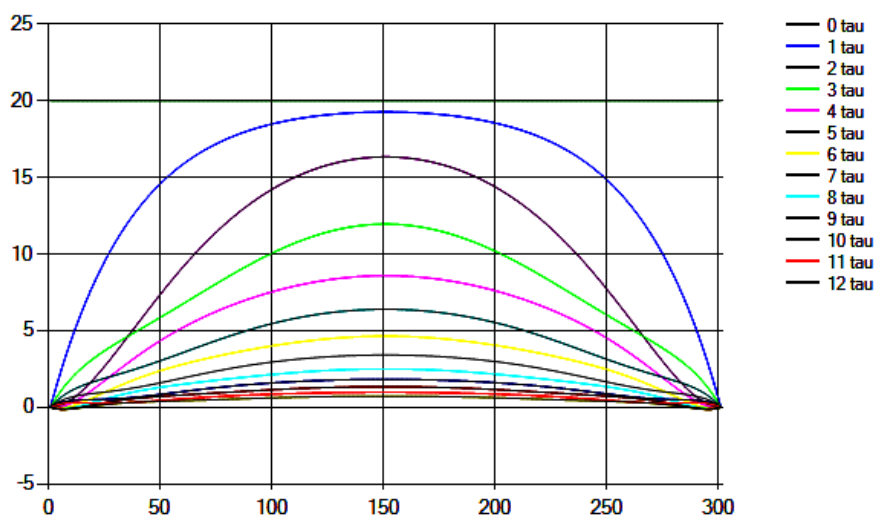


Рис. 2. Графіки розподілу поля надлишкових напорів при умові, що $a = -\frac{dL(\Theta)}{d\Theta}$

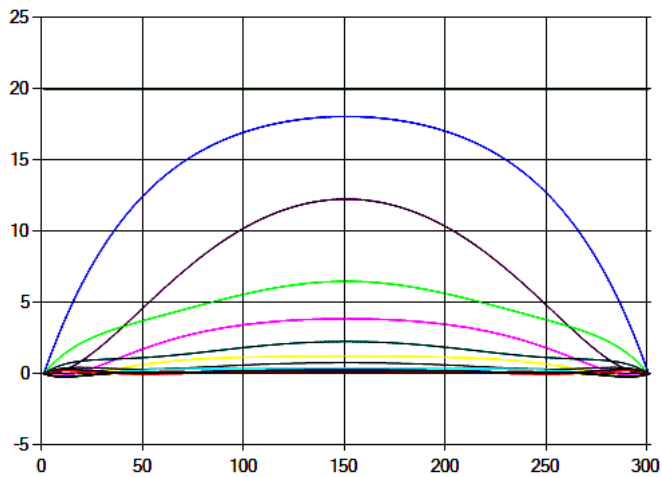


Рис. 3. Графіки розподілу поля надлишкових напорів при умові, що $a = const$

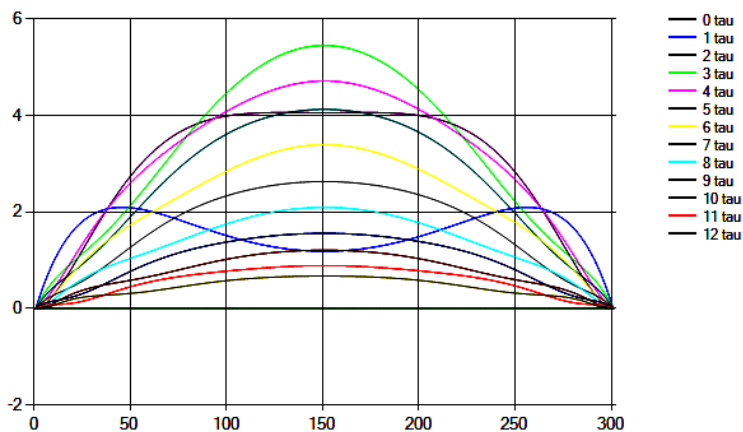


Рис. 4. Графіки різниці розподілу полів надлишкових напорів, зображених на рис. 2 та рис. 3

коефіцієнт стискуваності. Тому на практиці потрібно це враховувати.

Багато питань залишилися в даній статті поза увагою авторів: 1) врахування впливу техногенних факторів [1]; 2) розгляд іншого типу фільтраційних процесів (у статті розглянуто лише фільтраційну консолідацію); 3) дослідження задачі в двовимірному та тривимірному випадках; 4) застосування нелінійного закону фільтрації Дарсі-Форхгеймера в задачах консолідації [15]. Ці питання потребують вирішення і визначають **напрямки подальших досліджень авторів**.

1. Власюк А. П. Фільтраційна консолідація ґрунтового масиву за наявності перенесення солей у неізотермічному режимі / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Львів. ун-ту. Сер.: прикл. математ. та інформат. – 2003. – Вип. 7. – С. 138–147.
2. Бомба А. Я. Математичне моделювання нелінійних збурень процесів типу "фільтрація-конвекція-дифузія" з післядією [Текст] : дис... д-ра техн. наук: 01.05.02 / Бомба Андрій Ярославович; Рівненський держ. гуманітарний ун-т. – Рівне, 2005. – 407 с.
3. Бомба А. Я. Нелінійні задачі типу фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін за умов неповних даних / А. Я. Бомба, В. І. Гаврилюк, А. П. Сафоник, О. А. Фурсачик. – Рівне : НУВГП, 2011. – 275 с.
4. Булавацький В. М. Системный подход к проблеме математического моделирования процесса фильтрационной консолидации / В. М. Булавацький, В. В. Скопецкий // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 6. – С. 71–79.
5. Булавацький В. М. Математическое моделирование динамики консолидационных процессов с учетом релаксационных эффектов / В. М. Булавацький, В. В. Скопецкий // Кибернетика и системный

Аналізуючи рис. 3 можна побачити, що надлишкові напори розсіюються за тією ж тенденцією, що й на рис. 2, але з певною відмінністю. Різниця відображена на рис. 4. Вона полягає в тому, що швидкість розсіювання надлишкових напорів при умові сталості коефіцієнта стискуваності є вищою, аніж у випадку його нелінійної залежності від Θ . Якщо ж порівняти графік на першому часовому шарі (графік синього кольору) рис. 2. і 3, то можна побачити, що тут різниця є відносно невеликою, у порівнянні з графіками на інших часових шарах. Тобто швидкість розсіювання надлишкових напорів суттєво не відрізняється у двох випадках. Попри те, помітна достатня відмінність на графіку третього часового шару (графік салатого кольору). В цьому випадку різниця суттєва.

Як засвідчили результати чисельних експериментів, при дослідженні процесів консолідації є різними, якщо враховувати сталий та змінний

анализ. – 2008. – № 6. – С. 59–66.

6. Герсеванов Н. М. Основы динамики грунтовой массы / Н. М. Герсеванов – Москва : Госстройиздат, 1931. – 242 с.
7. Иванов П. Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. Механика грунтов / П. Л. Иванов – Москва : Высшая школа, 1991. – 447 с.
8. Маслов Н. Н. Инженерная геология / Н. Н. Маслов – Москва : Госстройиздат, 1957. – 408 с.
9. Петрик М. Р. Програмно-обчислювальний комплекс ідентифікації коефіцієнтів консолідації неоднорідних дисперсних середовищ вологовмістких частинок [Електронний ресурс] / М. Р. Петрик, Д. М. Михалик, О. Ю. Петрик: Тернопільський національний технічний університет ім. Івана Пулюя, 2011 – Режим доступу: <http://elartu.tntu.edu.ua/handle/123456789/1081>.
10. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский – Москва : Наука, 1989. – 616 с.
11. Самарский А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – Москва : Наука, 1989. – 429 с.
12. Самарский А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, В. С. Николаев. – Москва : Наука, 1978. – 592 с.
13. Флорин В. А. Основы механики грунтов / В. А. Флорин. – Москва : Госстройиздат. – Т. 2, 1961. – 560 с.
14. Флорин В. А. Теория уплотнения земляных масс / В. А. Флорин. – Москва : Госстройиздат, 1948. – 284 с.
15. Abiodun M. A. Mathematical model for Darcy Forchheimer flow with applications to well performance analysis / M. A. Abiodun. – Texas : Tech University, 2007. – 141 с.
16. Martynyuk P. M. Existence and uniqueness of a solution of the problem with free boundary in the theory of filtration consolidation of soils with regard for the influence of technogenic factors / P. M. Martynyuk // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – Vol. 207, № 1. – P. 59–73.

Рецензент: д.т.н., професор Хлапук М. М. (НУВГП)

Martyniuk P. M., Doctor of Engineering, Professor, Stepanchenko O. M., Candidate of Engineering, Associate Professor, Boboshko V. M., Graduate Student (National University of Water Management and Nature Resources Use, Rivne)

MATHEMATICAL MODELING OF THE SOIL CONSOLIDATION BY THE NONLINEAR COMPRESSION RELATIONS

The mathematical model of the soil's filtration consolidation was examined in consideration with linear and nonlinear compression relations. The approximate solutions to the corresponding nonlinear boundary problems were found with the method of finite differences. The program problem realization was made in the one-dimensional case; a number of numerical experiments were made and analyzed.

Keywords: filtration consolidation, excessive pressure, filtration coefficient, pressing coefficient.

Мартинюк П. М., д.т.н., проф., Степанченко О. М., к.т.н., доц., Бобошко В. М., магистрант (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНСОЛИДАЦИИ ГРУНТОВ ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОМПРЕССИОННЫХ ЗАВИСИМОСТЯХ

Рассмотрена математическая модель фильтрационной консолидации грунтов с учетом линейных и нелинейных компрессионных зависимостей. Приближенные решения соответствующих нелинейных краевых задач найдено методом конечных разностей. Осуществлено программную реализацию задачи в одномерном случае, проведен ряд численных экспериментов и их анализ.

Ключевые слова: фильтрационная консолидация, избыточные напоры, коэффициент фильтрации, коэффициент сжимаемости.