УДК 517.5

Іващук Я. Г., к.ф.-м.н. (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

АЛГОРИТМИ НАЙКРАЩОГО РІВНОМІРНОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЕЛЕМЕНТАМИ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ КЛАСІВ

Наведено огляд побудованих автором алгоритмів найкращого рівномірного наближення функцій елементами інтерполяційних класів.

Ключові слова: алгоритм найкращого рівномірного наближення функцій, інтерполяційний клас, оператор найкращого рівномірного наближення, алгоритм Ремеза.

Вступ. Нехай $C[a,b]$ – простір неперервних на $[a,b]$ функцій і F – інтерполяційний клас порядку $n-1$, тобто множина неперервних по x і диференційовних по параметрах $c_1,c_2,...,c_n$ функцій $y=F(x,c_1,c_2,\ldots,c_n)$, для яких однозначно розв'язується інтерполяційна задача в n довільних точках відрізка $[a,b]$ [1, С. 25] . Оператор

$$\mathrm{P}: C[a,b] \to \mathrm{F} ,$$

який ставить у відповідність кожній неперервній функції $f \in C[a,b]$ елемент її найкращого рівномірного наближення $\mathrm{P}(f,x) \in \mathrm{F}$, називаємо оператором найкращого наближення. Величину найкращого рівномірного наближення функції f визначимо рівністю

$$E(f) = \| f - \mathrm{P}(f) \|_{C[a,b]}.$$

Як відомо, алгоритм Ремеза [1, с. 28] передбачає ітераційний процес, де на кожній ітерації будується елемент найкращого наближення на скінченній множині із $n+1$ точок (чебишовська інтерполяція). Алгоритм найкращого наближення на скінченній множині із $n+1$ точок збігається з квадратичною збіжністю, що дозволяє ефективно його використовувати в другому алгоритмі Ремеза. Наприклад, у випадку нелінійних інтерполяційних класів побудова такого найкращого наближення якраз і потребує додатково ітераційного процесу на кожній скінченній множині з $n+1$ точок. Таким чином, класичний алгоритм Ремеза для інтерполяційних класів складається з двох вкладених ітераційних процесів [2, с. 196].

Алгоритм ремезового типу реалізується одним ітераційним процесом. Відрізняється він від алгоритму Ремеза тим, що на кожній множині $\mathrm{X}^s = \{x_1^s, x_2^{\,s}, \ldots, x_{n+1}^{\,s}\}$, $s = 0,1,\ldots$ не будується елемент найкращого наближення, а здійснюється один ітераційний крок за новим алгоритмом побудови елемента на скінченній множині з $n+1$ точок, в результаті чого отримуємо функцію $F^s(x,c^s)$, яка зменшує рівномірну норму відхилення $f(x) - F^{s-1}(x,c^{s-1})$ на множині X^s до величини $\left\| f(x) - F^s(x,c^s) \right\|_{C[\mathrm{X}^s]}$. Після чого, застосовуючи принцип Валле-Пуссена-Ремеза заміни точок, переходимо до множини X^{s+1} і на новій множині будуємо новий елемент $F^{s+1}(x,c^{s+1})$.

У всіх трьох алгоритмах вдало поєднано ідею параметричного методу Бернштейна для знаходження поліномів найменшого відхилення з диференційованістю оператора найкращого рівномірного наближення

Основні позначення і стислий опис алгоритму ремезового типу. Алгоритм побудови елемента найкращого рівномірного наближення в інтерполяційному класі на скінченній множині із $n+1$ точок описано у [2, С. 197]. Також доведено теорему 1 про його лінійну та квадратичну збіжність.

Ітераційний процес може розпочинатися з довільного початкового елемента $F(x,c^0)$ з інтерполяційного класу та довільної початкової множини точок $X^0=\{x_1^0,x_2^0,...,x_{n+1}^0\}$. Опишемо перехід від ітерації з номером s до ітерації з номером $s+1$. Отже , припустимо, що задано елемент $F^s(x,c^s)$, для якого різниця $f-F^s\left(x,c^s\right)$ змінює знак в точках множини

$$\mathrm{X}^s=\left\{x_1^s,x_2{}^s,\ldots,x_{n+1}{}^s\right\},\ a\le x_1^s<x_2^s<\ldots<x_{n+1}^s\le b.$$

Для побудови стартового елемента $F(x,c^s)$ такого, щоб різниця $f-F\left(x,c^s\right)$ змінювала знак $n+1$ раз на множині X^s, використовуємо алгоритм побудови елемента на скінченній множині з $n+1$ точок.

Виконуючи ітерацію s знаходимо точку $x_*^s\in\left[a,b\right]$ у якій різниця $f-F\left(x,c^{s-1}\right)$ набуває найбільшого за модулем значення, і використовуючи ідею Валле-Пуссена-Ремеза заміни точок, будуємо множину

$$\mathrm{X}^s=\mathrm{X}^{s-1}\backslash\left\{x_{j_0}^{s-1}\right\}\cup\left\{x_*^s\right\},$$

виключаючи таку точку $x_{j_0}^{s-1}$, щоб на новій множині X^s різниця $f-F\left(x,c^{s-1}\right)$ зберігала альтернанс [1] . Позначимо:

$$E^s=\left\|f-F\left(x,c^s\right)\right\|_{C[a,b]},\quad e^s=\min\left\{\left|f-F\left(x,c^s\right)\right|,x\in\mathrm{X}^s\right\}.$$

Побудуємо на множині X^s допоміжну функцію g_s так, щоб елемент $F(x,c^{s-1})$ був найкращим рівномірним наближенням функції $f+g_s$ на цій множині, і при цьому виконувалась умова:

$$\left\|f-F\left(x,c^{s-1}\right)\right\|_{C[a,b]}=\left\|f\left(x\right)+g_s-F\left(x,c^{s-1}\right)\right\|_{C\left(\mathrm{X}^s\right)}.$$

Для цього достатньо покласти в усіх точках x_j^s множини X^s:

$$g_s\left(x_j^s\right)=E^{s-1}sign\left(f\left(x_j^s\right)-F\left(x_j^s,c^{s-1}\right)\right)-\left(f\left(x_j^s\right)-F\left(x_j^s,c^{s-1}\right)\right).$$

Далі, повторюючи кроки нового алгоритму побудови елемента найкращого наближення на множині з $n+1$ точок [2, С. 192, 193], знаходимо коефіцієнти похідної-полінома

$$D_s\left(f+g_s,-g_s\right)=\sum_{k=1}^{n}d_k^s\frac{\partial F\left(x,c^{s-1}\right)}{\partial c_k^{s-1}}$$

та величину α_s найкращого наближення функції $-g_s\left(x\right)$ цим поліномом на множині X^s із системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$D\left(f+g_s,-g_s,x_j^s\right)+\alpha_s\left(-1\right)^j\theta=-g_s\left(x_j^s\right),\quad \theta=-1,\text{ або }\ \theta=1$$

підбираємо величину кроку t_s як зазначено у [2, с. 197] та знаходимо параметри наступного елемента $F^s(x,c^s)$ за формулою

$$c_k^s=c_k^{s-1}+t_sd_k^s.$$

Як доведено у [2, С. 198], починаючи з деякої ітерації s значення кроку $t_s = 1$.

У результаті отримуємо послідовність функцій $F^s(x,c^s)$, $s = 0,1,\ldots$ інтерполяційного класу F збіжну до елемента $F^*(x,c^*) = \mathrm{P}(f,x)$ зі швидкістю геометричної прогресії.

Через P позначимо оператор найкращого наближення елементами інтерполяційного класу. У роботі [3, с. 178] доведено, що оператор P задовольняє умову Ліпшиця, а у статті [4, С. 72] доведено його диференційовність за напрямком, а також слабку диференційовність (по Гато) у випадку, коли множина точок максимального відхилення містить рівно $n+1$ точку. Це дало змогу знайти оцінки збіжності всіх трьох алгоритмів.

Основний результат. Для алгоритму найкращого рівномірного наближення функцій елементами інтерполяційного класу на скінченній множині із $n+1$ точок справедливим є твердження.

Теорема 1. Послідовність функцій $F\left(x,c^{(k)}\right)$, $k = 0,1,\ldots$ збігається до елемента $F\left(x,c^*\right)$ найкращого рівномірного наближення функції $f\left(x\right)$ на множині $\mathrm{X} = \{x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}\}$ зі швидкістю геометричної прогресії. Починаючи з деякого номера ітерації k_0 швидкість збіжності стає квадратичною, тобто

$$\left\|F\left(x,c^{(k+1)}\right) - F\left(x,c^*\right)\right\| \le K_2 \left\|F\left(x,c^{(k)}\right) - F\left(x,c^*\right)\right\|^2,$$

або

$$\left\|F\left(x,c^{(k+1)}\right) - F\left(x,c^*\right)\right\| \le K_2\, q^{2^k}.$$

Для алгоритму Ремеза [5, с. 157] та алгоритму ремезового типу [6, С. 128] знайдено умови, при яких досягається лінійна та квадратична збіжність та доведено таке твердження.

Теорема 2. Нехай задана на $[a,b]$ функція $f(x)$ є двічі неперервно диференційовною, а функції $F\left(x,c_1,c_2,\ldots,c_n\right)$ інтерполяційного класу F є двічі неперервно диференційовні по x та по параметрах $c_1,c_2,\ldots,c_n$ і нехай $P\left(f,x\right)$ є елементом найкращого рівномірного наближення функції $f\left(x\right)$. Якщо модуль різниці

$$f\left(x\right) - P\left(f,x\right)$$

досягає свого максимуму рівно в $n+1$ точці $x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}$, які утворюють чебишовський альтернанс цієї різниці на відрізку $\left[a,b\right]$, і в кожній такій точці виконується умова

$$f''\left(x_j\right) - P''_{xx}\left(f,x_j\right) \ne 0, \qquad j = 1,2,\ldots,n+1,$$

то послідовність елементів $F^s\left(x,c_1^s,c_2^s,\ldots,c_n^s\right)$ побудована за алгоритмом ремезового типу, починаючи з деякого номера S, збігається до елемента найкращого наближення функції $f(x)$ з квадратичною швидкістю.

Описані алгоритми реалізовані програмною мовою Borland Pascal і успішно апробовані при апроксимації неперервних функцій різними інтерполяційними класами залежними від різної кількості параметрів (від 2 до 10). Проілюструємо сказане на прикладі.

Наближення неперервної функції $f\left(x\right) = e^{-x}$ елементами обмеженого нелінійного інтерполяційного класу

$$F\left(c,x\right) = \frac{1}{c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 x^4 + c_6 x^5}$$

п'ятого порядку на відрізку $[0, 1]$ з точністю $\varepsilon = 10^{-7}$.

Значення величин $c_i, i=\overline{1,6}$ та величин E_k, $\|g_k\|$, $|\alpha_k|$, $E_k - |\alpha_k|$, $E_k - E$ на кожному кроці ітерації обчислені за алгоритмом ремезового типу, швидкодія якого є найбільшою.

Таблиця

Значення параметрів $c_i, i=\overline{1,6}$ та величин E_k, $\|g_k\|$, $|\alpha_k|$, $E_k - |\alpha_k|$, $E_k - E$

№	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
0	1	1	1	1	1	1
1	1,0002368202	0,89322444	1,94708471	-6,71125058	13,9392309	-12,13325181
2	1,00269309	0,36103488	8,25080507	-32,21295325	55,90323281	-34,21355469
3	1,00207132	0,55166515	5,81226146	-21,38749205	35,79965295	-20,75109665
4	1,00033473	0,92807336	1,34853588	-3,26007134	5,69380712	-3,24907046
5	1,00000715	0,99846786	0,51801516	0,094273842	0,159936332	-0,05800588
6	0,99999992	1,00003020	0,49958892	0,168674171	0,037237888	0,012716148
0	0,99999992	1,00003020	0,49958892	0,168674171	0,037237888	0,012716148
1	0,99999973122	1,0000275993	0,49957677278	0,16887518540	0,03673683695	0,01306351204
2	0,99999961811	1,0000364097	0,49947853002	0,16924436371	0,03620295451	0,01331697927
3	0,99999960144	1,0000375291	0,49946764178	0,16927724610	0,03616680077	0,01332991118
4	0,99999960123	1.0000375351	0.49946762486	0.16927719263	0.03616695875	0.01332981618
5	0.99999960123	1.0000375351	0.49946762509	0.16927719187	0.03616695980	0.01332981568
6	0.99999960123	1.0000375352	0.49946762471	0.16927719294	0.03616695857	0.01332981619
7	0.99999960123	1.0000375351	0.49946762482	0.16927719271	0.03616695875	0.01332981613
8	0.99999960123	1.0000375351	0.49946762500	0.16927719222	0.03616695928	0.01332981594
9	0.99999960123	1.0000375351	0.49946762476	0.16927719276	0.03616695883	0.01332981606
10	0.99999960123	1.0000375351	0.49946762500	0.16927719222	0.03616695928	0.01332981594
11	0,99999960123	1,0000375351	0,49946762476	0,16927719276	0,03616695883	0,01332981606

№	E_k	$\|g_k\|$	$\|\alpha_k\|$	$E_k - \|\alpha_k\|$	$E_k - E$
0	0,18763119509	0.3477013577	0,18739437491	0,00023682018	0,18763101764
1	0,71138608631	1,4227721726	0,70869420751	0,00269187880	0,71138590886
2	0,27295801286	0,5459160257	0,27089058902	0,00206742384	0.27295783541
3	0,07572195358	0,1514439072	0,07538432931	0,00033762427	0,07572177613
4	0,00970319050	0,0194063810	0,00969593294	0,00000725756	0.00970301305
5	0,00020521579	0,0004104316	0,00020529418	-0,0000007839	0,00020503834
6	0,00000017745	0.0000000992			0
0	0,00000461761	0.00000453916	0,00000434883	0,00000026878	0.00000421123
1	0,00000092072	0.00000065194	0,00000053883	0,00000038189	0.00000052195
2	0,00000044953	0.00000006764	0,00000005097	0,00000039856	0.00000005076
3	0,00000039917	0.00000000061	0,00000000040	0,00000039877	0.00000000041
4	0,00000039877	0.00000000000136	0,000000000000759	0,000000398769	0
5	0.00000039877	0.00000000000182	0,000000000000792	0.00000039877	0
6	0.00000039877	0.00000000000136	0,000000000000648	0.00000039877	0
7	0.00000039877	0.00000000000091	0,000000000000736	0.00000039877	0
8	0.00000039877	0.00000000000136	0,000000000000936	0.00000039877	0
9	0.00000039877	0.00000000000182	0,000000000000882	0.00000039877	0
10	0.00000039877	0.00000000000182		0.00000039877	0
11	0,00000039877	0.00000000000182		0,00000039877	0

Висновки. Як показали експерименти, стартове наближення $F(x, c^0)$ не обов'язково брати таким, щоб виконувалася умова альтернансу, що є перевагою від алгоритмів побудованих Є. Ремезом і В. Гаврилюк, хоча в такому випадку кількість кроків ітерацій збільшується в двічі, тричі. Перевагою даних алгоритмів є і те, що крок t_k можна завжди брати рівним 1, а не визначати безпосередньо з умов вказаних вище, і в разі погіршення наближення в програмі існує ітераційна процедура, яка передбачає зменшення кроку наполовину. При досягненні альтернансу на множині X^s достатньо близькій до характеристичної для знаходження елемента найкращого рівномірного наближення із заданою точністю потрібно 3–5 ітерацій, що підтверджує квадратичну збіжність алгоритму.

1. Ремез Е. Я. и Гаврилюк В. Т. О построении чебышевских приближений функциями интерполяционных классов // Укр. мат. жур. – 1971. – **23**, № 1. – С. 25–33.
2. Іващук Я. Г., Алгоритми найкращих наближень функцій інтерполяційними класами // Теорія наближень функцій та її застосування. Праці Інституту математики НАН України. – Вип. 31. – 2000. – С. 190–200.
3. Angelos J. R., Henry M. S., Kaufman E. H., Kroo A., Lenker T. D., Local Lipschitz and Strong Unicity Constants for Certain Nonlinear Famlies. Journal of aproximation theory. – 1989. – 58. – P. 164–183.
4. Іващук Я. Г., Ковтунець В. В. Диференціальні властивості оператора найкращого рівномірного наближення функцій елементами інтерполяційного класу // Волинський математичний вісник. – 1999. – Вип. 6. – С. 69–75.
5. Іващук Я. Г. Оцінки збіжності алгоритму Ремеза для інтерполяційних класів / Я. Г. Іващук // Збірник праць Ін-ту матем. НАН України. Т. 5, № 1: Теорія наближень функцій та суміжні питання / Відп. ред.: А. С. Романюк – Київ : Ін-т математики НАН України, 2008. – С. 153–159.
6. Іващук Я. Г. Оцінки збіжності алгоритму ремезового типу для інтерполяційних класів / Я. Г. Іващук // Збірник праць Інституту математики НАН України. Т. 10, № 1: Теорія наближень функцій та суміжні питання / Відп. ред.: А. С. Романюк – Київ : Ін-т математики НАН України, 2013. – С. 126–132.

Рецензент: д.п.н., к.ф.-м.н., професор Тадєєв П. О. (НУВГП)

Ivashchuk Y. G., Candidate of Physical and Mathematical Sciences (National University of Water Management and Nature Resources Use, Rivne)

ALGORITHMS DEVELOPMENT OF MOST SUITABLE UNIFORM APPROXIMATION OF FUNCTIONS BY ELEMENTS OF UNISOLVENT FAMILY

The author provides an overview of algorithms built of most suitable uniform approximation of functions by elements of unisolvent family.

Keywords: Algorithms development of most suitable uniform approximation, unisolvent family, best approximation operator, Remez algorithm.

Иващук Я. Г., к.ф.-м.н. (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)

АЛГОРИТМЫ НАИЛУЧШЕГО РАВНОМЕРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ЭЛЕМЕНТАМИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ КЛАССОВ

Дан обзор построенных автором алгоритмов наилучшего равномерного приближения функций элементами интерполяционных классов.

Ключевые слова: алгоритм наилучшего равномерного приближения функций, интерполяционный класс, оператор наилучшего равномерного приближения, алгоритм Ремеза.