

УДК 539.3:534.222

Бомба А. Я., д.т.н, професор, Турбал Ю. В., к.ф.-м.н., доцент, Радовенюк О. В., аспірант, Клап А. В., аспірант, Турбал М. Ю., студент (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

## МЕТОД АНАЛІЗУ ПРОЦЕСІВ ПОШИРЕННЯ КРУГОВИХ СОЛІТОНОПОДІБНИХ ХВИЛЬ В РАМКАХ НАБЛИЖЕННЯ МІЛКОЇ ВОДИ

У статті запропоновано метод для знаходження аналітичного представлення розв'язків рівнянь типу мілкої води та показано, що в рамках відповідного наближення не існує розв'язку, що моделює поперечну хвилю незмінного профілю при певних поверхнях дна.

**Ключові слова:** солітон, відокремлена хвиля, мілка вода

**Вступ.** Останніми роками дослідження відокремлених хвиль відіграє важливе значення у багатьох прикладних галузях. Адже розв'язки типу біжучої хвилі описують процеси виникнення та поширення відокремлених хвиль в механіці рідин, гідродинаміці, оптиці, фізиці плазми, фізиці твердого тіла, біології, метеорології та інших галузях.

В гідродинаміці відокремлені хвилі відомі як хвилі на поверхні води а також внутрішні хвилі в стратифікованій рідині. При цьому важливе значення має дослідження відокремлених хвиль типу цунамі – адже такі хвилі приносять шкоду судноплавству, знищують все на своєму шляху при накочуванні на берег. При вивченні цунамі досі точаться дискусії чи є такі хвилі солітонами, які їх властивості при взаємодії з іншими об'єктами чи собі подібними хвилями. Дана робота, зокрема, дає відповідь на питання, чи є цунамі солітоном.

### Аналіз останніх досліджень.

Рівняння типу мілкої води мають важливе практичне значення, оскільки описують великомасштабні атмосферні та океанічні течії, зокрема, в середніх широтах. В декартових координатах вони мають вигляд [1]:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vv_y + gh_x &= fv, \\ v_t + uv_x + vw_y + gh_y &= -fu, \\ h_t + (uh)_x + (vh)_y &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $u, v$  компоненти вектора швидкості,  $h$  – глибина шару рідини над рівним дном;  $f$  – параметр Коріоліса (частота повертання),  $g$  – прискорення вільного падіння. Модель (1) отримується з рівнянь Ейлера [3] ідеальної рідини при таких припущеннях: відношення характерного вертикального масштабу течії до характерних горизонтальних масштабів набагато менше за 1; густина рідини стала; тиск в рідині гідростатичний по глибині; вісь обертання співпадає з вертикальною віссю  $Z$ . Узагальнення відповідної системи з врахуванням в'язкості в дивергентній формі наведене в роботі [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \text{div}(hU) &= 0, \\ \frac{\partial hU}{\partial t} + U \text{div}(hU) + (hU \nabla)U + \nabla \left( \frac{gh^2}{2} \right) &= \text{div} \Pi_{NS} + hF - gh \nabla b, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $h(x, y, t)$  – висота рідини,  $U = (u, v)$  – вектор шидкості,  $\Pi_{NS}$  – тензор в'язких напруг Нав'є-Стокса,  $F$  – вектор компонент зовнішньої сили,  $b(x, y)$  – профіль дна,  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)^T$ .

В полярній системі координат система (2) матиме вигляд:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rhu_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (hu_\varphi)}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial hu_r}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rhu_r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(hu_r u_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{gh^2}{2} \right) - \frac{hu_\varphi^2}{r} = \\ & = h(f_r - g \frac{\partial b}{\partial r}) + \frac{\partial \Pi_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\Pi_{rr} - \Pi_{\varphi\varphi}}{r}, \\ & \frac{\partial hu_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 hu_r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(hu_\varphi^2)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{gh^2}{2} \right) = \\ & = h(f_\varphi - \frac{1}{r} g \frac{\partial b}{\partial \varphi}) + \frac{\partial \Pi_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \Pi_{r\varphi}, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $h(r, \varphi, t)$  – висота рідини,  $U = (u_r(r, \varphi, t), u_\varphi(r, \varphi, t))$  – вектор швидкості,  $\Pi_{NS}$  – тензор в'язких напруг Нав'є-Стокса,  $f_r, f_\varphi$  – компоненти зовнішньої сили,  $b(r, \varphi)$  – профіль дна,  $\mu$  – фізична в'язкість,

$$\begin{aligned} \Pi_{rr} &= 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \Pi_{\varphi\varphi} &= 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right), \\ \Pi_{r\varphi} = \Pi_{\varphi r} &= \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Відзначимо, що рівняння мілкої води, як правило, розв'язуються чисельними методами через значні труднощі у отриманні аналітичних розв'язків. В даній роботі пропонується новий підхід до знаходження розв'язків системи рівнянь мілкої води, що моделюють процес поширення кругових локалізованих поверхневих хвиль типу цунамі.

**Методика досліджень.** В роботі застосовуються певні модифікації Т-представлень для опису профілю кругової хвилі та пропонується знаходити розв'язок системи рівнянь мілкої води для випадку, коли функція, що описує профіль хвилі, має специфічне представлення. Тоді компоненти швидкості знаходяться з відповідної системи при певних початкових умовах.

**Постановка завдання.** Під цунамі розуміють кругову хвилю, що розповсюджується в океані від центра її утворення на великі відстані. В океані висота такої хвилі відносно невелика, однак при накопчуванні на берег висота цунамі зростає і вона спричиняє значні руйнування.

Будемо розглядати систему рівнянь мілкої води за умов відсутності в'язкості та компонент зовнішньої сили:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{hu_r}{r} + \frac{\partial(hu_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(hu_\varphi)}{\partial \varphi} = 0, \\ & \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + g \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{u_\varphi^2}{r} = -g \frac{\partial b}{\partial r}, \\ & \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{g}{r} \frac{\partial h}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r} g \frac{\partial b}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (5)$$

Нехай компоненти швидкості та профіль хвилі не залежать від кута  $\varphi$ . Тоді з (5) отримуємо систему:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{hu_r}{r} + \frac{\partial(hu_r)}{\partial r} = 0, \\ & \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + g \frac{\partial h}{\partial r} = -g \frac{\partial b}{\partial r}, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{hu}{r} + u \frac{\partial h}{\partial r} + h \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \\ & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + g_0 \frac{\partial h}{\partial r} = -g_0 \frac{\partial b}{\partial r}. \end{aligned} \quad (6)$$

В роботі ставиться завдання розробити метод для аналітичного опису процесу

поширення одиночних кругових хвиль в рамках наближення мілкої води.

**Метою** роботи є модифікація Т-представлень для знаходження розв'язків системи рівнянь мілкої води, що моделюють процес поширення кругових локалізованих поверхневих хвиль типу цунамі.

**Результати досліджень.** Нехай форма профілю хвилі визначається співвідношенням:

$$h(r, t) = \gamma_h(t) \exp\left\{-\frac{g(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon}\right\} + c_{gl}, \quad (7)$$

де  $\gamma_h(t)$ ,  $\tilde{r}(t)$ ,  $g(\cdot)$  – деякі функції,  $\varepsilon$ ,  $c_{gl}$  – константи.

Співвідношення (7) описує кругову одиночну хвилю незмінного в часі профілю, що поширюється від деякого центра (див. рисунок). З врахуванням (7) маємо:

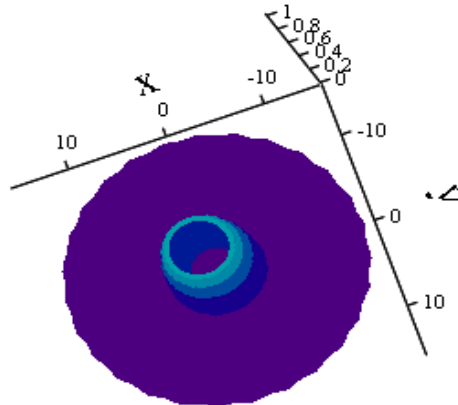


Рисунок. Профіль кругової локалізованої хвилі

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial r} &= -\frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \gamma_h(t) \exp\left\{-\frac{g(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon}\right\} = -\frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} (h - c_{gl}), \\ \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} &= -\frac{g''(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} (h - c_{gl}) + \left(\frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon}\right)^2 (h - c_{gl}), \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= \gamma_h'(t) \exp\left\{-\frac{g(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon}\right\} + \gamma_h(t) \exp\left\{-\frac{g(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon}\right\} \tilde{r}'(t) \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} = \\ &= \gamma_h'(t) (h - c_{gl}) / \gamma_h(t) + (h - c_{gl}) \tilde{r}'(t) \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Підставляючи останні співвідношення в систему (6), отримуємо:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\gamma_h'(t)}{\gamma_h(t)} \frac{h - c_{gl}}{h} - \tilde{r}'(t) \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \frac{h - c_{gl}}{h} + u \left( \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \frac{h - c_{gl}}{h} - \frac{1}{r} \right), \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} (h - c_{gl}) - u \frac{\partial u}{\partial r} - g_0 \frac{\partial b}{\partial r}. \quad (9)$$

Зауважимо, що рівняння (7) є лінійним по  $u$ . В такому випадку можемо записати його загальний розв'язок у вигляді:

$$\begin{aligned} u(r, t) &= e^{\int \frac{g'(r - \tilde{r}(t)) h - c_{gl}}{\varepsilon h} - \frac{1}{r} dr} \left( C(t) - \int \left( \frac{\gamma_h'(t)}{\gamma_h(t)} \frac{h - c_{gl}}{h} + \tilde{r}'(t) \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \frac{h - c_{gl}}{h} \right) \times \right. \\ &\times e^{-\int \frac{g'(r - \tilde{r}(t)) h - c_{gl}}{\varepsilon h} - \frac{1}{r} dr} dr \Big) = \frac{1}{r} e^{\int \frac{g'(r - \tilde{r}(t)) h - c_{gl}}{\varepsilon h} dr} \left( C(t) - \right. \\ &\left. - \int \left( \frac{\gamma_h'(t)}{\gamma_h(t)} \frac{h - c_{gl}}{h} + \tilde{r}'(t) \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon} \frac{h - c_{gl}}{h} \right) e^{-\int \frac{g'(r - \tilde{r}(t)) h - c_{gl}}{\varepsilon h} dr} r dr \right). \end{aligned}$$

Враховуючи співвідношення

$$\int \frac{g'(r - \tilde{r}(t)) h - c_{gl}}{\varepsilon h} dr = -\ln(\gamma(t) e^{-\frac{g(r - \tilde{r}(t))}{\varepsilon}} + c_{gl}) + C_1,$$

отримуємо вираз для функції збурення:

$$u(r, t) = \frac{1}{r(\gamma(t)e^{\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} + c_{gl})} (C(t) - \gamma_h'(t)) \int e^{\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} r dr - \tilde{r}'(t) \int \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} (h - c_{gl}) r dr).$$

З врахуванням співвідношень

$$\int \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} (h - c_{gl}) dr = -\gamma(t) e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} + C_2, \\ \int \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} (h - c_{gl}) r dr = -r\gamma(t) e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} + \gamma(t) \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr, \\ \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} r dr = r \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr - \int \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr dr,$$

отримуємо:

$$u(r, t) = \frac{1}{r(\gamma(t)e^{\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} + c_{gl})} (C(t) - \gamma_h'(t)) \int e^{\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} r dr - \tilde{r}'(t) \int \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} (h - c_{gl}) r dr = \frac{1}{rh} (C(t) - (\gamma'(t)r + \tilde{r}'(t)\gamma(t)) \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr + \gamma'(t) \int \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr dr + \tilde{r}'(t)r\gamma(t) e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}})$$

або  $u(r, t) = \frac{1}{rh} (C(t) - r \frac{d}{dt} \gamma(t) \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr + \frac{d}{dt} \gamma(t) \int \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr dr)$ .

(тут поклали  $C_1 = 0, C_2 = 0$ ). Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\gamma_h'(t)(h - c_{gl}) / \gamma_h(t) + (h - c_{gl}) \tilde{r}'(t)}{rh^2} \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} (C(t) - (\gamma_h'(t)r + \tilde{r}'(t)\gamma(t)) \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr + \gamma_h'(t) \int \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr dr + \tilde{r}'(t)r\gamma(t) e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}}) + \frac{1}{rh} (C'(t) - (\gamma_h''(t)r + \tilde{r}''(t)\gamma(t) + \tilde{r}'(t)\gamma'(t)) \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr + (\gamma_h'(t)\tilde{r}'(t)r + \tilde{r}''(t)\gamma(t)) e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} + \gamma_h''(t) \int \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr dr - \gamma_h'(t)\tilde{r}'(t) \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr + \tilde{r}''(t)r\gamma(t) e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} + \tilde{r}'(t)r\gamma'(t) e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} + \tilde{r}''(t)r\gamma(t) \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}}), \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{rh^2} [(C'(t) - (\gamma_h''(t)r + \tilde{r}''(t)\gamma(t) + 2\tilde{r}'(t)\gamma'(t)) \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr + 2\gamma_h'(t)\tilde{r}'(t)r(h - c_{gl}) / \gamma(t) + \tilde{r}''(t)(h - c_{gl}) + \gamma_h''(t) \int \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr dr + \tilde{r}''(t)r(h - c_{gl}) + \tilde{r}''(t)r \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} (h - c_{gl})] \times h - (C(t) - (\gamma_h'(t)r + \tilde{r}'(t)\gamma(t)) \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr + \gamma_h'(t) \int \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr dr + \tilde{r}'(t)r(h - c_{gl})) \times (\gamma_h'(t)(h - c_{gl}) / \gamma_h(t) + (h - c_{gl}) \tilde{r}'(t) \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}).$$

Підставляючи останні співвідношення у рівняння (8), отримуємо:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{rh} (C'(t) - (\gamma_h''(t)r + \tilde{r}''(t)\gamma(t) + 2\tilde{r}'(t)\gamma'(t))) \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr + \\
 & + 2\gamma_h'(t)\tilde{r}'(t)r(h-c_{gl}) / \gamma(t) + \tilde{r}''(t)(h-c_{gl}) + \gamma_h''(t) \int \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} drdr + \\
 & + \tilde{r}''(t)r(h-c_{gl}) + \tilde{r}''(t)r \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} (h-c_{gl}) - \\
 & - (C(t) - (\gamma_h'(t)r + \tilde{r}'(t)\gamma(t))) \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr + \gamma_h'(t) \int \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} drdr + \\
 & + \tilde{r}'(t)r(h-c_{gl}) (\gamma_h'(t) / \gamma_h(t) + \tilde{r}'(t) \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}) \frac{(h-c_{gl})}{rh^2} = \\
 & - (\gamma_h'(t)r + \tilde{r}'(t)\gamma(t)) \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr + \gamma_h'(t) \int \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} drdr + \\
 & = g_0 \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} (h-c_{gl}) + \frac{1}{rh} (C(t) - (\gamma_h'(t)r + \tilde{r}'(t)\gamma(t))) \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr + \\
 & + \gamma_h'(t) \int \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} drdr + \tilde{r}'(t)r\gamma(t) e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} \frac{\gamma_h'(t)}{\gamma_h(t)} \frac{h-c_{gl}}{h} + \frac{1}{rh} (C(t) - \\
 & + \tilde{r}'(t)r\gamma(t) e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}}) \tilde{r}'(t) \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} \frac{h-c_{gl}}{h} - \frac{1}{r^2 h^2} (C(t) - \\
 & - \tilde{r}'(t)\gamma(t) \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr + \gamma_h'(t) \int \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} drdr - \gamma_h'(t)r \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr + \\
 & + \tilde{r}'(t)r\gamma(t) e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}})^2 \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} \frac{h-c_{gl}}{h} + \frac{1}{r^3 h^2} (C(t) - \tilde{r}'(t)\gamma(t) \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr + \\
 & + \gamma_h'(t) \int \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} drdr - \gamma_h'(t)r \int e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr + \tilde{r}'(t)r\gamma(t) e^{-\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}})^2 - g_0 \frac{\partial b}{\partial r}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Отримали загальне рівняння, яке дозволяє аналізувати поверхню дна та профіль хвилі.

Зауважимо, що рівняння (10) може не мати розв'язків у випадку заданої функції  $b$  для довільних значень  $r, t$ . Для аналізу цього факту досить розглянути вирази, що містять множники виду  $\frac{1}{r}, \frac{1}{r^2}$ . Остання обставина говорить про те, що профіль хвилі в часі змінюватиметься.

Нехай маємо початкову умову для профілю хвилі, записану у вигляді:  $h(r, t_0) = \gamma_h(t_0) \exp\{-\frac{g(r-\tilde{r}(t_0))}{\varepsilon}\} + c_{gl}$ , де  $g$  – задана функція. Будемо знаходити розв'язок системи у формі (7). Рівняння (10) при  $r = \tilde{r}(t) + \alpha$  матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{rh} (C'(t) - (\gamma''(t)r + \tilde{r}''(t)\gamma(t) + 2\tilde{r}'(t)\gamma'(t))) \psi'(\alpha) + 2\gamma'(t)\tilde{r}'(t)r(h-c_{gl}) / \gamma(t) + \\
 & + \tilde{r}''(t)(h-c_{gl}) + \gamma''(t)\psi(\alpha) + \tilde{r}''(t)r(h-c_{gl}) + \tilde{r}''(t)r \frac{g'(\alpha)}{\varepsilon} (h-c_{gl}) - \\
 & - (C(t) - (\gamma'(t)r + \tilde{r}'(t)\gamma(t))) \psi'(\alpha) + \gamma'(t)\psi(\alpha) + \tilde{r}'(t)r(h-c_{gl}) \times \\
 & \times (\gamma'(t) / \gamma(t) + \tilde{r}'(t) \frac{g'(\alpha)}{\varepsilon}) \frac{(h-c_{gl})}{rh^2} = \\
 & + \tilde{r}'(t)r\gamma(t) e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \frac{h-c_{gl}}{h} + \frac{1}{rh} (C(t) - (\gamma'(t)r + \tilde{r}'(t)\gamma(t))) \psi'(\alpha) + \\
 & = g_0 \frac{g'(\alpha)}{\varepsilon} (h-c_{gl}) + \frac{1}{rh} (C(t) - (\gamma'(t)r + \tilde{r}'(t)\gamma(t))) \psi'(\alpha) + \gamma'(t)\psi(\alpha) + \\
 & + \gamma'(t)\psi(\alpha) + \tilde{r}'(t)r\gamma(t) e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}} \tilde{r}'(t) \frac{g'(\alpha)}{\varepsilon} \frac{h-c_{gl}}{h} - \frac{1}{r^2 h^2} (C(t) - (\gamma'(t)r + \\
 & + \tilde{r}'(t)\gamma(t)) \psi'(\alpha) + \gamma'(t)\psi(\alpha) + \tilde{r}'(t)r\gamma(t) e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}})^2 \frac{g'(\alpha)}{\varepsilon} \frac{h-c_{gl}}{h} + \frac{1}{r^3 h^3} (C(t) - \\
 & - (\gamma'(t)r + \tilde{r}'(t)\gamma(t)) \psi'(\alpha) + \gamma'(t)\psi(\alpha) + \tilde{r}'(t)r\gamma(t) e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}})^2 - g_0 \frac{\partial b}{\partial r}.
 \end{aligned}$$

Зауважимо, що останнє рівняння містить функції  $\gamma(t)$ ,  $C(t)$  та  $\tilde{r}(t)$ . При цьому повинні виконуватись певні початкові умови, які залежать від характеру початкових збурень. Нехай  $\gamma(t_0) = \gamma_h(t_0)$ . Будемо вибирати функцію  $C(t)$  так, щоб функція швидкості була рівна 0. Тоді матимемо співвідношення:

$$C(t) - (\gamma'(t)\tilde{r}(t) + \tilde{r}'(t)\gamma(t))\psi'(\alpha) + \gamma'(t)\psi(\alpha) + \tilde{r}'(t)\tilde{r}(t)\gamma(t)e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}} = 0.$$

Звідси

$$C'(t) = (\gamma''(t)\tilde{r}(t) + 2\gamma'(t)\tilde{r}'(t) + \tilde{r}''(t)\gamma(t))\psi'(\alpha) - \gamma''(t)\psi(\alpha) - \tilde{r}''(t)\tilde{r}(t)\gamma(t)e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}} - \tilde{r}'^2(t)\gamma(t)e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}} - \tilde{r}'(t)\tilde{r}(t)\gamma'(t)e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}}.$$

При таких умовах рівняння (8) матиме вигляд:

$$\frac{(\tilde{r}'(t)\gamma'(t)e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}} + \tilde{r}''(t)\frac{g'(\alpha)}{\varepsilon}\gamma(t)e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}})}{(\gamma(t)e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}} + c_{gl})} = g_0 \frac{g'(\alpha)}{\varepsilon} \gamma(t)e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}} - g_0 \frac{\partial b}{\partial r}.$$

Нехай  $\tilde{r}(t) = vt$ . Тоді останнє рівняння запишеться у вигляді:

$$\frac{(v\gamma'(t)e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}} + v^2\frac{g'(\alpha)}{\varepsilon}\gamma(t)e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}})}{(\gamma(t)e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}} + c_{gl})} = g_0 \frac{g'(\alpha)}{\varepsilon} \gamma(t)e^{-\frac{g(\alpha)}{\varepsilon}} - g_0 \frac{\partial b}{\partial r}.$$

Таким чином, отримали задачу Коші для знаходження функції  $\gamma(t)$ . При кожному значенні параметра  $\alpha$  отримуватимемо інші значення відповідних функцій при певних початкових умовах.

Змінюючи параметр  $\alpha$ , покриватимемо область  $\Omega = \{(r, t) : r \in [0, +\infty), t \in [0, +\infty)\}$  кривими  $\Omega_\alpha = \{(r, t) : r = \tilde{r}(t)\}$ , де існує точний розв'язок відповідної системи рівнянь. Так отримуватимемо наближення для профілю хвилі. Очевидно, що для практики часто найбільш важливою є точка максимуму збурення, наприклад, при накочуванні цунамі на берег. Тоді опис всього профілю є не настільки важливим і ми можемо, наприклад, знаходити його лише у кількох контрольних точках, вибираючи параметр  $\alpha$ .

Зауважимо, що розглянутий вище метод фактично враховує змінний в часі профіль хвилі. При цьому швидкість рідини є нульовою. Це означає, що в процесі руху хвилі кожна точка поверхні здійснює лише вертикальні рухи. У випадку, коли на функцію швидкості накладаються інші умови, можна отримати інші класи розв'язків.

**Висновок.** Таким чином, в роботі запропоновано підхід до опису кругових, локалізованих по радіальній координаті хвиль в рамках наближення мілкої води. Отримано аналітичні часткові розв'язки системи рівнянь мілкої води. Відповідні результати мають важливе практичне значення при дослідженні локалізованих хвиль у випадках різних поверхонь дна, при розв'язанні, зокрема, задачі накочування цунамі на берег та його поширення в океані, оскільки дозволяють описати профіль та характер руху відповідної хвилі.

1. Чесноков А. А. Симметрии уравнений теории мелкой воды на вращающейся плоскости // СибЖИМ. – 2008. – Т. 11, № 3. – С. 135–146.
2. Елизарова Т. Г., Истомина М. А. Квазигазодинамический алгоритм решения уравнений мелкой воды в полярной системе координат // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2014. – № 65. – 24 с.
3. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. / Педлоски Дж. – М. : Мир, 1984. – Т. 1, 2. – 324 с.
4. Рябенко О. А. Теоретичні основи і методи розрахунків білякритичних течій рідини з вільною поверхнею : дис. ... доктора тех. наук : 05.23.16 / Рябенко Олександр Антонович. – Р., 2003. – 376 с.
5. Турбал Ю. В. О необходимых и достаточных условиях существования решений уравнений движения для анизотропных упругих тел в виде уединенных волн типа  $\delta$ -солитонов. / Турбал Ю. В. // Проблемы прикладной математики и математического моделирования. – 2012. –

Вып. 2012. – С. 78–86.

- 6 Turbal Y. The trajectories of self-reinforcing solitary wave in the gas disc of galaxies// Proceedings of the 3-rd International Conference on Nonlinear Dynamic. – Kharkov. – 2010.– P. 112–118 .
7. Рыскин Н. М. Нелинейные волны. Учеб. пособие для вузов. / Рыскин Н. М., Трубецков Д. И. – М. : Наука. Физматлит, 2000. — 272 с.

Рецензент: д.п.н., к.ф.-м.н., профессор Тадеєв П. О. (НУВГП)

**Bomba A. Y., Doctor of Engineering, Professor, Turbal Y. V., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Radoveniuk O. V., Post-graduate Student, Klap A.V., Post-graduate Student, Turbal M. Y., Senior Student (National University of Water Management and Nature Resources Use, Rivne)**

#### **METHOD FOR ANALYSIS THE SOLITARY CIRCULAR WAVES PROPAGATION IN THE APPROXIMATION OF SHALLOW WATER**

This paper proposes a method for finding the analytic representation of solutions of shallow water equations of and shows that there is no solution that simulates a transverse wave unchanging profile at the bottom of some surfaces.

**Keywords: soliton, solitary wave, shallow water.**

**Бомба А. Я., д.т.н, профессор, Турбал Ю. В., к.ф.-м.н., доцент, Радовенюк А. В., аспирант, Клап А. В., аспирант, Турбал М. Ю., студент (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)**

#### **МЕТОД АНАЛИЗА ПРОЦЕССОВ РАСПРОСТРАНЕНИЯ КРУГОВЫХ СОЛИТОНОПОДОБНЫХ ВОЛН В РАМКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ МЕЛКОЙ ВОДЫ**

В статье предложен метод для нахождения аналитического представления решений уравнений типа мелкой воды и показано, что в пределах соответствующего приближения не существует решения, которое моделирует поперечную волну неизменяющегося профиля при некоторых поверхностях дна.

**Ключевые слова: солитон, уединенная волна, мелкая вода.**