

УДК 628.315.3+519.63

Сівак В. М., к.т.н., доцент (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне), Пригорницький Д. О., к.т.н., доцент, Климюк Ю. Є., к.т.н., доцент (Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне)

ПОБУДОВА ПРОСТОРОВОГО ФІЛЬТРАЦІЙНОГО ПОЛЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ТРИШАРОВИХ ФІЛЬТРІВ ІЗ КУСКОВО-ОДНОРІДНИМИ ПОРИСТИМИ ЗАВАНТАЖЕННЯМИ

Розроблено алгоритм числової побудови просторового фільтраційного поля у тришарових фільтрах із кусково-однорідними пористими завантаженнями, що мають форму двозв'язних областей, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і двома поверхнями течії та розділених деякими заданими двома еквіпотенціальними поверхнями на три підобласті, які характеризуються різними сталими коефіцієнтами фільтрації. Наведено результати числових розрахунків.

Ключові слова: фільтраційне поле, алгоритм, фільтр, пористе завантаження.

Вступ. Одним із найбільш поширених на сьогоднішній день способів дослідження просторових процесів доочистки води шляхом фільтрування її через пористі завантаження залишається математичне моделювання. При цьому, звичайно, виникає багато труднощів із врахуванням багатозв'язності, багатозв'язності, повздовжніх і поперечних викривленостей області, в якій шукається розв'язок, складністю рівнянь у частинних похідних і граничних умов відповідних задач. У зв'язку із цим для випадків областей, обмежених еквіпотенціальними поверхнями і поверхнями течії, у рівняннях конвективної дифузії й граничних та початкових умовах доцільно перейти до нових незалежних змінних – координат області комплексного потенціалу. Завдяки цьому суттєво спрощується математичний запис задачі, а її розв'язання полягає у послідовному розв'язанні: фільтраційної задачі, яка в [1, 2] зводиться до побудови просторових аналогів конформних відображень одно- та двозв'язних областей, обмежених еквіпотенціальними поверхнями та поверхнями течії, на відповідні прямокутні паралелепіпеди (автоматично дозволяє вирішити проблему побудови розрахункової гідродинамічної сітки у фізичній області та знаходженні поля швидкості фільтрації); задачі типу “конвекція-дифузія-масообмін”, наближений розв'язок якої у випадку переважання конвективних і сорбційних процесів над дифузійними та десорбційними шукається з використанням асимптотичних методів із побудовою відповідних примежових поправок [3]. У цій роботі адаптовано алгоритм, описаний в [2], для безпосереднього застосування його до побудови просторового фільтраційного поля у тришарових фільтрах із кусково-однорідними пористими завантаженнями, що мають форму двозв'язних областей, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і двома поверхнями течії та розділених деякими двома заданими еквіпотенціальними поверхнями на три підобласті, які характеризуються різними сталими коефіцієнтами фільтрації.

Постановка задачі. Для тришарового фільтру із кусково-однорідним пористим завантаженням, що має форму двозв'язної криволінійної області G_z ($z=(x,y,z)$), обмеженої двома еквіпотенціальними гладкими поверхнями $S_* = \{z: f_*(x,y,z)=0\}$, $S^* = \{z: f^*(x,y,z)=0\}$ і двома поверхнями течії $S_{**} = \{z: f_{**}(x,y,z)=0\}$, $S^{**} = \{z: f^{**}(x,y,z)=0\}$ та розділеної деякими двома заданими еквіпотенціальними поверхнями $S_{*1}^* = \{z: f_{*1}^*(x,y,z)=0\}$, $S_{*2}^* = \{z: f_{*2}^*(x,y,z)=0\}$ на три підобласті G_z^1 , G_z^2 і G_z^3 (рис. 1), розглянемо задачу:

$$\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi, \text{ div } \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \varphi|_{S_{*1-}} = \varphi|_{S_{*1+}} = \varphi_{*1}, \quad \varphi|_{S_{*2-}} = \varphi|_{S_{*2+}} = \varphi_{*2}, \\ \kappa_1 \cdot \varphi'_n|_{S_{*1-}} = \kappa_2 \cdot \varphi'_n|_{S_{*1+}}, \quad \kappa_2 \cdot \varphi'_n|_{S_{*2-}} = \kappa_3 \cdot \varphi'_n|_{S_{*2+}}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\varphi|_{S_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{S^*} = \varphi^*, \quad \varphi'_n|_{S_{**} \cup S^{**}} = 0, \quad (3)$$

де $\varphi = \varphi(x, y, z)$ – потенціал швидкості фільтрації, $0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$, φ_{*1} і φ_{*2} – невідомі значення потенціалу на відповідних поверхнях розділу S_{*1} і S_{*2} , $\varphi_* < \varphi_{*1} < \varphi_{*2} < \varphi^*$,

$\kappa = \begin{cases} \kappa_1, (x, y, z) \in G_z^1, \\ \kappa_2, (x, y, z) \in G_z^2, \\ \kappa_3, (x, y, z) \in G_z^3 \end{cases}$ – коефіцієнт фільтрації, $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ – вектор швидкості фільтрації,

$|\vec{v}| \gg v_* > 0$, φ_* , φ^* , κ_1 , κ_2 , κ_3 , v_* – довільні дійсні додатні числа, \vec{n} – зовнішня нормаль до відповідної поверхні, (2) – умови узгодженості на еквіпотенціальних поверхнях S_{*1} , S_{*2} розділу підобластей G_z^1 , G_z^2 і G_z^3 .

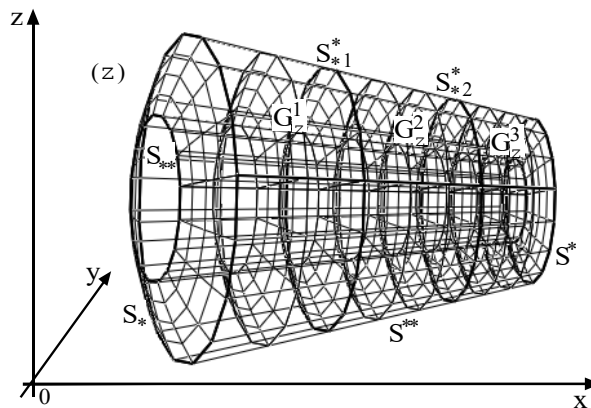


Рис. 1. Просторова тришарова кусково-однорідна область G_z (фільтр)

Шляхом фіксації на поверхні S_{**} деякої лінії течії AD та виконання умовного розрізу $\Gamma = ADD_*A_*BCC_*B_*$ вздовж відповідної поверхні течії ADD_*A_* (через ADD_*A_* та BCC_*B_* позначено відповідно верхній та нижній береги розрізу) задача (1) – (3) зводиться до розв'язування в тришаровому однозв'язному кусково-однорідному криволінійному паралелепіпеді $G_z \setminus \Gamma = ABCDA_*B_*C_*D_*$, обмеженому двома еквіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{z: f_*(x, y, z) = 0\}$, $CDD_*C_* = \{z: f^*(x, y, z) = 0\}$ та чотирма поверхнями течії $ABCD = \{z: f_{**}(x, y, z) = 0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{z: f^{**}(x, y, z) = 0\}$, $ADD_*A_* = BCC_*B_* = \{z: \hat{f}(x, y, z) = 0\}$ і розділеному деякими фіксованими еквіпотенціальними поверхнями $E_s F_s F_{*s} E_{*s} = \{z: f_{*s}^*(x, y, z) = 0\}$ ($s=1, 2$) на три підобласті $G_z^1 \setminus \Gamma^1 = ABF_1 E_1 A_* B_* F_{*1} E_{*1}$, $G_z^2 \setminus \Gamma^2 = E_1 F_1 F_2 E_2 E_{*1} F_{*1} F_{*2} E_{*2}$, $G_z^3 \setminus \Gamma^3 = E_2 F_2 C D E_{*2} F_{*2} C_* D_*$ ($\Gamma = \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \cup \Gamma^3$, $\Gamma^1 = A E_1 E_{*1} A_* B F_1 F_{*1} B_*$, $\Gamma^2 = E_1 F_1 F_2 E_2 E_{*1} F_{*1} F_{*2} E_{*2}$, $\Gamma^3 = F_2 E_2 D D_* C C_* F_{*2} E_{*2}$), які є гладкими і ортогональними між собою в кутових точках та вздовж ребер, з додаванням умов “умовної непроникності” вздовж розрізу $\tilde{\Lambda}$: $\varphi'_n|_{\Gamma} = \varphi'_n|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_*} = 0$ (рис. 2), задачі, що описується системою рівнянь (1) з наступними умовами:

$$\begin{aligned} \varphi|_{E_1 F_1 F_{*1} E_{*1-}} = \varphi|_{E_1 F_1 F_{*1} E_{*1+}} = \varphi_{*1}, \quad \varphi|_{E_2 F_2 F_{*2} E_{*2-}} = \varphi|_{E_2 F_2 F_{*2} E_{*2+}} = \varphi_{*2}, \\ \kappa_1 \cdot \varphi'_n|_{E_1 F_1 F_{*1} E_{*1-}} = \kappa_2 \cdot \varphi'_n|_{E_1 F_1 F_{*1} E_{*1+}}, \quad \kappa_2 \cdot \varphi'_n|_{E_2 F_2 F_{*2} E_{*2-}} = \kappa_3 \cdot \varphi'_n|_{E_2 F_2 F_{*2} E_{*2+}}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\varphi|_{ABB_*A_*} = \varphi^*, \varphi|_{DCC_*D_*} = \varphi^*, \quad (5)$$

$$\varphi'_n|_{ABCD \cup A_*B_*C_*D_* \cup ADD_*A_* \cup BCC_*B_*} = 0, \quad (6)$$

і подальшого “склеювання” берегів умовного розрізу \tilde{A} із використанням умов:

$$\varphi|_{ADD_*A_*} = \varphi|_{BCC_*B_*}, \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}|_{ADD_*A_*} = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}|_{BCC_*B_*}. \quad (7)$$

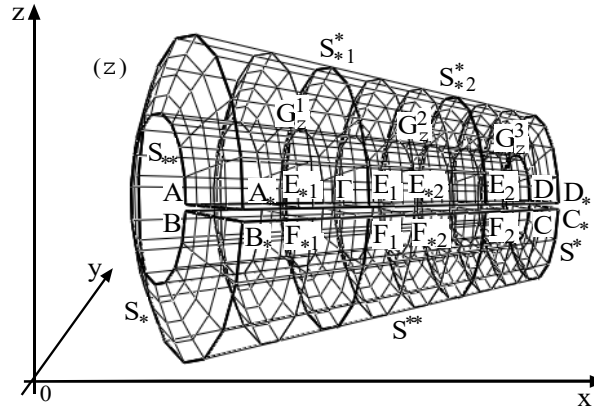


Рис. 2. Просторова тришарова кусково-однорідна область G_z із розрізом Γ

Тоді, аналогічно [2], ввівши функції $\psi = \psi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$ (просторово комплексно спряжені із функцією $\varphi = \varphi(x, y, z)$) такі, що $\kappa \cdot \text{grad } \varphi = \text{grad } \psi \times \text{grad } \eta$ [4], і замінивши крайові умови (6) на умови:

$$\psi|_{ADD_*A_*} = 0, \psi|_{BCC_*B_*} = Q_*, \eta|_{ADCB} = 0, \eta|_{A_*D_*C_*B_*} = Q^*, \quad (8)$$

задачу (1), (4), (5), (8), (7) замінимо більш загальною задачею на знаходження просторового аналогу кусково-конформного відображення однозв'язної області $G_z \setminus \tilde{A}$ на відповідну область комплексного потенціалу $G_w = G_w^1 \cup G_w^2 \cup G_w^3$ (рис. 3), де $G_w^1 = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_{*1}, 0 \leq \psi \leq Q_*, 0 \leq \eta \leq Q^*\}$, $G_w^2 = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_{*1} \leq \varphi \leq \varphi_{*2}, 0 \leq \psi \leq Q_*, 0 \leq \eta \leq Q^*\}$, $G_w^3 = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_{*2} \leq \varphi \leq \varphi^*, 0 \leq \psi \leq Q_*, 0 \leq \eta \leq Q^*\}$, φ_{*1} , φ_{*2} , Q_* , Q^* – невідомі величини, і наступного “склеювання” берегів умовного розрізу \tilde{A} . Ця задача описується системою рівнянь:

$$\begin{cases} \kappa \cdot \varphi'_x = \psi'_y \cdot \eta'_z - \psi'_z \cdot \eta'_y, \\ \kappa \cdot \varphi'_y = \psi'_z \cdot \eta'_x - \psi'_x \cdot \eta'_z, \\ \kappa \cdot \varphi'_z = \psi'_x \cdot \eta'_y - \psi'_y \cdot \eta'_x \end{cases} \quad (9)$$

з умовами узгодженості на екіпотенціальних поверхнях $E_1F_1F_{*1}E_{*1}$ і $E_2F_2F_{*2}E_{*2}$ (4), крайовими умовами (5), (8), умовами ортогональності в околах ділянок границі області G_z :

$$\begin{cases} \text{grad } f_*(x, y, z) \cdot \text{grad } \psi(x, y, z) = 0, \\ \text{grad } f_*(x, y, z) \cdot \text{grad } \eta(x, y, z) = 0, & (x, y, z) \in ABB_*A_*, \\ \text{grad } f^*(x, y, z) \cdot \text{grad } \psi(x, y, z) = 0, \\ \text{grad } f^*(x, y, z) \cdot \text{grad } \eta(x, y, z) = 0, & (x, y, z) \in CDD_*C_*, \\ \text{grad } f_{**}(x, y, z) \cdot \text{grad } \varphi(x, y, z) = 0, \\ \text{grad } f_{**}(x, y, z) \cdot \text{grad } \psi(x, y, z) = 0, & (x, y, z) \in ABCD, \\ \text{grad } f^{**}(x, y, z) \cdot \text{grad } \varphi(x, y, z) = 0, \\ \text{grad } f^{**}(x, y, z) \cdot \text{grad } \psi(x, y, z) = 0, & (x, y, z) \in A_*B_*C_*D_* \end{cases} \quad (10)$$

і умовами “склеювання” берегів умовного розрізу \tilde{A} (7).

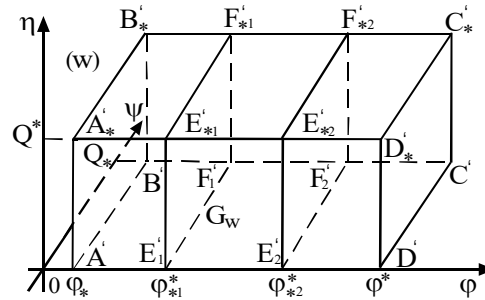


Рис. 3. Просторова область комплексного потенціалу G_w

Обернена задача на знаходження просторового аналогу кусково-конформного відображення $G_w \rightarrow G_z \setminus \Gamma$ (при невідомих значеннях параметрів φ_{*1}^* , φ_{*2}^* , Q_* , Q^*) із наступним “склеюванням” берегів умовного розрізу Γ описується системою рівнянь:

$$\begin{cases} x'_\varphi = \kappa \cdot (y'_\psi \cdot z'_\eta - z'_\psi \cdot y'_\eta), \\ y'_\varphi = \kappa \cdot (z'_\psi \cdot x'_\eta - x'_\psi \cdot z'_\eta), \\ z'_\varphi = \kappa \cdot (x'_\psi \cdot y'_\eta - y'_\psi \cdot x'_\eta) \end{cases} \quad (11)$$

з умовами узгодженості на поверхнях розділу:

$$\begin{cases} f_{*1}^*(x(\varphi_{*1}^*, \psi, \eta), y(\varphi_{*1}^*, \psi, \eta), z(\varphi_{*1}^*, \psi, \eta)) = 0, \\ f_{*2}^*(x(\varphi_{*2}^*, \psi, \eta), y(\varphi_{*2}^*, \psi, \eta), z(\varphi_{*2}^*, \psi, \eta)) = 0, \\ \kappa_1 \cdot \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*1}^*+0} \sqrt{x_\varphi'^2(\varphi_{*1}^*, \psi, \eta) + y_\varphi'^2(\varphi_{*1}^*, \psi, \eta) + z_\varphi'^2(\varphi_{*1}^*, \psi, \eta)} = \\ = \kappa_2 \cdot \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*1}^*-0} \sqrt{x_\varphi'^2(\varphi_{*1}^*, \psi, \eta) + y_\varphi'^2(\varphi_{*1}^*, \psi, \eta) + z_\varphi'^2(\varphi_{*1}^*, \psi, \eta)}, \\ \kappa_2 \cdot \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*2}^*+0} \sqrt{x_\varphi'^2(\varphi_{*2}^*, \psi, \eta) + y_\varphi'^2(\varphi_{*2}^*, \psi, \eta) + z_\varphi'^2(\varphi_{*2}^*, \psi, \eta)} = \\ = \kappa_3 \cdot \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*2}^*-0} \sqrt{x_\varphi'^2(\varphi_{*2}^*, \psi, \eta) + y_\varphi'^2(\varphi_{*2}^*, \psi, \eta) + z_\varphi'^2(\varphi_{*2}^*, \psi, \eta)} \end{cases} \quad (12)$$

та крайовими умовами із умовами “склеювання” на берегах розрізу:

$$\begin{cases} f_*(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta)) = 0, \\ f^*(x(\varphi^*, \psi, \eta), y(\varphi^*, \psi, \eta), z(\varphi^*, \psi, \eta)) = 0, \\ \hat{f}(x(\varphi, 0, \eta), y(\varphi, 0, \eta), z(\varphi, 0, \eta)) = 0, \\ \hat{f}(x(\varphi, Q_*, \eta), y(\varphi, Q_*, \eta), z(\varphi, Q_*, \eta)) = 0, \\ \lim_{\psi \rightarrow 0+0} x_\psi = \lim_{\psi \rightarrow Q_*-0} x_\psi, \quad \lim_{\psi \rightarrow 0+0} y_\psi = \\ = \lim_{\psi \rightarrow Q_*-0} y_\psi, \quad \lim_{\psi \rightarrow 0+0} z_\psi = \lim_{\psi \rightarrow Q_*-0} z_\psi, \\ f_{**}(x(\varphi, \psi, 0), y(\varphi, \psi, 0), z(\varphi, \psi, 0)) = 0, \\ f_{**}(x(\varphi, \psi, Q^*), y(\varphi, \psi, Q^*), z(\varphi, \psi, Q^*)) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

у випадку, коли функція $\hat{f}(x, y, z)$, яка визначає розріз двозв'язної області G_z , є наперед відомою, або у протилежному випадку:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_*(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta)) = 0, \\ f^*(x(\varphi^*, \psi, \eta), y(\varphi^*, \psi, \eta), z(\varphi^*, \psi, \eta)) = 0, \\ x(\varphi, 0, \eta) = x(\varphi, Q_*, \eta), y(\varphi, 0, \eta) = y(\varphi, Q_*, \eta), \\ z(\varphi, 0, \eta) = z(\varphi, Q_*, \eta), \lim_{\psi \rightarrow 0+0} x_\psi = \lim_{\psi \rightarrow Q_*-0} x_\psi, \\ \lim_{\psi \rightarrow 0+0} y_\psi = \lim_{\psi \rightarrow Q_*-0} y_\psi, \lim_{\psi \rightarrow 0+0} z_\psi = \lim_{\psi \rightarrow Q_*-0} z_\psi, \\ f_{**}(x(\varphi, \psi, 0), y(\varphi, \psi, 0), z(\varphi, \psi, 0)) = 0, \\ f_{**}(x(\varphi, \psi, Q^*), y(\varphi, \psi, Q^*), z(\varphi, \psi, Q^*)) = 0 \end{array} \right. \quad (14)$$

і умовами ортогональності в околах ділянок границі області:

$$\left\{ \begin{array}{l} f'_{*x} \cdot x'_\psi + f'_{*y} \cdot y'_\psi + f'_{*z} \cdot z'_\psi = 0, \\ f'_{*x} \cdot x'_\eta + f'_{*y} \cdot y'_\eta + f'_{*z} \cdot z'_\eta = 0, \\ f'^{*x} \cdot x'_\psi + f'^{*y} \cdot y'_\psi + f'^{*z} \cdot z'_\psi = 0, \\ f'^{*x} \cdot x'_\eta + f'^{*y} \cdot y'_\eta + f'^{*z} \cdot z'_\eta = 0, \\ f'_{**x} \cdot x'_\varphi + f'_{**y} \cdot y'_\varphi + f'_{**z} \cdot z'_\varphi = 0, \\ f'_{**x} \cdot x'_\psi + f'_{**y} \cdot y'_\psi + f'_{**z} \cdot z'_\psi = 0, \\ f'^{***x} \cdot x'_\varphi + f'^{***y} \cdot y'_\varphi + f'^{***z} \cdot z'_\varphi = 0, \\ f'^{***x} \cdot x'_\psi + f'^{***y} \cdot y'_\psi + f'^{***z} \cdot z'_\psi = 0. \end{array} \right. \quad (15)$$

Різницевий аналог задачі та алгоритм числового розв'язання. Аналогічно [2, 5] в області G_w вводимо кусково-рівномірну ортогональну сітку $G_w^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j, \eta_k)\}$:

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + \Delta\varphi_1 \cdot i, i = \overline{0, n_1}, \\ \varphi_{*1}^* + \Delta\varphi_2 \cdot (i - n_1), i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \\ \varphi_{*2}^* + \Delta\varphi_3 \cdot (i - n_1 - n_2), i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n + 1}; \end{cases} \quad \psi_j = \Delta\psi \cdot j, \quad j = \overline{0, m + 1}; \quad \eta_k = \Delta\eta \cdot k, \quad k = \overline{0, l + 1}; \quad \Delta\varphi_1 = \frac{\varphi_{*1}^* - \varphi_*}{n_1},$$

$$\Delta\varphi_2 = \frac{\varphi_{*2}^* - \varphi_{*1}^*}{n_2}, \quad \Delta\varphi_3 = \frac{\varphi^* - \varphi_{*2}^*}{n_3 + 1}, \quad \Delta\psi = \frac{Q_*}{m + 1}, \quad \Delta\eta = \frac{Q^*}{l + 1}, \quad \gamma_s = \frac{\Delta\varphi_s}{\Delta\psi \cdot \Delta\eta} \quad (s = \overline{1, 3}), \quad \left. \vphantom{\Delta\varphi_2} \right\} \text{ де } n = n_1 + n_2 + n_3, \quad m,$$

$l \in N$ – параметри розбиття області комплексного потенціалу, а $\Delta\varphi_s$ ($s = \overline{1, 3}$), $\Delta\psi$, $\Delta\eta$ – кроки сітки відповідно по змінних φ , ψ та η (рис. 3). Через $x_{i,j,k} = x(\varphi_i, \psi_j, \eta_k)$, $y_{i,j,k} = y(\varphi_i, \psi_j, \eta_k)$, $z_{i,j,k} = z(\varphi_i, \psi_j, \eta_k)$ позначимо координати відповідних вузлів сітки у G_z .

Для числової побудови просторового аналогу кусково-конформного відображення прямокутного паралелепіпеда G_w на криволінійну область $G_z \setminus \Gamma$ (при відповідності вершин) запишемо різницеві аналоги рівнянь системи (11) у рівномірній сітковій області G_w^γ через ліві та праві різницеві схеми відповідно:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i,j,k} = x_{i-1,j,k} + 0,25 \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot \left((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - \right. \\ \left. - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right), \\ y_{i,j,k} = y_{i-1,j,k} + 0,25 \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot \left((x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \right. \\ \left. - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right), \\ z_{i,j,k} = z_{i-1,j,k} + 0,25 \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot \left((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - \right. \\ \left. - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right), \\ i = \overline{1, n_1 - 1}, s = 1; i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2 - 1}, s = 2; \\ i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n}; s = 3, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}, \end{array} \right. \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i,j,k} = x_{i+1,j,k} - 0,25 \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot \left((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - \right. \\ \left. - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right), \\ y_{i,j,k} = y_{i+1,j,k} - 0,25 \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot \left((x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \right. \\ \left. - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right), \\ z_{i,j,k} = z_{i+1,j,k} - 0,25 \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot \left((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - \right. \\ \left. - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right), \\ i = \overline{1, n_1 - 1}, s = 1; i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2 - 1}, s = 2; \\ i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n}, s = 3; j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}. \end{array} \right. \quad (17)$$

Координати вузлів на еквіпотенціальних поверхнях $E_s F_s F_{*s} E_{*s}$ ($s = 1, 2$) уточнюємо, використовуючи наступні різницеві рівняння:

$$f_{*1} (x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k}) = 0, \quad j = \overline{0, m+1}, k = \overline{0, l+1}, \quad (18)$$

$$f_{*2} (x_{n_1+n_2,j,k}, y_{n_1+n_2,j,k}, z_{n_1+n_2,j,k}) = 0, \quad j = \overline{0, m+1}, k = \overline{0, l+1}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \kappa_1 \cdot \Delta \varphi_2 \cdot \sqrt{(x_{n_1+1,j,k} - x_{n_1,j,k})^2 + (y_{n_1+1,j,k} - y_{n_1,j,k})^2 + (z_{n_1+1,j,k} - z_{n_1,j,k})^2} = \\ & = \kappa_2 \cdot \Delta \varphi_1 \cdot \sqrt{(x_{n_1,j,k} - x_{n_1-1,j,k})^2 + (y_{n_1,j,k} - y_{n_1-1,j,k})^2 + (z_{n_1,j,k} - z_{n_1-1,j,k})^2}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \kappa_2 \cdot \Delta \varphi_3 \cdot \sqrt{(x_{r+1,j,k} - x_{r,j,k})^2 + (y_{r+1,j,k} - y_{r,j,k})^2 + (z_{r+1,j,k} - z_{r,j,k})^2} = \\ & = \kappa_3 \cdot \Delta \varphi_2 \cdot \sqrt{(x_{r,j,k} - x_{r-1,j,k})^2 + (y_{r,j,k} - y_{r-1,j,k})^2 + (z_{r,j,k} - z_{r-1,j,k})^2}, r = n_1 + n_2 + 1 \end{aligned} \quad (21)$$

та $f_{*1x}^* (x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k}) \cdot (x_{n_1,j,k} - x_{n_1,j-1,k}) + f_{*1y}^* (x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k}) \times$
 $\times (y_{n_1,j,k} - y_{n_1,j-1,k}) + f_{*1z}^* (x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k}) \cdot (z_{n_1,j,k} - z_{n_1,j-1,k}) = 0,$
 $f_{*1x}^* (x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k}) \cdot (x_{n_1,j,k} - x_{n_1,j,k-1}) + f_{*1y}^* (x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k}) \cdot (y_{n_1,j,k} -$
 $- y_{n_1,j,k-1}) + f_{*1z}^* (x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k}) \cdot (z_{n_1,j,k} - z_{n_1,j,k-1}) = 0, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}$ (22)

$$\begin{aligned} & f_{*2x}^* (x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k}) \cdot (x_{r,j,k} - x_{r,j-1,k}) + f_{*2y}^* (x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k}) \times \\ & \times (y_{r,j,k} - y_{r,j-1,k}) + f_{*2z}^* (x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k}) \cdot (z_{r,j,k} - z_{r,j-1,k}) = 0, \\ & f_{*2x}^* (x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k}) \cdot (x_{r,j,k} - x_{r,j,k-1}) + f_{*2y}^* (x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k}) \times \\ & \times (y_{r,j,k} - y_{r,j,k-1}) + f_{*2z}^* (x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k}) \cdot (z_{r,j,k} - z_{r,j,k-1}) = 0, \\ & r = n_1 + n_2 + 1, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
 & i \quad f_{*1x}'(x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k}) \cdot (x_{n_1,j+1,k} - x_{n_1,j,k}) + f_{*1y}'(x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k}) \times \\
 & \quad \times (y_{n_1,j+1,k} - y_{n_1,j,k}) + f_{*1z}'(x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k}) \cdot (z_{n_1,j+1,k} - z_{n_1,j,k}) = 0, \\
 & f_{*1x}'(x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k}) \cdot (x_{n_1,j,k+1} - x_{n_1,j,k}) + f_{*1y}'(x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k}) \cdot (y_{n_1,j,k+1} - \\
 & \quad - y_{n_1,j,k}) + f_{*1z}'(x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k}) \cdot (z_{n_1,j,k+1} - z_{n_1,j,k}) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l}
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
 & f_{*2x}'(x_{r,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k}) \cdot (x_{r,j+1,k} - x_{r,j,k}) + f_{*2y}'(x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k}) \times \\
 & \quad \times (y_{r,j+1,k} - y_{r,j,k}) + f_{*2z}'(x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k}) \cdot (z_{r,j+1,k} - z_{r,j,k}) = 0, \\
 & f_{*2x}'(x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k}) \cdot (x_{r,j,k+1} - x_{r,j,k}) + f_{*2y}'(x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k}) \times \\
 & \quad \times (y_{r,j,k+1} - y_{r,j,k}) + f_{*2z}'(x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k}) \cdot (z_{r,j,k+1} - z_{r,j,k}) = 0, \\
 & \quad \quad \quad r = n_1 + n_2 + 1, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l}
 \end{aligned} \tag{25}$$

або

$$\begin{aligned}
 & \frac{f_{*1x}'(x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k})}{x_{n_1,j,k} - x_{n_1-1,j,k}} = \frac{f_{*1y}'(x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k})}{y_{n_1,j,k} - y_{n_1-1,j,k}} = \\
 & \quad = \frac{f_{*1z}'(x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k})}{z_{n_1,j,k} - z_{n_1-1,j,k}}, \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1},
 \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{f_{*2x}'(x_{n_1+n_2,j,k}, y_{n_1+n_2,j,k}, z_{n_1+n_2,j,k})}{x_{n_1+n_2,j,k} - x_{n_1+n_2-1,j,k}} = \frac{f_{*2y}'(x_{n_1+n_2,j,k}, y_{n_1+n_2,j,k}, z_{n_1+n_2,j,k})}{y_{n_1+n_2,j,k} - y_{n_1+n_2-1,j,k}} = \\
 & \quad = \frac{f_{*2z}'(x_{n_1+n_2,j,k}, y_{n_1+n_2,j,k}, z_{n_1+n_2,j,k})}{z_{n_1+n_2,j,k} - z_{n_1+n_2-1,j,k}}, \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1}
 \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
 & i \quad \frac{f_{*1x}'(x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k})}{x_{n_1,j,k} - x_{n_1+1,j,k}} = \frac{f_{*1y}'(x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k})}{y_{n_1,j,k} - y_{n_1+1,j,k}} = \\
 & \quad = \frac{f_{*1z}'(x_{n_1,j,k}, y_{n_1,j,k}, z_{n_1,j,k})}{z_{n_1,j,k} - z_{n_1+1,j,k}}, \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1},
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{f_{*2x}'(x_{n_1+n_2,j,k}, y_{n_1+n_2,j,k}, z_{n_1+n_2,j,k})}{x_{n_1+n_2,j,k} - x_{n_1+n_2+1,j,k}} = \frac{f_{*2y}'(x_{n_1+n_2,j,k}, y_{n_1+n_2,j,k}, z_{n_1+n_2,j,k})}{y_{n_1+n_2,j,k} - y_{n_1+n_2+1,j,k}} = \\
 & \quad = \frac{f_{*2z}'(x_{n_1+n_2,j,k}, y_{n_1+n_2,j,k}, z_{n_1+n_2,j,k})}{z_{n_1+n_2,j,k} - z_{n_1+n_2+1,j,k}}, \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1}.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Умови (13) і (14) апроксимуємо рівняннями:

$$\begin{cases}
 f^*(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) = 0, \quad f^*(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) = 0, \\
 f^{**}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) = 0, \quad f^{***}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) = 0, \\
 \widehat{f}(x_{i,0,k}, y_{i,0,k}, z_{i,0,k}) = 0, \quad \widehat{f}(x_{i,m+1,k}, y_{i,m+1,k}, z_{i,m+1,k}) = 0, \\
 x_{i,1,k} - x_{i,0,k} = x_{i,m+1,k} - x_{i,m,k}, \quad y_{i,1,k} - y_{i,0,k} = y_{i,m+1,k} - y_{i,m,k}, \\
 z_{i,1,k} - z_{i,0,k} = z_{i,m+1,k} - z_{i,m,k}, \quad i = \overline{0, n+1}, \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1},
 \end{cases} \tag{30}$$

$$\begin{cases}
 f_*(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) = 0, \quad f^*(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) = 0, \\
 f_{**}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) = 0, \quad f^{***}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) = 0, \\
 x_{i,0,k} = x_{i,m+1,k}, \quad y_{i,0,k} = y_{i,m+1,k}, \quad z_{i,0,k} = z_{i,m+1,k}, \\
 x_{i,1,k} - x_{i,0,k} = x_{i,m+1,k} - x_{i,m,k}, \quad y_{i,1,k} - y_{i,0,k} = y_{i,m+1,k} - y_{i,m,k}, \\
 z_{i,1,k} - z_{i,0,k} = z_{i,m+1,k} - z_{i,m,k}, \quad i = \overline{0, n+1}, \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1},
 \end{cases} \tag{31}$$

а умови (15), що забезпечують ортогональність сітки біля ділянок границі фізичної області, у сітковій області G_w^y записуються такими числово-аналітичними різницевиими рівняннями:

$$\begin{aligned}
 & f'_{*x}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) \cdot (x_{0,j+1,k} - x_{0,j,k}) + f'_{*y}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) \times \\
 & \times (y_{0,j+1,k} - y_{0,j,k}) + f'_{*z}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) \cdot (z_{0,j+1,k} - z_{0,j,k}) = 0, \\
 & f'_{*x}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) \cdot (x_{0,j,k+1} - x_{0,j,k}) + f'_{*y}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) \times \\
 & \times (y_{0,j,k+1} - y_{0,j,k}) + f'_{*z}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) \cdot (z_{0,j,k+1} - z_{0,j,k}) = 0, \\
 & f_x^{r*}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) \cdot (x_{n+1,j+1,k} - x_{n+1,j,k}) + f_y^{r*}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) \times \\
 & \times (y_{n+1,j+1,k} - y_{n+1,j,k}) + f_z^{r*}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) \cdot (z_{n+1,j+1,k} - z_{n+1,j,k}) = 0, \\
 & f_x^{r*}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) \cdot (x_{n+1,j,k+1} - x_{n+1,j,k}) + f_y^{r*}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) \times \\
 & \times (y_{n+1,j,k+1} - y_{n+1,j,k}) + f_z^{r*}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) \cdot (z_{n+1,j,k+1} - z_{n+1,j,k}) = 0, \\
 & f'_{**x}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) \cdot (x_{i,j+1,0} - x_{i,j,0}) + f'_{**y}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) \times \\
 & \times (y_{i,j+1,0} - y_{i,j,0}) + f'_{**z}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) \cdot (z_{i,j+1,0} - z_{i,j,0}) = 0, \\
 & f'_{**x}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) \cdot (x_{i+1,j,0} - x_{i,j,0}) + f'_{**y}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) \times \\
 & \times (y_{i+1,j,0} - y_{i,j,0}) + f'_{**z}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) \cdot (z_{i+1,j,0} - z_{i,j,0}) = 0, \\
 & f_x^{l***}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) \cdot (x_{i,j+1,l+1} - x_{i,j,l+1}) + f_y^{l***}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) \times \\
 & \times (y_{i,j+1,l+1} - y_{i,j,l+1}) + f_z^{l***}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) \cdot (z_{i,j+1,l+1} - z_{i,j,l+1}) = 0, \\
 & f_x^{l***}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) \cdot (x_{i+1,j,l+1} - x_{i,j,l+1}) + f_y^{l***}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) \times \\
 & \times (y_{i+1,j,l+1} - y_{i,j,l+1}) + f_z^{l***}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) \cdot (z_{i+1,j,l+1} - z_{i,j,l+1}) = 0, \\
 & i = \overline{0, n+1}, \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1},
 \end{aligned} \tag{32}$$

хоча в більшості випадків їх зручно замінити наступними:

$$\begin{aligned}
 & \frac{f'_{*x}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{x_{1,j,k} - x_{0,j,k}} = \frac{f'_{*y}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{y_{1,j,k} - y_{0,j,k}} = \frac{f'_{*z}(x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{z_{1,j,k} - z_{0,j,k}}, \\
 & \frac{f_x^{r*}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})}{x_{n,j,k} - x_{n+1,j,k}} = \frac{f_y^{r*}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})}{y_{n,j,k} - y_{n+1,j,k}} = \frac{f_z^{r*}(x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})}{z_{n,j,k} - z_{n+1,j,k}}, \\
 & \frac{f'_{**x}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0})}{x_{i,j,1} - x_{i,j,0}} = \frac{f'_{**y}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0})}{y_{i,j,1} - y_{i,j,0}} = \frac{f'_{**z}(x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0})}{z_{i,j,1} - z_{i,j,0}}, \\
 & \frac{f_x^{l***}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1})}{x_{i,j,l} - x_{i,j,l+1}} = \frac{f_y^{l***}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1})}{y_{i,j,l} - y_{i,j,l+1}} = \frac{f_z^{l***}(x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1})}{z_{i,j,l} - z_{i,j,l+1}}, \\
 & i = \overline{0, n+1}, \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1}.
 \end{aligned} \tag{33}$$

Інваріанти відображення γ_s ($s = \overline{1,3}$) є невідомими величинами і визначаються в процесі розрахунку. Формули для їх наближеного знаходження одержимо аналогічно [5] на підставі умови “подібності в малому” відповідних елементарних паралелепіпедів областей $G_z \setminus \Gamma$ і G_w :

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= \frac{\kappa_1}{n_1(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n_1-1,m,l} \gamma_{i,j,k}, \quad \gamma_2 = \frac{\kappa_2}{n_2(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n_2-1,m,l} \gamma_{n_1+i,j,k}, \\
 \gamma_3 &= \frac{\kappa_3}{(n_3+1)(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n_3,m,l} \gamma_{n_1+n_2+i,j,k},
 \end{aligned} \tag{34}$$

де $\gamma_{i,j,k} = 4 \left(\sqrt{(x_{i+1,j,k} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i+1,j,k} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i+1,j,k} - z_{i,j,k})^2} + \right.$

$$\begin{aligned}
 & +\sqrt{(x_{i+1,j+1,k}-x_{i,j+1,k})^2+(y_{i+1,j+1,k}-y_{i,j+1,k})^2+(z_{i+1,j+1,k}-z_{i,j+1,k})^2}+ \\
 & +\sqrt{(x_{i+1,j,k+1}-x_{i,j,k+1})^2+(y_{i+1,j,k+1}-y_{i,j,k+1})^2+(z_{i+1,j,k+1}-z_{i,j,k+1})^2}+ \\
 & +\sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1}-x_{i,j+1,k+1})^2+(y_{i+1,j+1,k+1}-y_{i,j+1,k+1})^2+(z_{i+1,j+1,k+1}-z_{i,j+1,k+1})^2} \Big) / \\
 & \quad / \left(\left(\sqrt{(x_{i,j+1,k}-x_{i,j,k})^2+(y_{i,j+1,k}-y_{i,j,k})^2+(z_{i,j+1,k}-z_{i,j,k})^2}+ \right. \right. \\
 & +\sqrt{(x_{i+1,j+1,k}-x_{i+1,j,k})^2+(y_{i+1,j+1,k}-y_{i+1,j,k})^2+(z_{i+1,j+1,k}-z_{i+1,j,k})^2}+ \\
 & +\sqrt{(x_{i,j+1,k+1}-x_{i,j,k+1})^2+(y_{i,j+1,k+1}-y_{i,j,k+1})^2+(z_{i,j+1,k+1}-z_{i,j,k+1})^2}+ \\
 & \left. \left. +\sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1}-x_{i+1,j,k+1})^2+(y_{i+1,j+1,k+1}-y_{i+1,j,k+1})^2+(z_{i+1,j+1,k+1}-z_{i+1,j,k+1})^2} \right) \times \right. \\
 & \quad \times \left(\sqrt{(x_{i,j,k+1}-x_{i,j,k})^2+(y_{i,j,k+1}-y_{i,j,k})^2+(z_{i,j,k+1}-z_{i,j,k})^2}+ \right. \\
 & +\sqrt{(x_{i+1,j,k+1}-x_{i+1,j,k})^2+(y_{i+1,j,k+1}-y_{i+1,j,k})^2+(z_{i+1,j,k+1}-z_{i+1,j,k})^2}+ \\
 & +\sqrt{(x_{i,j+1,k+1}-x_{i,j+1,k})^2+(y_{i,j+1,k+1}-y_{i,j+1,k})^2+(z_{i,j+1,k+1}-z_{i,j+1,k})^2}+ \\
 & \left. \left. +\sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1}-x_{i+1,j+1,k})^2+(y_{i+1,j+1,k+1}-y_{i+1,j+1,k})^2+(z_{i+1,j+1,k+1}-z_{i+1,j+1,k})^2} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Невідомі величини φ_{*s}^* ($s = 1, 2$) знаходимо, як і в [5], за формулами:

$$\varphi_{*1}^* = \frac{n_1 \cdot \gamma_1 \cdot \varphi^* + (n_2 \cdot \gamma_2 + (n_3 + 1) \cdot \gamma_3) \cdot \varphi_s}{n_1 \cdot \gamma_1 + n_2 \cdot \gamma_2 + (n_3 + 1) \cdot \gamma_3}, \quad (35)$$

$$\varphi_{*2}^* = \frac{(n_1 \cdot \gamma_1 + n_2 \cdot \gamma_2) \cdot \varphi^* + (n_3 + 1) \cdot \gamma_3 \cdot \varphi_s}{n_1 \cdot \gamma_1 + n_2 \cdot \gamma_2 + (n_3 + 1) \cdot \gamma_3}, \quad (36)$$

витрату Q за однією з формул:

$$Q = \Delta\varphi_s \cdot \frac{(m+1)(l+1)}{\gamma_s} \quad (s = \overline{1,3}), \quad (37)$$

а величини Q_*, Q^* відповідно за формулами:

$$Q_* = \sqrt{\frac{Q \cdot (m+1)}{\tilde{\gamma} \cdot (l+1)}}, \quad Q^* = \sqrt{\frac{\tilde{\gamma} \cdot Q \cdot (l+1)}{m+1}}, \quad (38)$$

де

$$\begin{aligned}
 \tilde{\gamma} &= \frac{1}{(n+1)(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n,m,l} \tilde{\gamma}_{i,j,k}, \\
 \tilde{\gamma}_{i,j,k} &= \left(\sqrt{(x_{i,j,k+1}-x_{i,j,k})^2+(y_{i,j,k+1}-y_{i,j,k})^2+(z_{i,j,k+1}-z_{i,j,k})^2}+ \right. \\
 & +\sqrt{(x_{i+1,j,k+1}-x_{i+1,j,k})^2+(y_{i+1,j,k+1}-y_{i+1,j,k})^2+(z_{i+1,j,k+1}-z_{i+1,j,k})^2}+ \\
 & +\sqrt{(x_{i,j+1,k+1}-x_{i,j+1,k})^2+(y_{i,j+1,k+1}-y_{i,j+1,k})^2+(z_{i,j+1,k+1}-z_{i,j+1,k})^2}+ \\
 & \left. +\sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1}-x_{i+1,j+1,k})^2+(y_{i+1,j+1,k+1}-y_{i+1,j+1,k})^2+(z_{i+1,j+1,k+1}-z_{i+1,j+1,k})^2} \right) / \\
 & \quad / \left(\sqrt{(x_{i,j+1,k}-x_{i,j,k})^2+(y_{i,j+1,k}-y_{i,j,k})^2+(z_{i,j+1,k}-z_{i,j,k})^2}+ \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sqrt{\left(x_{i+1,j+1,k} - x_{i+1,j,k}\right)^2 + \left(y_{i+1,j+1,k} - y_{i+1,j,k}\right)^2 + \left(z_{i+1,j+1,k} - z_{i+1,j,k}\right)^2} + \\
 & + \sqrt{\left(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j,k+1}\right)^2 + \left(y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j,k+1}\right)^2 + \left(z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j,k+1}\right)^2} + \\
 & + \sqrt{\left(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j,k+1}\right)^2 + \left(y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j,k+1}\right)^2 + \left(z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j,k+1}\right)^2}.
 \end{aligned}$$

Розв'язок різницевої задачі (16) – (34) знаходимо шляхом поетапної параметризації величин γ_s ($s = \overline{1,3}$), координат граничних та внутрішніх вузлів відповідної сітки у вихідній області G_z^γ . А саме, задавши параметри розбиття сіткової області G_w^γ (n_1, n_2, n_3, m та l), параметр ε , що характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі, початкові наближення координат граничних вузлів $\left(x_{0,j,k}^{(0)}, y_{0,j,k}^{(0)}, z_{0,j,k}^{(0)}\right)$, $\left(x_{n+1,j,k}^{(0)}, y_{n+1,j,k}^{(0)}, z_{n+1,j,k}^{(0)}\right)$, $j = \overline{0, m+1}$, $k = \overline{0, l+1}$, $\left(x_{i,0,k}^{(0)}, y_{i,0,k}^{(0)}, z_{i,0,k}^{(0)}\right)$, $\left(x_{i,m+1,k}^{(0)}, y_{i,m+1,k}^{(0)}, z_{i,m+1,k}^{(0)}\right)$, $i = \overline{1, n_1-1}$, $k = \overline{0, l+1}$, $\left(x_{n_1+i,0,k}^{(0)}, y_{n_1+i,0,k}^{(0)}, z_{n_1+i,0,k}^{(0)}\right)$, $\left(x_{n_1+i,m+1,k}^{(0)}, y_{n_1+i,m+1,k}^{(0)}, z_{n_1+i,m+1,k}^{(0)}\right)$, $i = \overline{1, n_2-1}$, $k = \overline{0, l+1}$, $\left(x_{n_1+n_2+i,0,k}^{(0)}, y_{n_1+n_2+i,0,k}^{(0)}, z_{n_1+n_2+i,0,k}^{(0)}\right)$, $\left(x_{n_1+n_2+i,m+1,k}^{(0)}, y_{n_1+n_2+i,m+1,k}^{(0)}, z_{n_1+n_2+i,m+1,k}^{(0)}\right)$, $i = \overline{1, n_3}$, $k = \overline{0, l+1}$, $\left(x_{i,j,0}^{(0)}, y_{i,j,0}^{(0)}, z_{i,j,0}^{(0)}\right)$, $\left(x_{i,j,l+1}^{(0)}, y_{i,j,l+1}^{(0)}, z_{i,j,l+1}^{(0)}\right)$, $i = \overline{1, n_1-1}$, $j = \overline{1, m}$, $\left(x_{n_1+i,j,0}^{(0)}, y_{n_1+i,j,0}^{(0)}, z_{n_1+i,j,0}^{(0)}\right)$, $\left(x_{n_1+i,j,l+1}^{(0)}, y_{n_1+i,j,l+1}^{(0)}, z_{n_1+i,j,l+1}^{(0)}\right)$, $i = \overline{1, n_2-1}$, $j = \overline{1, m}$, $\left(x_{n_1+n_2+i,j,0}^{(0)}, y_{n_1+n_2+i,j,0}^{(0)}, z_{n_1+n_2+i,j,0}^{(0)}\right)$, $\left(x_{n_1+n_2+i,j,l+1}^{(0)}, y_{n_1+n_2+i,j,l+1}^{(0)}, z_{n_1+n_2+i,j,l+1}^{(0)}\right)$, $i = \overline{1, n_3}$, $j = \overline{1, m}$ і вузлів поверхонь розділу $\left(x_{n_1,j,k}^{(0)}, y_{n_1,j,k}^{(0)}, z_{n_1,j,k}^{(0)}\right)$, $\left(x_{n_1+n_2,j,k}^{(0)}, y_{n_1+n_2,j,k}^{(0)}, z_{n_1+n_2,j,k}^{(0)}\right)$, $j = \overline{0, m+1}$, $k = \overline{0, l+1}$ (так, щоб виконувались рівності (18), (19) та (26) або (27) відповідно), початкові наближення координат внутрішніх вузлів трьох підобластей $\left(x_{i,j,k}^{(0)}, y_{i,j,k}^{(0)}, z_{i,j,k}^{(0)}\right)$, $i = \overline{1, n_1-1}$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, l}$, $\left(x_{n_1+i,j,k}^{(0)}, y_{n_1+i,j,k}^{(0)}, z_{n_1+i,j,k}^{(0)}\right)$, $i = \overline{1, n_2-1}$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, l}$ і $\left(x_{n_1+n_2+i,j,k}^{(0)}, y_{n_1+n_2+i,j,k}^{(0)}, z_{n_1+n_2+i,j,k}^{(0)}\right)$, $i = \overline{1, n_3}$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, l}$, за формулами (34) знаходимо початкові наближення $\gamma_s^{(0)} = \gamma_s \left(x_{i,j,k}^{(0)}, y_{i,j,k}^{(0)}, z_{i,j,k}^{(0)}\right)$ інваріантів відображення γ_s ($s = \overline{1,3}$). Уточнення координат внутрішніх вузлів трьох підобластей $\left(x_{i,j,k}^{(g)}, y_{i,j,k}^{(g)}, z_{i,j,k}^{(g)}\right)$, $i = \overline{1, n_1-1}$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, l}$, $\left(x_{n_1+i,j,k}^{(g)}, y_{n_1+i,j,k}^{(g)}, z_{n_1+i,j,k}^{(g)}\right)$, $i = \overline{1, n_2-1}$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, l}$ і $\left(x_{n_1+n_2+i,j,k}^{(g)}, y_{n_1+n_2+i,j,k}^{(g)}, z_{n_1+n_2+i,j,k}^{(g)}\right)$, $i = \overline{1, n_3}$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, l}$ проводимо на основі почергового розв'язання систем (16) і (17) із використанням значень з попереднього кроку ітерації g ($g = 0, 1, \dots$ – номер кроку ітерації). Далі підправляємо координати вузлів поверхонь розділу на основі рівнянь (18) – (21) та почергового використання (22), (23) і (24), (25) або (26), (27) і (28), (29), координати граничних вузлів, розв'язуючи наближено систему рівнянь, сформовану з (30) або (31) і (32) або (33). Потім знаходимо нові наближення γ_s ($s = \overline{1,3}$) за формулами (34), величин φ_{*s}^* ($s = 1, 2$), Q , Q_* і Q^* – за формулами (35) – (38) та перевіряємо виконання умов стабілізації координат вузлів сітки і величин φ_{*s}^* ($s = 1, 2$), Q відносно кроку ітерації відповідно:

$$\begin{aligned}
 & \max_{x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k} \in \partial G_z} \left(\left| x_{i,j,k}^{(g+1)} - x_{i,j,k}^{(g)} \right|, \left| y_{i,j,k}^{(g+1)} - y_{i,j,k}^{(g)} \right|, \right. \\
 & \left. \left| z_{i,j,k}^{(g+1)} - z_{i,j,k}^{(g)} \right| \right) < \varepsilon, \quad \left| \varphi_{*1}^{(g+1)} - \varphi_{*1}^{(g)} \right| < \varepsilon, \quad \left| \varphi_{*2}^{(g+1)} - \varphi_{*2}^{(g)} \right| < \varepsilon, \\
 & \left| Q^{(g+1)} - Q^{(g)} \right| < \varepsilon.
 \end{aligned} \tag{39}$$

Якщо умови (39) не виконуються, то повертаємося до уточнення координат внутрішніх вузлів сітки і т.д. У протилежному випадку для отриманих вузлів гідродинамічної сітки обчислюємо нев'язку рівнянь системи (9) $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}$, де

$$\delta_1 = \max_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq n_1 \\ i \neq n_1+n_2}}^{n,m,l} \left((x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}) - 0,5 \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})) \Bigg), \delta_2 = \max_{\substack{n,m,l \\ i,j,k=1 \\ i \neq n_1 \\ i \neq n_1 + n_2}} \left((y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}) - \right. \\ & \left. - 0,5 \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k})(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right) \Bigg), \delta_3 = \\ & = \max_{\substack{n,m,l \\ i,j,k=1 \\ i \neq n_1 \\ i \neq n_1 + n_2}} \left((z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) - 0,5 \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \times \right. \\ & \left. \times (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) \right) \Bigg), \quad s = \begin{cases} 1, i = \overline{1, n_1 - 1}, \\ 2, i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2 - 1}, \\ 3, i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n}. \end{cases} \end{aligned}$$

задовольняє, то збільшуємо кількість вузлів розбиття сітки G_z^y та розв'язуємо задачу заново.

Для одержаних координат вузлів розрахункової гідродинамічної сітки на основі рівняння руху (1) величини швидкості у внутрішніх вузлах сітки G_z^y знаходимо за

формулами: $v_{i,j,k} = \sqrt{v_{x_{i,j,k}}^2 + v_{y_{i,j,k}}^2 + v_{z_{i,j,k}}^2}$, $i = \overline{1, n_1 - 1}$, $s = 1$; $i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2 - 1}$, $s = 2$; $i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n}$, $s = 3$; $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, l}$, $v_{x_{i,j,k}} =$

$$= 2 \frac{\kappa_s \cdot \Delta \Phi}{J_{i,j,k}} \left((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right),$$

$$v_{y_{i,j,k}} = 2 \frac{\kappa_s \cdot \Delta \Phi}{J_{i,j,k}} \left((x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right),$$

$$v_{z_{i,j,k}} = 2 \frac{\kappa_s \cdot \Delta \Phi}{J_{i,j,k}} \left((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) \times \right.$$

$$\left. \times (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right), \quad J_{i,j,k} = (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) +$$

$$+ (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) + (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} -$$

$$- y_{i,j,k-1})(z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})(y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) -$$

$$- (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})(z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i+1,j,k} -$$

$- y_{i-1,j,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1})$. Формули для знаходження величин швидкостей у граничних вузлах і на поверхнях розділу отримуються аналогічно [1].

Програмна реалізація алгоритму та числові приклади. Вище описаний алгоритм реалізований у вигляді програми, яка дозволяє отримувати як числові результати роботи, так і їх візуальне представлення у вигляді графіків, рисунків тощо. З метою перевірки коректної роботи алгоритму проведено числовий експеримент на побудову просторового фільтраційного поля для тришарового фільтру із кусково-однорідним завантаженням, форму якого описано поверхнями: $f_*(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$, $f^*(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $f_{**}(x, y, z) = 32,1632 \cdot x^2 - y^2 - z^2$, $f^{**}(x, y, z) = 7,5487 \cdot x^2 - y^2 - z^2$, а межі розділу шарів – поверхнями: $f_{*1}^*(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2,25$, $f_{*2}^*(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - -1,44$. У результаті побудовано розрахункову гідродинамічну сітку (рис. 4) при $n_1 = 11$, $n_2 = 11$, $n_3 = 10$ ($n = 32$), $m = 16$, $l = 12$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 4891$, $\kappa_1 = 5,6$ м/добу, $\kappa_2 = 8,4$ м/добу, $\kappa_3 = 9,8$ м/добу, ефективних пористостях завантажень $\sigma_1 = 0,45$, $\sigma_2 = 0,35$ і $\sigma_3 = 0,25$ (параметри n_1 , n_2 , n_3 , m і l вибирали з умови найбільшої подібності побудованої сітки до кубічної). При цьому знайдено фільтраційну витрату $Q = 0,325$ м³/год, потенціали на поверхнях розділу $\varphi_{*1}^* = 2054,06$, $\varphi_{*2}^* = 3814,8$, обчислено величини швидкості фільтрації (рис. 5), що відповідають величині середньої швидкості руху води через кусково-однорідне завантаження тришарового фільтру 10 м/год. Нев'язка δ числових розрахунків становить 0,0003.

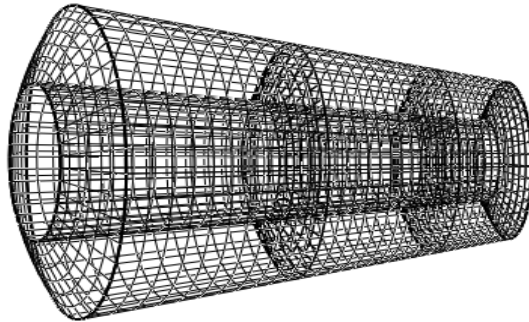


Рис. 4. Розрахункова гідродинамічна сітка для тришарового фільтру із кусково-однорідним завантаженням

Висновки і зауваження. Побудовано алгоритм числового розв'язання просторових аналогів обернених крайових задач на кусково-конформні відображення тришарових кусково-однорідних двозв'язних областей, які обмежені двома екіпотенціальними поверхнями і двома поверхнями течії та розділені деякими заданими двома екіпотенціальними поверхнями на три підобласті, що характеризуються сталими коефіцієнтами фільтрації, на відповідні прямокутні паралелепіеди, зокрема, отримано вирази для знаходження значень фільтраційного потенціалу на відповідних поверхнях розділу, повної фільтраційної витрати, розрахунку поля швидкостей тощо.

Результати числового експерименту свідчать про ефективність запропонованого підходу до побудови просторових фільтраційних полів у тришарових фільтрах із кусково-однорідними пористими завантаженнями і, по аналогії з [1, 2], дають змогу провести теоретичні дослідження стосовно підвищення ефективності їх роботи, зокрема, більш раціонального використання сорбційної ємкості і збільшення терміну фільтроциклу [3].

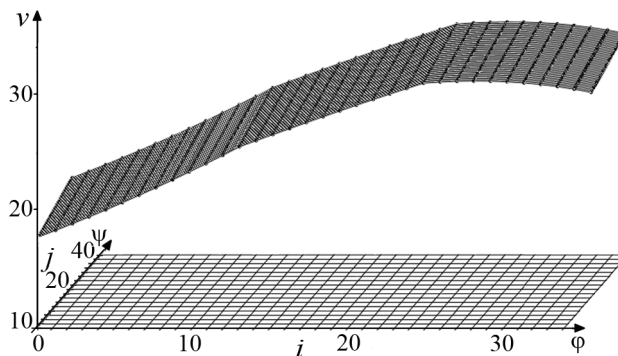


Рис. 5. Розподіл величин швидкості фільтрації вздовж поверхні течії $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}_4$ для тришарового фільтру із кусково-однорідним завантаженням

1. Климюк Ю. Є. Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення криволінійних паралелепіедів на прямокутні / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 5 (14). – Рівне : РДГУ, 2008. – С. 104–143.
2. Климюк Ю. Є. Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення двозв'язних областей із розрізом на прямокутні паралелепіеди / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 6 (15). – Рівне : РДГУ, 2009. – С. 59–71.
3. Климюк Ю. Є. Моделювання процесу доочистки води від залишкових катіонів алюмінію фільтруванням через аніоноактивні завантаження із врахуванням зміни фільтраційних властивостей середовища / Ю. Є. Климюк, В. М. Сівак // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 7 (16). – Рівне : РДГУ, 2010. – С. 93–109.

4. Рауз Х. Механика жидкости / Х. Рауз. – М. : Стройиздат, 1967. – 390 с.

5. Сівак В. М. Побудова просторового фільтраційного поля для одного класу фільтрів із тришаровою засипкою / В. М. Сівак, Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Вісник Укр. нац. ун-ту водн. госп. та природокорист.: Збірн. наук. праць. Серія "Технічні науки". – Вип. 4 (56). – Рівне : НУВГП, 2011. – С. 70–82.

Рецензент: д.т.н., професор Хлапук М. М. (НУВГП)

Sivak V. M., Candidate of Engineering, Associate Professor (National University Water Management and Nature Resources Use, Rivne), Pryhornytskyi D. O., Candidate of Engineering, Associate Professor, Klymiuk Y. Y., Candidate of Engineering, Associate Professor (Rivne State Humanitarian University)

CONSTRUCTION OF SPATIAL FILTRATION FIELD FOR ONE CLASS OF THREE-LAYER FILTER WITH PIECEWISE-HOMOGENEOUS POROUS OF LOADING

The algorithm for numerical construction of spatial filtration fields in three-layer filters with a piecewise-homogeneous porous loadings, which are doubly connected domains, bounded by two equipotential surfaces and two surfaces of current, separated by some specified two equipotential surfaces into three subdomains, which are characterized by different constant coefficients of filtration, is developed. The results of numerical calculations are presented.

Keywords: filtration field, algorithm, filter, porous loading.

Сивак В. М., к.т.н., доцент (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно), Пригорницький Д. А., к.т.н., доцент, Климюк Ю. Е., к.т.н., доцент (Ровенский государственный гуманитарный университет, г. Ровно)

ПОСТРОЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОЛЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ТРЕХСЛОЙНЫХ ФИЛЬТРОВ С КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫМИ ПОРИСТЫМИ ЗАГРУЗКАМИ

Разработан алгоритм численного построения пространственного фильтрационного поля в трехслойных фильтрах с кусочно-однородными пористыми загрузками, имеющих форму двусвязных областей, ограниченных двумя эквипотенциальными поверхностями и двумя поверхностями течения, разделенных некоторыми заданными двумя эквипотенциальными поверхностями на три подобласти, которые характеризуются различными постоянными коэффициентами фильтрации. Приведены результаты численных расчетов.

Ключевые слова: фильтрационное поле, алгоритм, фильтр, пористая загрузка.