

УДК 539.3

Бабич С. М., к.т.н. (Рівненський державний гуманітарний університет)

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕСКІНЧЕНОЇ ПЛАСТИНКИ З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ І ЖОРСТКОГО ДИСКА

Побудована система інтегрально-диференціальних рівнянь контактної задачі про взаємодію з тертям нескінченної пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска. Досліджується випадок спряження пластинки і диска з гарантованим натягом.

Ключові слова: ізотропна пластинка, жорсткий диск, гарантований натяг.

У машинобудуванні широко застосовуються з'єднання з натягом (пресові з'єднання). Такі з'єднання найбільш поширені при передачі обертального руху. Вони характеризуються високим рівнем концентрації напружень в зоні контакту, що негативно впливає на міцність сполучуваних деталей, відповідно й на довговічність механізмів в цілому.

Розв'язанню цієї проблеми присвячено низку робіт. Зокрема, задачі про напружену посадку кругових циліндричних тіл розглянуто в роботах Н.Д. Тарабасова [1], В.В. Панасюка і М.Й. Теплового [2], М.Й. Теплового [3]. Контакт жорсткого диска з еліптичним отвором ортотропної полімерної пластинки при їх силовій взаємодії досліджується в [4].

У цій статті пропонується розв'язання задачі трибомеханіки про напружену посадку з гарантованим натягом абсолютно жорсткого диска в криволінійний отвір нескінченної пластинки при дії на диск пари сил. Така ж задача при частковій посадці з натягом жорсткого диска в криволінійний отвір у формі правильного N -кутника із закругленими кутами нескінченної ізотропної пластинки розглянута в [5, 6].

Постановка задачі. Основна система рівнянь. Нехай в гладкий криволінійний отвір нескінченної ізотропної пластинки товщиною $2h$ з натягом Δ , що має порядок пружних зміщень, запресовано абсолютно жорсткий диск такої ж форми. Під дією пари сил з моментом M_0 , яку прикладено в центрі диска, він повертається на кут φ_0 . Розв'язок задачі полягає у визначенні нормальних T_p і дотичних $S_{p\lambda}$ зусиль на контурі отвору пластинки та кута повороту диска φ_0 .

В залежності від величини Δ можна виділити окремі випадки задачі: якщо $\Delta > \Delta_{\min}$, то зона контакту охоплює весь контур Γ ; при $0 \leq \Delta \leq \Delta_{\min}$ крім зони контакту наявні зони відставання диска від пластинки, де величина Δ_{\min} визначає мінімальний натяг, при якому контакт між пластинкою і диском порушується лише однією або в декількох ізольованих точках.

Розглянемо випадок $\Delta > \Delta_{\min}$.

Систему прямокутних координат обираємо так, як показано на рис. 1 (штриховою лінією позначено недеформований контур пластинки).

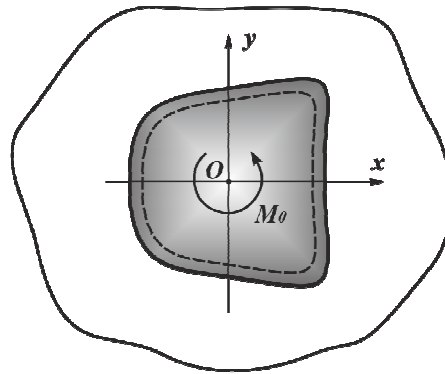


Рис. 1

Розглянемо функцію [7]

$$z = x + iy = \omega(\xi) = R_0 \left(\xi + \frac{\varepsilon_1}{\xi} + \frac{\varepsilon_2}{\xi^2} + \frac{\varepsilon_3}{\xi^3} \right), \quad (1)$$

яка реалізує конформне відображення нескінченної області з одиничним круговим отвором γ в площині $\xi = \rho e^{i\lambda}$ на область, яку займає пластинка. Тут R_0 – характерний розмір отвору; ε_j – параметри, які характеризують відхилення контуру Γ від кола ($j=1, 2, 3$), причому $|\varepsilon_1| + 2|\varepsilon_2| + 3|\varepsilon_3| < 1$; (ρ, λ) – полярна система координат в площині ξ ; $i = \sqrt{-1}$. Для спрощення приймаємо $R_0 = 1$.

На підставі (1.1) рівняння контуру диска при відсутності зовнішнього навантаження має вигляд

$$x + iy = (1 + \Delta) \left(\sigma + \frac{\varepsilon_1}{\sigma} + \frac{\varepsilon_2}{\sigma^2} + \frac{\varepsilon_3}{\sigma^3} \right), \quad \sigma = e^{i\lambda}. \quad (2)$$

Граничні умови задачі вибираємо у вигляді рівності нормальних зміщень пластинки і диска на контурі Γ . При наявності в зоні контакту сил тертя, заданих законом Кулона, ці умови запишуться так [8, 9]

$$\frac{a(\lambda)u + b(\lambda)v}{|\omega'(\sigma)|} = u_n^\alpha + u_n^\Delta; \quad S_{\rho\lambda} = fT_\rho, \quad z \in \Gamma \quad (\lambda \in \gamma), \quad (3)$$

де f – коефіцієнт тертя ковзання; u_n^Δ – нормальне зміщення точок контуру Γ пластинки, викликане натягом Δ ; u_n^α – нормальне зміщення контурних точок диска від його повороту на кут φ_0 ; γ – образ контуру Γ при відображенні (1.1);

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \cos \lambda - \varepsilon_1 \cos \lambda - 2\varepsilon_2 \cos 2\lambda - 3\varepsilon_3 \cos 3\lambda; \\ b(\lambda) &= \sin \lambda + \varepsilon_1 \sin \lambda + 2\varepsilon_2 \sin 2\lambda + 3\varepsilon_3 \sin 3\lambda. \end{aligned} \quad (4)$$

Компоненти вектора зміщення точок контуру Γ в пластинці при заданому навантаженні, згідно з [9], визначаються співвідношеннями

$$2Eh(u + iv) = (1 - \nu)(f_1 + if_2) - \frac{i}{\pi} \oint_\gamma (f_1 + if_2) \operatorname{ctg} \frac{\lambda - t}{2} dt + (\tilde{c}_1 + i\tilde{c}_2). \quad (5)$$

Тут

$$\begin{aligned} f_1 + if_2 &= i \int_0^\lambda (T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^*) e^{it} dt, \\ T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^* &= (T_\rho + iS_{\rho\lambda}) \omega'(\sigma); \end{aligned} \quad (6)$$

\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 – дійсні сталі.

Величини u_n^Δ, u_n^α з урахуванням (1.1), (1.2) обчислюємо за формулами

$$u_n^\alpha = \frac{1+\Delta}{|\omega'(\sigma)|} \sin \varphi_0 [2\varepsilon_1 \sin 2\lambda + 3\varepsilon_2 \sin 3\lambda + 4\varepsilon_3 \sin 4\lambda + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sin \lambda + 2\varepsilon_1 \varepsilon_3 \sin 2\lambda + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \sin \lambda]; \quad u_n^\Delta = \frac{\Delta}{|\omega'(\sigma)|} [1 - \varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_2^2 - 3\varepsilon_3^2 - \varepsilon_2 \cos 3\lambda - 2\varepsilon_3 \cos 4\lambda - 3\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos \lambda - 3\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos \lambda - 4\varepsilon_1 \varepsilon_3 \cos 2\lambda - 5\varepsilon_2 \varepsilon_3 \cos \lambda]. \quad (7)$$

Підстановка (5)-(7) в граничні умови (3) приводить до системи двох сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь для визначення $f_1, f_2, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2$

$$a(\lambda) \left[(1-\nu)f_1 + \frac{1}{\pi} \oint_{\gamma} f_2(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + \tilde{c}_1 \right] + b(\lambda) \left[(1-\nu)f_2 - \frac{1}{\pi} \oint_{\gamma} f_1(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + \tilde{c}_2 \right] = 2Eh \left(\Delta [1 - \varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_2^2 - 3\varepsilon_3^2 - \varepsilon_2 \cos 3\lambda - 2\varepsilon_3 \cos 4\lambda - 3\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos \lambda - 3\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos \lambda - 4\varepsilon_1 \varepsilon_3 \times \times \cos 2\lambda - 5\varepsilon_2 \varepsilon_3 \cos \lambda] + (1+\Delta) \sin \varphi_0 [2\varepsilon_1 \sin 2\lambda + 3\varepsilon_2 \sin 3\lambda + 4\varepsilon_3 \sin 4\lambda + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sin \lambda + 2\varepsilon_1 \varepsilon_3 \sin 2\lambda + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \sin \lambda] \right);$$

$$f_1'(\lambda) [a(\lambda) - f b(\lambda)] + f_2'(\lambda) [b(\lambda) + f a(\lambda)] = 0, \quad \lambda \in \gamma. \quad (8)$$

Якщо функції $f_1(\lambda), f_2(\lambda)$ стануть відомі, то компоненти напруженого стану в зоні контакту визначаються за формулами [9]

$$T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^* = -i(f_1' + if_2')e^{-i\lambda};$$

$$T_\rho = \frac{\alpha T_\rho^* + \beta S_{\rho\lambda}^*}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad S_{\rho\lambda} = \frac{\alpha S_{\rho\lambda}^* - \beta T_\rho^*}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad (9)$$

де $\alpha + i\beta = \omega'(\sigma)$.

Величину моменту M_0 , який забезпечує поворот диска на кут φ_0 , знаходимо з умови рівноваги диска [7]

$$M_0 = -\operatorname{Im} \int_{\gamma_1} (T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^*) (1 + \varepsilon_1 \sigma^2 + \varepsilon_2 \sigma^3 + \varepsilon_3 \sigma^4) d\lambda. \quad (10)$$

Наближений розв'язок задачі. Враховуючи неперервність зони контакту пластинки і диска, величини $T_\rho^*, S_{\rho\lambda}^*$ шукаємо у вигляді скінченних рядів

$$T_\rho^* = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^M [A_n \cos n\lambda + B_n \sin n\lambda];$$

$$S_{\rho\lambda}^* = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^M [C_n \cos n\lambda + D_n \sin n\lambda]. \quad (11)$$

При цьому, на підставі (9), маємо

$$f_1'(\lambda) = -\frac{1}{2} [A_0 \sin \lambda + C_0 \cos \lambda] - \sum_{n=1}^M [\cos n\lambda (A_n \sin \lambda + C_n \cos \lambda) + \sin n\lambda (B_n \sin \lambda + D_n \cos \lambda)];$$

$$f_2'(\lambda) = \frac{1}{2} [A_0 \cos \lambda - C_0 \sin \lambda] + \sum_{n=1}^M [\cos n\lambda (A_n \cos \lambda - C_n \sin \lambda) + \sin n\lambda (B_n \cos \lambda - D_n \sin \lambda)]. \quad (12)$$

Вирази для шуканих функцій $f_1(\lambda), f_2(\lambda)$ знаходимо шляхом інтегрування (12) по λ

$$f_1(\lambda) + if_2(\lambda) = \frac{1}{2} (A_0 + iC_0) e^{i\lambda} - (C_1 + B_1) + i(A_1 - iD_1) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M \left[\frac{e^{(n+1)i\lambda}}{n+1} ((A_n + D_n) - i(B_n - C_n)) + \right. \\
 & \left. + \frac{e^{-(n-1)i\lambda}}{n-1} ((D_n - A_n) - i(B_n + C_n)) \right] + f_1^0 + if_2^0, \quad (13)
 \end{aligned}$$

де $f_1^0 + if_2^0$ – сталі інтегрування.

Підставляючи (12), (13) в систему (8) з урахуванням співвідношення

$$\frac{1}{\pi} \oint_{\gamma} \begin{Bmatrix} \cos mt \\ \sin mt \end{Bmatrix} \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt = 2 \begin{Bmatrix} \sin m\lambda \\ -\cos m\lambda \end{Bmatrix} \quad (14)$$

та порівнюючи значення лівих та правих частин при $\lambda = \lambda_k = \frac{2\pi k}{M}$ ($k = 1, 2, \dots, M$), одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів рядів (11). Збіжність числового методу оцінюється порівнянням результатів для різних M .

Якщо розв’язок системи (8) буде відомий, то контактні зусилля знайдуться за формулами (9). При цьому кільцеві зусилля T_λ визначаються із співвідношення [7], яке для даної задачі приймає вигляд

$$\begin{aligned}
 T_\lambda = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} & \left(-\frac{1}{2}(\alpha A_0 + \beta C_0) + \sum_{n=1}^M \{ [\alpha(A_n - 2D_n) + \right. \\
 & \left. + \beta(C_n + 2B_n)] \cos n\lambda + [\alpha(B_n + 2C_n) + \beta(D_n - 2A_n)] \sin n\lambda \} \right).
 \end{aligned}$$

Для того, щоб визначити мінімальний натяг $\Delta = \Delta_{\min}$, при якому можливе розмикання контакту лише в ізольованих точках $\lambda = \lambda_* \in [0; 2\pi]$, до системи (8) необхідно приєднати умову рівності нулю в цій точці контактної тиску. На практиці точне визначення кута λ_* пов’язане із значними математичними труднощами. Тому в конкретних задачах мінімальний натяг визначався методом “звуження інтервалу”.

Покладаючи в (8) $f = 0$, одержимо розв’язок задачі при відсутності сил тертя.

Результати числового розрахунку. Для нескінченної пластинки з еліптичним отвором досліджено вплив на напружений стан пластинки кута повороту диска і сил тертя при мініальному натягу.

Результати числового розрахунку мінімального натягу Δ_{\min} , кута розмикання λ_* , полярного кута розмикання $\theta_* = \operatorname{arctg} \left(\frac{(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)} \operatorname{tg} \lambda_* \right)$, момента M_0 при $\varepsilon_1 = 0.2$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ подані в табл. 1.

Таблиця 1

f	φ_0 (град)	$\tilde{\Delta}_{\min}$	λ_* (град)	α_* (град)	$M_0 \cdot 10^3 / 2Eh$
0	0.5°	0.00301993	133.57	144.977	2.784
	1.0°	0.00613504	133.57	144.977	5.586
	1.5°	0.00934680	133.57	144.977	8.405
0.2	0.5°	0.00295696	129.52	141.056	5.487
	1.0°	0.00600830	129.52	141.056	11.007
	1.5°	0.00915540	129.52	141.056	16.561
0.4	0.5°	0.00284230	125.69	137.135	7.985
	1.0°	0.00577755	125.69	137.135	16.016
	1.5°	0.00880699	125.69	137.135	24.095

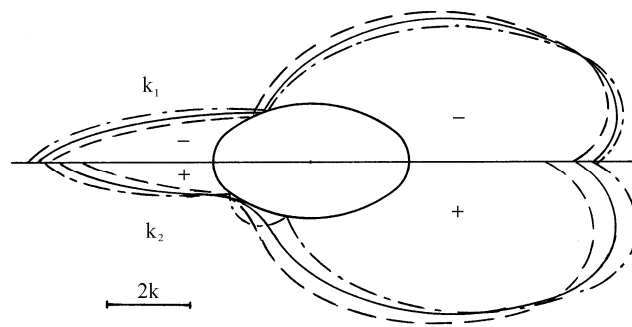


Рис. 2

На рис. 2 наведені графіки розподілу контактних $k_1 = T_\rho \cdot 10^3 / 2Eh$ і кільцевих $k_2 = T_\lambda \cdot 10^3 / 2Eh$ зусиль на контурі еліптичного отвору при $\varphi_0 = 0.5^\circ$. Штрихові лінії побудовані для $f = 0$, суцільні – для $f = 0.2$, штрихпунктирні – $f = 0.4$.

Такі ж самі залежності при $f = 0$ ілюструються на рис. 3. Штрихові лінії відповідають $\varphi_0 = 0.5^\circ$, суцільні – $\varphi_0 = 1^\circ$, штрихпунктирні – $\varphi_0 = 1.5^\circ$.

Наведені приклади дозволяють зробити такі **висновки**:

- при заданому значенні f кут розмикання λ_* не залежить від величини кута повороту диска φ_0 , причому величини Δ_{\min} , k_1 , k_2 , M_0 змінюються пропорційно величині φ_0 ;

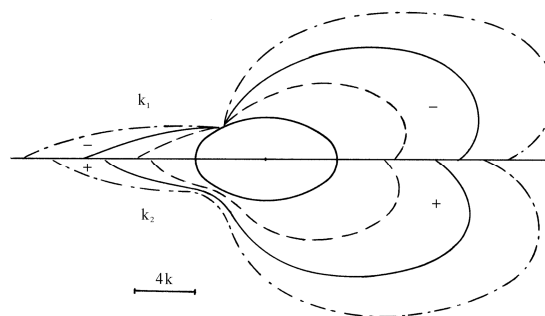


Рис. 3

- сили тертя суттєво впливають на характер розподілу k_1 , k_2 , причому із збільшенням f точка розмикання зміщується по контуру Γ в бік, протилежний до напрямку дії моменту M_0 .

1. Тарабасов Н. Д. Расчет напряженных посадок в машиностроении / Н.Д. Тарабасов – М. : Машгиз, 1961. – 364 с.
2. Панасюк В. В. Деякі контактні задачі теорії пружності / Панасюк В. В., Теплий М. Й. – Киев : Наук. думка, 1975. – 195 с.
3. Теплый М. И. Контактные задачи для областей с круговыми границами / Теплый М.И. – Львов : Вища школа, Изд-во при Львов. ун-те, 1983. – 176 с.
4. Сяський А. А. Тиск жорсткого диска на еліптичний отвір ортотропної полімерної пластинки / А. О. Сяський // Фізика конденсованих високомолекулярних систем. Наукові записки Рівненського державного гуманітарного університету. – 1999. – Вип. 7. – С. 46–50.
5. Комбель С. М. Контактна взаємодія криволінійного отвору в нескінченній пластинці і жорсткого диска з кутовими точками / С. М. Комбель, А. О. Сяський // Волинський математичний вісник.– 2001. – Вип. 8. – С. 93–97.

6. Сяський А. О. Контакт жорсткого диска з кутовими точками і трикутного отвору нескінченної ізотропної пластинки // А. О. Сяський, С. М. Комбель // Наукові нотатки.– Луцьк : ЛТДУ. – 2003. – Вип. 12. – С. 253–260.
7. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Мусхелишвили Н. И. – М. : Наука, 1966. – 708 с.
8. Сяський А. О. Граничні умови контактних задач для нескінченної пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска / Сяський А. О., Комбель С. М. // Волинський математичний вісник.– 2001.– Вип. 8. – С. 93–97.
9. Сяський А. А. Контакт двозв'язного штампа з кутовими точками і криволінійного отвору нескінченної пластинки / Андрій Сяський, Володимир Сяський //Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. В 2-х т. –Львів, 2000. – Т. 2. – С. 122–125.

Рецензент: д.т.н., професор Хлапук М. М. (НУВГП)

Babych S. M., Candidate of Engineering (Rivne State Humanitarian University)

CONTACT PROBLEM FOR ENDLESS PLATES WITH CURVILINEAR HOLES AND HARD DISK

A system of integro-differential equations of contact problem about interaction with friction of endless plate with curvilinear opening and hard disc was constructed. A case of conjugation of plate and disc with guaranteed tension is being investigated.

Keywords: isotropic plate, hard disk, guaranteed tension.

Бабич С. М., к.т.н. (Ровенский государственный гуманитарный университет)

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ И ЖЕСТКОГО ДИСКА

Построена система интегрально-дифференциальных уравнений контактной задачи о взаимодействии с трением бесконечной пластинки с криволинейным отверстием и жесткого диска. Исследуется случай сопряжения пластинки и диска с гарантированным натягом.

Ключевые слова: изотропная пластинка, жесткий диск, гарантированный натяг.