

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

УДК 518.61.001.573

Бомба А. Я., д.т.н., професор, Бойчура М. В., аспірант
(Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне),
Савюк Є. В., аспірант (Національний університет водного
господарства та природокористування, м. Рівне)

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ КВАЗІКОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ МОДЕЛЮВАННЯ ПОВІЛЬНОГО РУХУ РІДИНИ У ВОДОЙМАХ

**Методологію моделювання процесів повільного руху рідин у водо-
ймах, що ґрунтується на заміні реальної течії деяким фіктивним
квазіідеальним полем з наступним застосуванням наближених чи-
слових методів квазіконформних відображень, узагальнено на ви-
падки збільшення кількості джерел збурення вихідної течії.**

***Ключові слова:* математичне моделювання, квазіконформні відо-
браження, фіктивний коефіцієнт провідності, гідродинамічна сітка
руху, числові методи.**

Вступ. Посилення вимог до раціонального використання водних ресурсів робить задачу удосконалювання моделей руху рідини у водоймах все більш актуальною. Значна кількість прісних водойм є мілководними. Рівняння мілкої води у багатьох випадках отримують шляхом інтегрування по глибині рівнянь Нав'є–Стокса [1]. У окремих випадках також вдаються до «протилежної крайності», коли в основному течія вважається ідеальною, і лише в околах берегових ліній використовують теорію типу примежового шару (див., напр., [2]).

У роботах [3; 4; 12], при прогнозуванні таких процесів пропонується підхід, що ґрунтується на інтерпретації реальної течії деяким фіктивним квазіідеальним (типу фільтраційного) полем із наступним застосуванням наближених методів квазіконформних відображень [3; 5] та методів ідентифікації параметрів [6], що характеризують, так званий, фіктивний коефіцієнт провідності. У роботах [5; 7; 8] в результаті зробленого евристичного опису та наступного логічного обґрунтування всіх можливих випадків формування течії в залежності від заданих значень додаткового потенціалу на ділянці збурення однієї з граничних ліній течії чотирикутної криволінійної області розв'язана проблема неоднозначності нелінійного обернення відповідних крайових задач на конформні відображення з використанням

розробленої процедури автоматизованого вибору відповідного випадку. На цій основі запропоновано постановки крайових задач на конформні відображення при невідомому значенні додаткового потенціалу на ділянці збурення однієї з граничних ліній течії за відомою структурною схемою формування течії як задач на оптимізацію та керування. Розроблено метод розв'язання такого роду задач, що дає можливість будувати динамічну сітку, знаходити лінії розділу течії та обчислювати різного роду відповідні перетоки (втоки, виток), який апробовано для окремих проміжних та ключових випадків, зокрема, при умові відсутності стоку з ділянки збурення. Відповідну методику постановки та чисельного наближення розв'язку перенесено на випадки нових крайових задач на конформні відображення із потенціалом керування у трив'язних, обмежених екіпотенціальними лініями, областях.

У даній статті йдеться про узагальнення запропонованої в роботах [3–5; 7; 8] методології для моделювання такого роду процесів за умови збільшення кількості додаткових джерел (втоків та витоків) збурень вихідної течії.

Загальна постановка завдання. Розглянемо процес руху рідини в однозв'язній криволінійній водоймі (області) $G_z = ABM_1N_1M_2N_2M_3N_3CD$ (рис. 1, а), обмеженій чотирма кусково гладкими кривими $BM_1N_1M_2N_2M_3N_3C = \{z = x + iy: f_3(x, y) = 0\} = \{(x, y): y_j = \sum_{i=0}^{m_{j_1}} p_{1ij} x^i\}$, $AD = \{z: f_4(x, y) = 0\} = \{(x, y): y_j = \sum_{i=0}^{m_{j_2}} p_{2ij} x^i\}$, $AB = \{z: f_1(x, y) = 0\}$, $CD = \{z: f_2(x, y) = 0\}$, де p_{1ij} і p_{2ij} – коефіцієнти відповідних многочленів, що знаходяться на основі експериментальних даних шляхом інтерполяції. Тут екіпотенціальні $M_1N_1, M_3N_3, M_2N_2 \in BC$ – лінійні джерела (відповідно втоки та виток) збурення вихідної течії, породженої лініями течії BC та AD і екіпотенціальними лініями AB та CD ; $\underline{K}, \tilde{K}, K_*, K^*, K^\circ$ – характерні точки ліній розділу течії (які на даному рисунку зображені жирними лініями, а штрихованими – екіпотенціальні, що проходять через дані точки).

Задача полягає в побудові динамічної сітки, знаходженні поля швидкостей, розрахунку ліній розділу течії, а також величин перетоків та сумарної витрати.

Припускаємо, що переміщення водяних мас можна розглядати як деяку фіктивну квазіідеальну течію в області G_z [3; 4], тобто що

$\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad} \varphi$, $\text{div} \vec{v} = 0$, де $\vec{v} = (v_x(x, y), v_y(x, y))$ – швидкість течії, $\varphi = \varphi(x, y)$ – квазіпотенціал поля такий, що $\frac{d\varphi}{dn} \Big|_{BM_1} = \frac{d\varphi}{dn} \Big|_{N_1M_2} = \frac{d\varphi}{dn} \Big|_{N_2M_3} = \frac{d\varphi}{dn} \Big|_{N_3C} = \frac{d\varphi}{dn} \Big|_{AD} = 0$, $\varphi|_{AB} = \varphi_*$, $\varphi|_{CD} = \varphi^*$, $\varphi|_{M_1N_1} = \varphi_0$, $\varphi|_{M_2N_2} = \varphi^0$, $\varphi|_{M_3N_3} = \varphi_{00}$ ($\varphi_* < \varphi_0 < \varphi_{00} < \varphi^0 < \varphi^*$), \vec{n} – зовнішня нормаль до відповідної ділянки границі даної області [5], $\kappa = \kappa(\varphi, \psi, \alpha_1, \dots, \alpha_3, a_1, \dots, a_6, b_1, \dots, b_6, c_1, \dots, c_6, d_1, \dots, d_6, f_1, \dots, f_6, \dots)$ – фіктивний коефіцієнт провідності, де $\psi = \psi(x, y)$ – функція течії (див. нижче), а $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a_1, \dots, a_6, b_1, \dots, b_6, c_1, \dots, c_6, d_1, \dots, d_6, f_1, \dots, f_6$ – його характерні параметри.

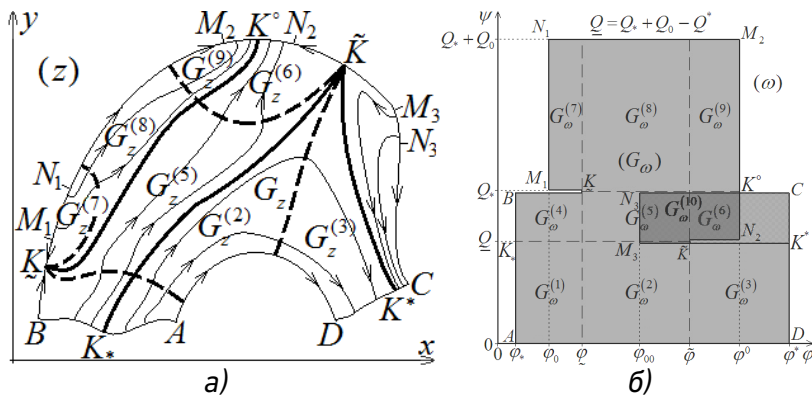


Рис. 1. Фізична область $AB\tilde{K}M_1N_1M_2N_2\tilde{K}M_3N_3CD$ (а) та відповідна область квазікомплексного потенціалу із дволистою ділянкою (зображено темнішим кольором) (б)

Результати досліджень. Ввівши функцію течії $\psi(x, y)$, комплексно спряжену до функції $\varphi(x, y)$, аналогічно до [9], приходимо до задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ фізичної області G_z на відповідну область комплексного квазіпотенціалу G_ω (рис. 1, б) [5]:

$$\begin{aligned} \kappa\varphi'_x &= \psi'_y, \quad \kappa\varphi'_y = -\psi'_x, \\ \varphi|_{AB} &= \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \varphi|_{M_1N_1} = \varphi_0, \quad \varphi|_{M_2N_2} = \varphi^0, \quad \varphi|_{M_3N_3} = \varphi_{00}, \\ \psi|_{AD} &= 0, \quad \psi|_{BM_1} = Q_*, \quad \psi|_{N_1M_2} = Q_* + Q_0, \quad \psi|_{N_2M_3} = Q_* + Q_0 - Q^0, \\ \psi|_{N_2M_3} &= Q_* + Q_0 - Q^0 + Q_{00} = Q^*. \end{aligned}$$

де Q_* , Q_0 , Q_{00} – потоки, що входять в область G_z через ділянки AB , M_1N_1 , M_3N_3 відповідно, Q^0 – потік, що виходить із неї через M_2N_2 , Q^* – сумарний потік, що виходить з області через CD (величини Q_* , Q_0 , Q_{00} , Q^0 , Q^* шукаються в процесі розв'язання задачі).

Коефіцієнт κ (виходячи з умов, що, зокрема, забезпечують його близькість до нуля вздовж берегових ліній) представимо у вигляді:

$$\kappa(\varphi, \psi, \dots) = \left[\begin{array}{l} \sum_{l=0}^2 \alpha_l \psi^l (Q_* - \psi)^l, \text{ при } (\varphi, \psi) \in \tilde{G}_1, \\ \sum_{l=0}^2 \alpha_l (\psi - Q_*)^l (Q_* + Q_0 - \psi)^l, \text{ при } (\varphi, \psi) \in \tilde{G}_2, \\ \sum_{l=0}^2 \alpha_l (\psi - (Q_* + Q_0 - Q^0))^l (Q_* + Q_0 - \psi)^l, \text{ при} \\ (\varphi, \psi) \in \tilde{G}_3, \\ a_1 \psi^4 + b_1 \psi^3 + c_1 \psi^2 + d_1 \psi + f_1, \text{ при } (\varphi, \psi) \in \tilde{G}_4, \\ \vdots \\ \vdots \\ a_2(\psi) \psi^4 + b_2(\psi) \psi^3 + c_2(\psi) \psi^2 + d_2(\psi) \psi + f_2(\psi), \\ \text{при } (\varphi, \psi) \in \tilde{G}_5, \\ \alpha_0 + \alpha_1 (\psi - (Q_* + Q_0 - Q^0)) (Q_* + Q_0 - Q^0 + Q_{00} - \psi) + \\ + \alpha_2 (\psi - (Q_* + Q_0 - Q^0))^2 (Q_* + Q_0 - Q^0 + Q_{00} - \psi)^2, \\ \text{при } (\varphi, \psi) \in \tilde{G}_6, \\ a_3(\varphi) \psi^4 + b_3(\varphi) \psi^3 + c_3(\varphi) \psi^2 + d_3(\varphi) \psi + f_3(\varphi), \\ \text{при } (\varphi, \psi) \in \tilde{G}_7, \\ a_4(\varphi) \psi^4 + b_4(\varphi) \psi^3 + c_4(\varphi) \psi^2 + d_4(\varphi) \psi + f_4(\varphi), \\ \text{при } (\varphi, \psi) \in \tilde{G}_8, \\ a_5 \varphi^4 + b_5 \varphi^3 + c_5 \varphi^2 + d_5 \varphi + f_5, \text{ при } (\varphi, \psi) \in \partial \tilde{G}_7 \cup \partial \tilde{G}_8, \\ a_6(\psi) \varphi^4 + b_6(\psi) \varphi^3 + c_6(\psi) \varphi^2 + d_6(\psi) \varphi + f_6(\psi), \\ \text{при } (\varphi, \psi) \in \tilde{G}_9, \end{array} \right. \quad (1)$$

де параметри $a_r(\varphi, \psi)$, $b_r(\varphi, \psi)$, $c_r(\varphi, \psi)$, $d_r(\varphi, \psi)$, $f_r(\varphi, \psi)$ ($r = 1, \dots, 6$), ідентифікуватимемо, виходячи з додаткових систем рівнянь, які формуються з міркувань його гладкості у досліджуваній області тощо, при умові, що α_0 , α_1 та α_2 задані. Тут

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1 &= \left\{ \varphi_* < \varphi < \varphi^*; 0 < \psi < \frac{Q_*}{2} \right\} \cup \left\{ \varphi_* < \varphi < \varphi_*; \frac{Q_*}{2} < \psi < Q_* \right\}, \\ \tilde{G}_2 &= \left\{ \varphi_0 < \varphi < \varphi^0; Q_* + \frac{Q_0}{2} < \psi < Q_* + Q_0 \right\} \cup \\ &\cup \left\{ \varphi_0 < \varphi < \varphi_*; Q_* < \psi < Q_* + \frac{Q_0}{2} \right\}, \\ \tilde{G}_3 &= \left\{ \tilde{\varphi} < \varphi < \varphi^0; Q_* + Q_0 - Q^0 < \psi < Q_* + Q_0 - \frac{Q^0}{2} \right\}, \\ \tilde{G}_4 &= \left\{ \tilde{\varphi} < \varphi < \varphi^0; Q_* + Q_0 - \frac{Q^0}{2} < \psi < Q_* + \frac{Q_0}{2} \right\}, \\ \tilde{G}_5 &= \left\{ \varphi < \varphi < \tilde{\varphi}; Q_* + Q_0 - Q^0 < \psi < Q_* + \frac{Q_0}{2} \right\}, \\ \tilde{G}_6 &= \left\{ \varphi_{00} < \varphi < \varphi^*; \frac{Q_{00}}{2} < \psi - Q_* - Q_0 + Q^0 < Q_{00} \right\} \cup \\ &\cup \left\{ \varphi_{00} < \varphi < \tilde{\varphi}; 0 < \psi - Q_* - Q_0 + Q^0 < Q_{00} \right\}, \\ \tilde{G}_7 &= \left\{ \tilde{\varphi} < \varphi < \varphi^*; \frac{Q^*}{2} < \psi < Q_* + Q_0 - Q^0 \right\}, \\ \tilde{G}_8 &= \left\{ \tilde{\varphi} < \varphi < \varphi^*; Q_* + Q_0 - Q^0 < \psi < Q_* + Q_0 - Q^0 + \frac{Q_{00}}{2} \right\}, \\ \tilde{G}_9 &= \left\{ \varphi < \varphi < \tilde{\varphi}; \frac{Q_*}{2} < \psi < Q_* + Q_0 - Q^0 \right\}. \end{aligned}$$

У роботі [5] обґрунтовано доцільність переходу від прямої задачі (на квазіконформне відображення G_z на G_ω) до оберненої. Обернену нелінійну крайову задачу на квазіконформне відображення $z=z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z при невідомих $\varphi, \tilde{\varphi}, Q_*, Q_0, Q_{00}, Q^0, Q^*$, аналогічно до [3–5], зводимо до розв'язання системи еліптичних рівнянь:

$$x'_\varphi = \kappa(\varphi, \psi, \dots) y'_\psi, \quad \kappa(\varphi, \psi, \dots) x'_\psi = -y'_\varphi, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega \quad (2)$$

за умов:

$$\left[\begin{array}{l}
 f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_*, \\
 f_2(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q^*, \\
 f_3(x(\varphi, Q_*), y(\varphi, Q_*)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi, \\
 f_3(x(\varphi, Q_*), y(\varphi, Q_*)) = 0, \quad \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi, \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 f_3(x(\varphi_0, \psi), y(\varphi_0, \psi)) = 0, \quad Q_* \leq \psi \leq Q_* + Q_0, \\
 f_3(x(\varphi, Q_* + Q_0), y(\varphi, Q_* + Q_0)) = 0, \quad \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi^0, \\
 f_3(x(\varphi^0, \psi), y(\varphi^0, \psi)) = 0, \quad Q_* + Q_0 - Q^0 \leq \psi \leq Q_* + Q_0, \\
 f_3(x(\varphi, Q_* + Q_0 - Q^0), y(\varphi, Q_* + Q_0 - Q^0)) = 0, \quad (3) \\
 \varphi_{00} \leq \varphi \leq \varphi^0, \\
 f_3(x(\varphi_{00}, \psi), y(\varphi_{00}, \psi)) = 0, \quad Q_* + Q_0 - Q^0 \leq \psi \leq Q^*, \\
 f_3(x(\varphi, Q^*), y(\varphi, Q^*)) = 0, \quad \varphi_{00} \leq \varphi \leq \varphi^*, \\
 f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*,
 \end{array} \right.$$

де $\varphi \in BM_1$, $\tilde{\varphi} \in N_2M_3$ – значення квазіпотенціалу в шуканих точках «призупинки» течії.

Залежно від значення параметрів φ_0 , φ_{00} , φ^0 ($\varphi_* < \varphi_0 < \varphi_{00} < \varphi^0 < \varphi^*$) можливі різні випадки формування течії в G_z , а отже, і області комплексного квазіпотенціалу G_ω , зокрема положення точок $\tilde{K} \in BM_1$ та $\tilde{K} \in N_2M_3$ [5; 12]. На рис. 1 зображено найбільш природний із них. Його особливістю є також те, що відповідна область квазікомплексного потенціалу G_ω є дволистою (рис. 1, б).

Для запису різницевого аналогу задачі (2) – (3) здійснимо побудову сітки у області G_ω , вузли (φ_i, ψ_j) якої визначаються наступним чином:

$$\varphi_i = \varphi_* + i\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_1 = \frac{\varphi - \varphi_*}{\tilde{m}_1}, \text{ при } 1 \leq i \leq \tilde{m}_1, (\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^{(1)}, G_\omega^{(4)},$$

$$\varphi_i = \varphi + i\Delta\varphi_2, \Delta\varphi_2 = \frac{\tilde{\varphi} - \varphi}{\tilde{m}_2}, \text{ при } 1 \leq i \leq \tilde{m}_2,$$

$$\begin{aligned}
 & (\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^{(2)}, G_\omega^{(5)}, G_\omega^{(8)}, \\
 & \varphi_i = \tilde{\varphi} + i\Delta\varphi_3, \Delta\varphi_3 = \frac{\varphi^* - \tilde{\varphi}}{\tilde{m}_3}, \text{ при } 1 \leq i \leq \tilde{m}_3, (\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^{(3)}, \\
 & \varphi_i = \varphi_0 + i\Delta\varphi_4, \Delta\varphi_4 = \frac{\varphi - \varphi_0}{\tilde{m}_4}, \text{ при } 1 \leq i \leq \tilde{m}_4, (\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^{(7)}, \\
 & \varphi_i = \tilde{\varphi} + i\Delta\varphi_5, \Delta\varphi_5 = \frac{\varphi^0 - \tilde{\varphi}}{\tilde{m}_5}, \text{ при } 1 \leq i \leq \tilde{m}_5, (\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^{(6)}, G_\omega^{(9)}, \\
 & \varphi_i = \varphi_{00} + i\Delta\varphi_6, \Delta\varphi_6 = \frac{\varphi^* - \varphi_{00}}{\tilde{m}_6}, \text{ при } 1 \leq i \leq \tilde{m}_6, (\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^{(10)}; \\
 & \psi_j = j\Delta\psi_1, \Delta\psi_1 = \frac{Q_* + Q_0 - Q^0}{\tilde{n}_1}, \text{ при } 1 \leq j \leq \tilde{n}_1, (\varphi_i, \psi_j) \in \bigcup_{l=1}^3 G_\omega^{(l)}, \\
 & \psi_j = Q_* + Q_0 - Q^0 + j\Delta\psi_2, \Delta\psi_2 = \frac{Q^0 - Q_0}{\tilde{n}_2}, \text{ при } 1 \leq j \leq \tilde{n}_2, \\
 & (\varphi_i, \psi_j) \in \bigcup_{l=4}^6 G_\omega^{(l)}, \\
 & \psi_j = Q_* + j\Delta\psi_3, \Delta\psi_3 = \frac{Q_0}{\tilde{n}_3}, \text{ при } 1 \leq j \leq \tilde{n}_3, (\varphi_i, \psi_j) \in \bigcup_{l=7}^9 G_\omega^{(l)}, \\
 & \psi_j = Q_* + Q_0 - Q^0 + j\Delta\psi_4, \Delta\psi_4 = \frac{Q^* - Q_* - Q_0 + Q^0}{\tilde{n}_4}, \text{ при} \\
 & 1 \leq j \leq \tilde{n}_4, (\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^{(10)},
 \end{aligned}$$

де $\tilde{m}_1 = m_1 + m_2 + 1$, $\tilde{m}_2 = m_3 - 1$, $\tilde{m}_3 = m_4 + m_5 + 1$, $\tilde{m}_4 = m_2 + 1$, $\tilde{m}_5 = m_4 + 1$,
 $\tilde{m}_6 = m_2 + 1$, $\tilde{n}_l = n_l + 1$ ($l = 1, \dots, 4$), $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$ – параметри розбиття підобластей.

Різницеві аналоги рівнянь (2) у сітковій області G_ω^γ запишемо у вигляді [10]:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\Delta \varphi_s}{2} \left(\gamma^{(l)} \kappa_{i,j} (\kappa_{i,j})'_{\psi} (x_{i,j+1}^{(l)} - x_{i,j-1}^{(l)}) - \frac{(\kappa_{i,j})'_{\varphi}}{\kappa_{i,j}} (x_{i+1,j}^{(l)} - x_{i-1,j}^{(l)}) \right) - \\ & - 2 \left(1 + (\gamma^{(l)})^2 \kappa_{i,j}^2 \right) x_{i,j}^{(l)} + (\gamma^{(l)})^2 \kappa_{i,j}^2 (x_{i,j-1}^{(l)} + x_{i,j+1}^{(l)}) + x_{i+1,j}^{(l)} + \\ & + x_{i-1,j}^{(l)} = 0, \quad y_{i+1,j}^{(l)} + y_{i-1,j}^{(l)} - 2 \left(1 + (\gamma^{(l)})^2 \kappa_{i,j}^2 \right) y_{i,j}^{(l)} + \\ & + (\gamma^{(l)})^2 \kappa_{i,j}^2 (y_{i,j-1}^{(l)} + y_{i,j+1}^{(l)}) + \frac{\Delta \varphi_s}{2} \left(\gamma^{(l)} \kappa_{i,j} (\kappa_{i,j})'_{\psi} (y_{i,j+1}^{(l)} - \right. \\ & \left. - y_{i,j-1}^{(l)}) - \frac{(\kappa_{i,j})'_{\varphi}}{\kappa_{i,j}} (y_{i+1,j}^{(l)} - y_{i-1,j}^{(l)}) \right) = 0, \end{aligned} \right. , \quad (4)$$

де $x_{i,j}^{(l)} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j}^{(l)} = y(\varphi_i, \psi_j)$, $\kappa_{i,j} = \kappa(\varphi_i, \psi_j, \dots)$, $(x_{i,j}^{(l)}, y_{i,j}^{(l)}) \in G_z^{(l)}$; l , i , j , s – індекси, які визначають належність до певної підобласті.

Крайові умови (2) апроксимуємо рівняннями виду:

$$\left\{ \begin{aligned} & f_1(x_{0,j}^{(1)}, y_{0,j}^{(1)}) = 0, \quad 0 \leq j \leq n_1, \\ & f_1(x_{0,j}^{(4)}, y_{0,j}^{(4)}) = 0, \quad n_1 + 1 \leq j \leq n_1 + n_2, \\ & f_2(x_{m,j}^{(3)}, y_{m,j}^{(3)}) = 0, \quad 0 \leq j \leq n_1, \\ & f_2(x_{m,j}^{(10)}, y_{m,j}^{(10)}) = 0, \quad 0 \leq j \leq n_4, \\ & f_3(x_{i,n_1+n_2}^{(4)}, y_{i,n_1+n_2}^{(4)}) = 0, \quad 0 \leq i \leq m_1 + m_2, \\ & f_3(x_{i,n_1+n_2}^{(7)}, y_{i,n_1+n_2}^{(7)}) = 0, \quad m_1 \leq i \leq m_1 + m_2, \\ & f_3(x_{m_1,j}^{(7)}, y_{m_1,j}^{(7)}) = 0, \quad n_1 + n_2 \leq j \leq n_1 + n_2 + n_3, \\ & f_3(x_{i,n_1+n_2+n_3}^{(l)}, y_{i,n_1+n_2+n_3}^{(l)}) = 0, \quad m_1 \leq i \leq m - m_5 \quad (l = 1, 2, 3), \\ & \vdots \end{aligned} \right.$$

$$\begin{array}{l}
 \vdots \\
 \left[\begin{array}{l}
 f_3(x_{m-m_5, j}^{(6)}, y_{m-m_5, j}^{(6)}) = 0, \quad n_1 \leq j \leq n_1 + n_2 + n_3 \quad (l = 6, 9), \\
 f_3(x_{i, n_1}^{(6)}, y_{i, n_1}^{(6)}) = 0, \quad m_1 + m_2 + m_3 \leq i \leq m - m_5, \\
 f_3(x_{i, n_1}^{(3)}, y_{i, n_1}^{(3)}) = 0, \quad m_1 + m_2 + m_3 \leq i \leq m, \\
 f_3(x_{i, n_1}^{(10)}, y_{i, n_1}^{(10)}) = 0, \quad 0 \leq i \leq m_6 - m_5 - m_4, \\
 f_3(x_{0, j}^{(10)}, y_{0, j}^{(10)}) = 0, \quad 0 \leq j \leq n_4, \\
 f_3(x_{i, n_4}^{(10)}, y_{i, n_4}^{(10)}) = 0, \quad 0 \leq i \leq m_6, \\
 f_4(x_{i, 0}^{(l)}, y_{i, 0}^{(l)}) = 0, \quad 0 \leq i \leq m \quad (l = 1, 2, 3).
 \end{array} \right. \quad (5)
 \end{array}$$

Різницеві аналоги умов ортогональності для уточнення вузлів на границі області запишемо з використанням лівих та правих різницевих схем у вигляді [1; 9]:

$$\left[\begin{array}{l}
 f'_{1x}(x_{i, j}, y_{i, j})(y_{i+1, j} - y_{i, j}) - f'_{1y}(x_{i, j}, y_{i, j})(x_{i+1, j} - x_{i, j}) = 0, \\
 i = 0, \quad j = \overline{1, n_1 + n_2 - 1}, \\
 f'_{2x}(x_{i, j}, y_{i, j})(y_{i, j-1} - y_{i, j}) - f'_{2y}(x_{i, j}, y_{i, j})(x_{i, j-1} - x_{i, j}) = 0, \\
 i = \overline{1, m_1 + m_2 - 1}, \quad j = n_1 + n_2, \\
 i = \overline{m_1 + 1, m - m_5 - m_6 - 1}, \quad j = n_1 + n_2 + n_3, \\
 i = \overline{m - m_6 + 1, m - 1}, \quad j = n_1 + n_4, \\
 f'_{2x}(x_{i, j}, y_{i, j})(y_{i+1, j} - y_{i, j}) - f'_{2y}(x_{i, j}, y_{i, j})(x_{i+1, j} - x_{i, j}) = 0, \\
 i = m_1 + m_2, \quad j = n_1 + n_2, \\
 i = m_1, \quad j = \overline{n_1 + n_2 + 1, n_1 + n_2 + n_3 - 1}, \\
 i = m - m_6, \quad j = \overline{n_1, n_1 + n_4 - 1}, \\
 f'_{2x}(x_{i, j}, y_{i, j})(y_{i, j+1} - y_{i, j}) - f'_{2y}(x_{i, j}, y_{i, j})(x_{i, j+1} - x_{i, j}) = 0, \\
 \vdots
 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \vdots \\
 & \left. \begin{aligned}
 i = \overline{m_1 + m_2 - 1, m_1 + 1}, \quad j = n_1 + n_2, \\
 i = \overline{m - m_5 - m_6 - 1, m_1 + m_2 + m_3 + 1}, \quad j = n_1, \\
 i = \overline{m_1 + m_2 + m_3 - 1, m - m_6 + 1}, \quad j = n_1, \\
 f'_{2x}(x_{i,j}, y_{i,j})(y_{i-1,j} - y_{i,j}) - f'_{2y}(x_{i,j}, y_{i,j})(x_{i-1,j} - x_{i,j}) = 0, \\
 i = \overline{m - m_5 - m_6}, \quad j = \overline{n_1 + n_2 + n_3 - 1, n_1 + 1}, \\
 f'_{3x}(x_{i,j}, y_{i,j})(y_{i-1,j} - y_{i,j}) - f'_{3y}(x_{i,j}, y_{i,j})(x_{i-1,j} - x_{i,j}) = 0, \\
 i = m, \quad j = \overline{n_1 + n_4 - 1, 1}, \\
 f'_{4x}(x_{i,j}, y_{i,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j}) - f'_{4y}(x_{i,j}, y_{i,j})(x_{i,j+1} - x_{i,j}) = 0, \\
 i = \overline{m - 1, 1}, \quad j = 0.
 \end{aligned} \right\} (6)
 \end{aligned}$$

Координати точки \tilde{K} знаходимо із міркувань неперервності функції швидкості $\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad}\varphi$ в області G_z та на її межі.

Квазиконформний інваріант $\gamma^{(l)}$ ($l = \overline{1, 10}$), аналогічно до [5], у кожній з підобластей криволінійного чотирикутника G_z визначимо на підставі умови «квазиконформної подібності в малому» відповідних чотирикутників:

$$\begin{aligned}
 \gamma^{(l)} &= \frac{1}{sp} \sum_{i,j=0}^{s,p} \frac{1}{\kappa_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}} \gamma_{i,j}^{(l)}, \quad (7) \\
 \gamma_{i,j}^{(l)} &= \frac{\sqrt{\left(x_{i+1,j}^{(l)} - x_{i,j}^{(l)}\right)^2 + \left(y_{i+1,j}^{(l)} - y_{i,j}^{(l)}\right)^2} + \sqrt{\left(x_{i+1,j+1}^{(l)} - x_{i,j+1}^{(l)}\right)^2 + \left(y_{i+1,j+1}^{(l)} - y_{i,j+1}^{(l)}\right)^2}}{\sqrt{\left(x_{i,j+1}^{(l)} - x_{i,j}^{(l)}\right)^2 + \left(y_{i,j+1}^{(l)} - y_{i,j}^{(l)}\right)^2} + \sqrt{\left(x_{i+1,j+1}^{(l)} - x_{i+1,j}^{(l)}\right)^2 + \left(y_{i+1,j+1}^{(l)} - y_{i+1,j}^{(l)}\right)^2}}, \\
 \kappa_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} &= \frac{\kappa_{i,j} + \kappa_{i+1,j} + \kappa_{i,j+1} + \kappa_{i+1,j+1}}{4},
 \end{aligned}$$

де l, s, p – індекси, які визначають належність до певної підобласті.

Алгоритм розв'язання цієї задачі полягає у почерговій параметризації величин $\gamma^{(l)}$, $l = \overline{1, 10}$, граничних і внутрішніх вузлів сіткової області G_z^γ та використанні ідей методу блочної ітерації [10]. А саме: задаємо границю фізичної області $G_z = ABM_1N_1M_2N_2M_3N_3CD$; задаємо координати точок $M_1, N_1, M_2, N_2, M_3, N_3$ на границі ∂G_z , значення параметрів розбиття сіткової області G_ω^γ : m, n_1, n_2, n_3, n_4

($m = \sum_{r=1}^6 m_r, n = \sum_{r=1}^4 n_r$), параметри $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ та ε , що характеризують відповідно коефіцієнт провідності вздовж берегових ліній і всередині водойми та точність роботи алгоритму, потенціали $\varphi_*, \varphi_0, \varphi_{00}, \varphi^0, \varphi^*$;

обчислюємо
$$\Delta\varphi^{(5)} = \frac{\varphi^0 - \tilde{\varphi}}{m_4}, \quad m_1 = \frac{\varphi_0}{\varphi^*} m, \quad m_2 = \frac{\varphi}{\varphi^*} m - m_1,$$

$$m_3 = \frac{\tilde{\varphi}}{\varphi^*} m - \sum_{r=1}^2 m_i, \quad m_4 = \frac{\varphi^0}{\varphi^*} m - \sum_{r=1}^3 m_i, \quad m_5 = m - \sum_{r=1}^4 m_i, \quad m_6 = \sum_{r=1}^5 m_i - \frac{\varphi_{00}}{\varphi^*} m.$$

Задаємо початкові наближення коефіцієнта фіктивної провідності $\kappa(\varphi, \psi, \dots) = 1$, координат граничних вузлів (так, щоб виконувались рівності (3)) та координат внутрішніх вузлів. За формулами (7) знаходимо $\gamma^{(l)}, l = \overline{1, 10}$.

Визначаємо кроки розбиття G_ω^γ та знаходимо чергові наближення невідомих величин $\varphi, \tilde{\varphi}, Q_*, Q_0, Q_{00}, Q^0, Q^*$ при поточному значенні величин $\gamma^{(l)}, l = \overline{1, 10}$.

Наступне наближення коефіцієнта фіктивної провідності отримуємо із формули (1).

За (4) – (7) проводимо уточнення координат внутрішніх та граничних вузлів. Для знаходження точок розділу підобластей використовуємо умови $\frac{\varphi}{\varphi^*} m_1 = m_3$ та $\frac{\tilde{\varphi}}{\varphi^*} m_1 = m_4 + m_5$, при невиконанні яких корегуємо m_3, m_5 . Перевіряємо виконання умов зупинки ітераційного процесу. У разі їх невиконання знову переходимо до визначення кроків розбиття G_ω^γ , інакше – обчислюємо нев'язку конформності ε_* , витрати $Q_*, Q_0, Q_{00}, Q^0, Q^*$, значення потенціалів $\varphi, \tilde{\varphi}$ на ділянці $ABM_1N_1M_2N_2M_3N_3CD$, координати точок розділу течії $\underline{K} = \underline{K}(x, y)$ і $\tilde{K} = \tilde{K}(\tilde{x}, \tilde{y})$ та розраховуємо поле швидкостей $\vec{v} = \kappa(\varphi, \psi, \dots) \cdot \text{grad}\varphi$.

Наведемо результати **числових розрахунків** при наступних даних: $\varphi_* = 0, \varphi_0 = 1, \varphi^0 = 3, \varphi_{00} = 9, \varphi^* = 10; \alpha_0 = 0.01, \alpha_1 = 0.2, \alpha_2 = 0.1; m = 100, n_0 = 20, n_1 = 30, n_2 = 30, n_3 = 10; f_1(x, y) = y + 1.0768230769x - 600.61538462, f_2(x, y) = y - 0.375x - 330.625$, а $f_3(x, y)$ і $f_4(x, y)$ описуються кубічними сплайнами за заданою на рисунку сукупністю точок. На рис. 2 зображено розраховані гідроди-

намічну сітку та поверхню швидкостей.

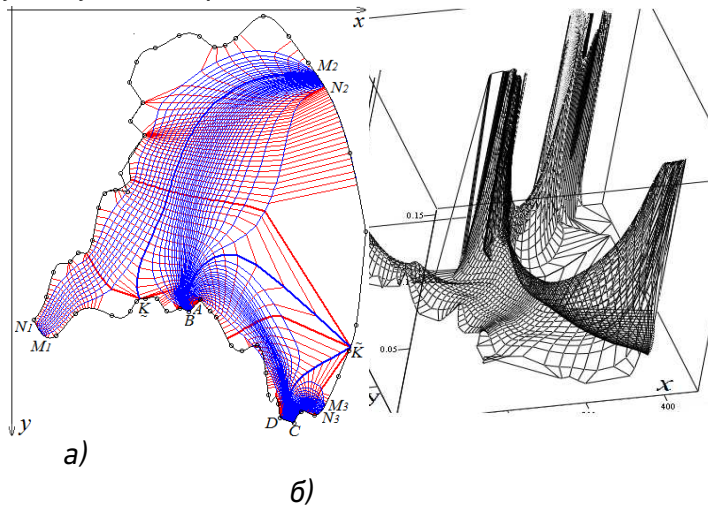


Рис. 2. Гідродинамічна сітка (а) та відповідна поверхня швидкостей (б)

Крім того, обчислено параметри $\varphi_K = 2.9$, $\varphi_{\tilde{K}} = 5.2$; $\tilde{K}(x, y) = (432, 348.3)$, $\tilde{K}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (199.5, 323.3)$; $Q_* = 4.46$, $Q_0 = 0.71$, $Q_{00} = 2.15$, $Q^0 = 3.36$, $Q^* = 1.82$.

Висновки. Методологію моделювання процесів повільного руху рідин у водоймах, що ґрунтується на інтерпретації реальної течії деяким фіктивним квазіідеальним (типу фільтраційного) полем з наступним застосуванням наближених методів квазіконформних відображень, узагальнено на випадки збільшення кількості джерел збурення вихідної течії. Якщо природна течія не є близькою до ідеальної, то у низці випадків одержані розв'язки можуть використовуватися в якості нульового наближення шуканого поля (комплексного квазіпотенціалу, швидкості тощо).

Запропонований підхід дає можливість відшукування ліній розділу основного та додаткового потоків, враховує фізичні аспекти процесу руху водяних мас, зокрема описаний вище фіктивний коефіцієнт провідності забезпечує близькість величини швидкості до нуля поблизу берегових ліній. При цьому забезпечується можливість задання окремих ділянок берегових ліній масивами точок (з подальшою інтерполяцією межі області деякими сплайнами, що є актуальним для реальних об'єктів із сильною хвилястістю їх меж).

Особливістю розробленого алгоритму є можливість зупинки процедури обчислень при виконанні лише деяких із умов закінчення процесу з автоматичним визначенням тих ділянок фізичної області

фільтрації, де мають місце похибки більші заданої точності наближень відносно інших умов, що дає змогу економніше використовувати машинний час. Це є актуальним, зокрема, у зв'язку із виявленням так званих «застійних зон» та «зон великих градієнтів», що виникають поблизу особливих точок негладких берегових ліній. Також у алгоритмі передбачено можливість зміни місця положення ділянки збурення потоку.

У перспективі розв'язання задачі знаходження граничних потенціалів (що характеризуються, наприклад, потужностями насосів) за відомими витратами та різного роду умовами керування та оптимізації, а також розв'язання оберненої задачі на знаходження деякого усередненого значення фіктивного коефіцієнта провідності та параметрів, що його характеризують. Можливе розширення моделей, зокрема, класу функцій, що описують фіктивний коефіцієнт провідності за рахунок врахування впливу вітру на зміну швидкості течії, кількості опадів, випаровування, зміни температурного режиму водойми тощо. Також актуальним є моделювання процесів охолодження у водоймах з урахуванням конвективно-теплової взаємодії.

1. Teixeira P. R. F. A Numerical Model Based on Navier-Stokes Equations to Simulate Water Wave Propagation with Wave-Structure Interaction. Edited by Yi Zheng / P. R. F. Teixeira // Wave Propagation Theories and Applications. – Rijeka : InTech, 2013. – P. 311–330. **2.** Schlichting H. Boundary-layer theory / H. Schlichting. – New York : McGraw-Hill. – 817 p. **3.** Бомба А. Я. Метод фіктивної фільтрації моделювання одного класу квазіідеальних процесів руху рідин / А. Я. Бомба, С. О. Пеньковський, Є. В. Савюк // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 7 (16). – Рівне : РДГУ, 2010. – С. 20–29. **4.** Бомба А. Я. Метод фіктивної фільтрації моделювання процесів руху рідин у водоймах з урахуванням впливу джерел поповнення течії / А. Я. Бомба, Є. В. Савюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фізико-математичні науки. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет, – 2011. – Вип. 5. – С. 10–24. **5.** Бомба А. Я. Методи комплексного аналізу / А. Я. Бомба, С. С. Каштан, Д. О. Пригорницький, С. В. Ярощак. – Рівне : НУВГП, 2013. – 415 с. **6.** Бомба А. Я. Числовий метод квазіконформного відображення розв'язання задач ідентифікації коефіцієнта електричної провідності за даними томографії прикладених потенціалів / Л. Л. Крока, А. Я. Бомба // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 11 (20). – Рівне : РДГУ, 2015. – С. 24–33. **7.** Бомба А. Я. Нелінійні обернення крайових задач на конформні відображення з керуючим потенціалом / А. Я. Бомба, С. С. Каш-

тан, В. В. Скопецький / Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2002. – 45, № 3. – С. 12–19. **8.** Бомба А. Я. Чисельне розв'язання одного класу обернених крайових задач на конформні відображення для тризв'язних областей з потенціалом керування / А. Я. Бомба, Д. О. Пригорницький // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки. – 2003. – Вип. 4. – С. 155–162. **9.** Лаврентьев М. А. Методы теории функции комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1973. – 736 с. **10.** Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 656 с. **11.** Ортега Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболдт. – М. : Мир, 1975. – 558 с. **12.** Савюк Є. В. Комплексний підхід до моделювання процесу руху рідин у водоймах з урахуванням джерел поповнення / Є. В. Савюк // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 8 (17). – Рівне : РДГУ, 2011. – С. 171–189.

Рецензент: д.т.н., професор Мартинюк П. М. (НУВГП)

Bomba A. Y., Doctor of Engineering, Professor, Boichura M. V., Post-graduate Student (Rivne State University of Humanities, Rivne),
Saviuk Y. V., Post-graduate Student (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

NUMERICAL METHODS OF QUASICONFORMAL MAPPINGS FOR MODELING THE SLOW TRAFFIC OF FLUID IN THE RESERVOIR

Methodology for modeling processes slow fluids in reservoirs based on replacing the real flow of some fictitious quasiideal field followed using approximate numerical methods quasiconformal mappings, extended to the case of increasing the number of sources of disturbance source flow.

***Keywords:* mathematical modeling, quasiconformal mapping, fictitious conduction coefficient, hydrodynamic grid movement, numerical methods.**

Бомба А. Я., д.т.н., професор, Бойчура М. В., аспірант
(Ровенский государственный гуманитарный университет,
г. Ровно), **Савюк Е. В., аспірант** (Национальный университет водно-
го хозяйства и природопользования, г. Ровно)

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ МОДЕЛИРОВАНИЯ МЕДЛЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ВОДОЕМАХ

Методологию моделирования процессов медленного движения жидкостей в водоемах, основанную на замене реального течения некоторым фиктивным квазиидеальным полем с последующим применением приближенных численных методов квазиконформных отображений, обобщенно на случаи увеличения количества источников возмущения исходного течения.

***Ключевые слова:* математическое моделирование, квазиконформные отображения, фиктивный коэффициент проводимости, гидродинамическая сетка движения, числовые методы.**
