УДК 519.63.001.57

Гладка О. М., к.т.н., доцент (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

СУЧАСНІ ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ТЕХНОЛОГІЇ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПІДЗЕМНОЇ ГІДРОДИНАМІКИ

Розроблено комплексну обчислювальну технологію розв'язання крайових задач, що описують математичні моделі складних нелінійних фільтраційних процесів підземної гідродинаміки за умов взаємовпливу характеристик процесу і середовища, з метою подальшого дослідження цих процесів за допомогою комп'ютерного моделювання. В основу підходу покладено ідею синтезу числових методів квазіконформних відображень, сумарних зображень та альтернуючого методу Шварца декомпозиції області.
Ключові слова: **математичне моделювання, фільтраційні процеси, числові методи квазіконформних відображень, методи сумарних зображень.**

Проблеми розробки методики математичного опису складних фільтраційних процесів підземної гідродинаміки, зокрема, витіснення вуглеводнів із неоднорідних нафтогазових чи ущільнених (сланцевих) пластів, що зазнали деформацій при експлуатації покладів, з метою подальшого дослідження цих процесів за допомогою комп'ютерного моделювання не втратили своєї актуальності, незважаючи на велику кількість досліджень у цьому напрямку. Поза увагою багатьох учених залишилась побудова таких математичних моделей, які б враховували зворотній вплив характеристик процесу на фільтраційні властивості пористого середовища, нелінійність фільтрації, що пов'язана зі зміною потенціалу швидкості в окремих зонах пласта, та зміни границь цих зон тощо [1–4].

Ефективним методом математичного моделювання таких процесів у криволінійних областях, обмежених лініями течії і еквіпотенціальними лініями, є розроблений у попередніх роботах авторів підхід на базі комплексного аналізу (з використанням методів конформних і квазіконформних відображень) [5]. Він автоматизує конструювання динамічних сіток, що є основою для розрахунків величини поля швидкості, розподілу тиску в пласті, значень фільтраційних витрат і перетоків між свердловинами, точок призупинки потоку, інших характеристик моделі. Проте у випадках зонально-неоднорідних пластів цей підхід потребує подальшого розвитку, зокрема, шляхом використання як його компонентів числово-аналітичних методів сумарних зображень, що були розроблені Г.М. Положим і розвинуті у роботах його учнів І.І. Ляшка, А.А. Глущенка та ін. [6–7], а також альтернуючого методу Шварца декомпозиції області [8].

У роботі здійснено постановку нелінійних крайових задач, в яких коефіцієнт провідності середовища залежить від потенціалу поля (напору, тиску) та від функції течії, для одно-, дво- та багатозв'язних криволінійних LEF-областей [1] і розроблено обчислювальну технологію їх розв'язання на основі синтезу числових методів квазіконформних відображень, сумарних зображень для диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами та декомпозиції області із застосуванням альтернуючого методу Шварца. При цьому, наближення значень шуканих функцій у внутрішніх вузлах розрахункової сітки (координат внутрішніх вузлів динамічної сітки) у процесі ітерацій знаходяться за формулами сумарних зображень [1–3].

Розглядаються задачі стаціонарної фільтрації, що підпорядковується закону Дарсі, знаходження гармонічної функції (потенціалу) $\varphi=\varphi(x,y)$ у криволінійних LEF-областях G_z ($z=x+iy$): а) ***однозв'язних***, обмежених еквіпотенціалями $L_*=\{z:f_1(x,y)=0\}$, $L^*=\{z:f_3(x,y)=0\}$ і лініями течії $L_0=\{z:f_4(x,y)=0\}$, $L^0=\{z:f_2(x,y)=0\}$, у яких потенціал поля задовольняє крайові умови $\varphi\big|_{L_*}=\varphi_*$, $\varphi\big|_{L^*}=\varphi^*$, $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{n}}\right|_{L_0}=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{n}}\right|_{L^0}=0$ ($-\infty<\varphi_*<\varphi^*<+\infty$ – сталі, n – зовнішня нормаль до відповідної кривої); б) ***двозв'язних***, обмежених двома гладкими замкненими контурами $L_*=\{z:f_*(x,y)=0\}$ – внутрішнім і $L^*=\{z:f^*(x,y)=0\}$ – зовнішнім, у яких для утворення однозв'язних областей $G_z^\Gamma=G_z\setminus\Gamma$ робиться умовний розріз Γ вздовж деякої шуканої лінії течії (тоді, L_0 і L^0 – межові лінії течії області G_z^Γ, що є відповідно верхнім і нижнім берегами розрізу Γ); в) ***тризв'язних***, обмежених двома внутрішніми контурами свердловин – еквіпотенціальними лініями $L_*=\{z:f_*(x,y)=0\}$ і $L^*=\{z:f^*(x,y)=0\}$ і непроникним зовнішнім контуром $L=\{z:f(x,y)=0\}$, у яких робляться два умовні розрізи Γ_* і Γ^* вздовж таких ліній течії (що є лініями розділення течії), котрі однозначно визначаються точками «призупинки» потоку $H_* \in L$, $H^* \in L$ і $G_z^\Gamma = G_z \setminus \left(\Gamma_* \bigcup \Gamma^*\right)$; г) ***з вільною межею*** (кривою депресії), на якій задана додаткова умова: $\varphi\big|_{BC} = g(y)$. $H \geq y \geq y_* = f^*(x_*)$ ($g(y)$ – деяка відома монотонно спадна функція).

Для ***багатозв'язних*** LEF-областей складність полягає у неповній визначеності вигляду області комплексного квазіпотенціалу, що залежить від впливу багатьох чинників: конфігурації фізичної області, зокрема взаємного розміщення свердловин, способів проведення умовних розрізів з метою зведення багатозв'язної області до однозв'язної, співвідношення між значеннями граничних потенціалів тощо. У роботі запропоновано новий підхід до класифікації ситуаційних станів формування течії, що дозволяє уніфікувати постановки задач на обернення квазіконформних відображень, їх різницеві аналоги і алгоритми розв'язання для всіх випадків ***тризв'язної*** криволінійної LEF-області, обмеженої трьома еквіпотенціальними лініями, і ***чотиризв'язної*** криволінійної LEF-області, обмеженої трьома еквіпотенціальними лініями та непроникним контуром.

Введенням функції течії $\psi = \psi(x, y)$, комплексно спряженої до φ, і заміною крайових умов вздовж межових ліній течії на $\psi\Big|_{L_0} = 0$, $\psi\Big|_{L^0} = Q = \ = \int\limits_{L_*} -\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}dx + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}dy$ (де *Q* – повна фільтраційна витрата чи перетік між відповідними контурами), приходимо до більш загальної задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ LEF-області G_z (G_z^Γ) на відповідну область комплексного потенціалу, що є багатокутником, сторони якого паралельні осям координат, а, отже, може розглядатися як сукупність, певним чином, «склеєних» між собою прямокутників, зокрема у найпростішому випадку – прямокутником $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi :$ $\varphi_* < \varphi < \varphi^*,\ 0 < \psi < Q\}$ з невідомою висотою *Q*.

Цю задачу замінено на обернену до неї, тому що область комплексного потенціалу G_ω є більш "зручною", на відміну від геометрично складної фізичної області G_z, перехід до оберненого відображення автоматично вирішує проблему дискретизації задачі при застосуванні числових методів, дозволяє використати переваги методу сумарних зображень для розв'язання відповідних різницевих задач, будувати динамічну сітку руху речовини, визначити фільтраційні витрати (перетоки), не розв'язуючи інтегральних рівнянь тощо. Тут під терміном «обернена задача» розуміється як перехід від конформного відображення $G_z \to G_\omega$ до оберненого відображення $G_\omega \to G_z$, так і те, що задача на конформне відображення $G_\omega \to G_z$ є ще й оберненою у традиційному сенсі (коли за додатковими даними про розв'язок задачі, знаходять ще й невідомі коефіцієнти, які входять у рівняння чи крайові умови), оскільки постановка задачі містить невідомі параметри (витрати та ін.).

Обернена крайова задача на конформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi,\psi) + \ +iy(\varphi,\psi)$ області G_ω на G_z (G_z^Γ) при невідомих значеннях параметрів $\widetilde{Q} = \int\limits_0^{\widetilde{Q}} \frac{1}{J}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2\right) d\psi$ ($J = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi}\frac{\partial y}{\partial \varphi}$ – якобіан переходу, $\widetilde{Q}$ – повна витрата Q чи значення перетоків Q_*^*, Q_0^*, Q_*^0), доповнена умовами ортогональності $\left.\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}\right)\right|_{\varphi=\widetilde{\varphi}} = 0$, $\left.\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial \widetilde{\widetilde{f}}}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial \widetilde{\widetilde{f}}}{\partial x}\right)\right|_{\psi=\widetilde{\widetilde{\psi}}} = 0$ (де $\widetilde{f} = \widetilde{f}(x,y)$, $\widetilde{\widetilde{f}} = \widetilde{\widetilde{f}}(x,y)$ – рівняння відповідних граничних еквіпотенціалей і ліній течії, $\widetilde{\varphi}$ – граничне значення потенціалу, $\widetilde{\widetilde{\psi}}$ – може мати значення $0, Q, Q_*^*, Q_0^*, Q_*^0$), зводиться до розв'язування у прямокутних підобластях G_ω рівнянь Лапласа $\Delta x(\varphi,\psi) = 0$, $\Delta y(\varphi,\psi) = 0$ при відповідних умовах спряження, крайових умовах і умовах ортогональності ліній динамічної сітки до межі області.

На основі визначеної в області комплексного квазіпотенціалу ортогональної сітки G_ω^γ побудовано різницевий аналог поставленої задачі. У випадку двозв'язної чи тризв'язної LEF-області замість відповідно двох крайових умов маємо умови періодичності функцій *x* і *y* на розрізах, а умови ортогональності ліній динамічної сітки до границі на розрізах замінюємо вимогами задовольняти рівняння Лапласа. Окрім цього, в області комплексного квазіпотенціалу, що відповідає багатозв'язній LEF-області, будуємо нерівномірну сітку і задаємо додаткові умови для знаходження точок «призупинки» потоку та умови спряження на границях прямокутних підобластей. Також додаткові умови задаємо і для LEF-області з вільною межею.

Наближення значень функцій *x* і *y* у внутрішніх вузлах розрахункової сітки (координат внутрішніх вузлів динамічної сітки) у процесі ітерацій знаходимо за формулами сумарних зображень:

$$x_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} p_{j,k}\left(\mu_k^i a_k + \nu_k^i b_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^{m} \frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k - \nu_k}\left(p_{1,k} x_{t,0} + p_{n,k} x_{t,n+1}\right)\right),$$

$$y_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} p_{j,k}\left(\mu_k^i c_k + \nu_k^i d_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^{m} \frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k - \nu_k}\left(p_{1,k} y_{t,0} + p_{n,k} y_{t,n+1}\right)\right),$$

$$i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n},$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j),\ y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$.

При розв'язуванні задач методом сумарних зображень більшість невідомих, які входять в різницеву задачу, у безпосередньому рахунку участі не беруть, що призводить до зменшення обсягу обчислювальної роботи, а отже, і дає можливість уникнути накопичування обчислювальних похибок. Метод сумарних зображень є зручним для комп'ютерної реалізації і має потенціал до розпаралелювання обчислень, що є дуже актуальним зараз з огляду на сучасний розвиток комп'ютерних технологій.

Невідомі витрати $\widetilde{Q}$ у процесі ітераційних наближень знаходимо за формулами $\widetilde{Q} = \Delta_\varphi (n+1)/\gamma$, де квазіконформний інваріант $\gamma = \Delta_\varphi / \Delta_\psi$ отримуємо на підставі умови «конформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників областей G_ω^γ і G_z^γ:

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \gamma_{i,j},$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{\sqrt{\left(x_{i+1,j} - x_{i,j}\right)^2 + \left(y_{i+1,j} - y_{i,j}\right)^2} + \sqrt{\left(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1}\right)^2 + \left(y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1}\right)^2}}{\sqrt{\left(x_{i,j+1} - x_{i,j}\right)^2 + \left(y_{i,j+1} - y_{i,j}\right)^2} + \sqrt{\left(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j}\right)^2 + \left(y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j}\right)^2}}.$$

Розроблена обчислювальна технологія включає в себе алгоритми числового розв'язання відповідних задач, що реалізовані у вигляді процедур для подальшого комп'ютерного моделювання, які автоматизують вибір вузлів та побудову динамічної сітки, розрахунки поля величини швидкості, обчислення фільтраційних витрат та інших невідомих параметрів процесу. Проведено низку числових розрахунків для областей різної конфігурації та при різній дискретизації, які підтверджують збіжність, обчислювальну стійкість та ефективність запропонованих алгоритмів.

Таким чином, на основі синтезу числових методів квазіконформних відображень та сумарних зображень розроблено методику моделювання складних фільтраційних процесів для криволінійних LEF-областей, а також створено обчислювальну технологію розв'язування відповідних нелінійних крайових задач для систем еліптичних диференціальних рівнянь. Використання методу сумарних зображень як компоненти розробленої раніше методики на основі комплексного аналізу дає можливість у комплексі (сумарно) на кожному ітераційному кроці враховувати вплив граничних та навколишніх внутрішніх вузлів, котрі «підправляються» на наступному ітераційному кроці за допомогою так званих умов ортогональності [5], які є наслідками умов Коші-Рімана і, отже, пришвидшує досягнення спряженості шуканих гармонічних функцій.

Розроблені у роботі математичні моделі дозволяють описувати реальні процеси фільтрації (витіснення) вуглеводнів з пласта за умов зворотного впливу характеристик процесу на властивості середовища, дають можливість замінити дороговартісні фізичні експерименти для дослідження впливу техногенно-зумовлених деформацій породи у навколосвердловинних зонах нафтогазових пластів на процеси нафтогазовидобутку. Побудовані математичні моделі і методи розв'язання відповідних задач можуть бути використані для виконання прогнозних розрахунків при проектуванні розробок родовищ нафти і газу, застосовуватися для експертної оцінки результатів різноманітних технічних заходів, що проводяться з метою інтенсифікації нафтогазовилучення, виявлення і ліквідації застійних зон тощо. Створена обчислювальна технологія містить комплекс комп'ютерних програм (процедур), що реалізують розроблені у роботі алгоритми, які є універсальними і придатними для розв'язування також інших, не описаних тут задач, зокрема, екологічних та природоохоронних.

1. Бомба А. Я. Обчислювальні технології на основі методів комплексного аналізу та сумарних зображень: [монографія] / Бомба А. Я., Гладка О. М., Кузьменко А. П. – Рівне : ТзОВ «Ассоль», 2016. – 283 с. **2.** Гладка О. М. Системний підхід до математичного моделювання фільтраційних процесів у багатозв'язних криволінійних LEF-пластах / Гладка О. М. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2016. – № 2. – С. 58–73. **3.** Bomba A. Y. Methods of Complex Analysis of Parameters Identification of Quasiideal Processes in Nonlinear Doubly-layered Porous Pools / Andrey Y. Bomba, Elena N. Hladka // Journal of Automation and Information Sciences. – 2014. – Vol. 46, Issue 11. – P. 50–62. **4.** Bomba A. Y., Hladka O. M. Problems of identification of the parameters of quasiideal filtration processes in nonlinear layered porous media // Journal of Mathematical Sciences. – Springer Media New York, 2017. – 220, No. 2. – P. 213–225. **5.** Методи комплексного аналізу : монографія / Бомба А. Я., Каштан С. С., Пригорницький Д. О., Ярощак С. В. – Рівне : НУВГП, 2013. – 415 с. **6.** Ляшко И. И. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации / Ляшко И. И., Великоиваненко И. М. – К. : Наукова думка, 1973. – 264 с. **7.** Гладка О. М. Про розв'язок крайової задачі для рівняння дивергентного типу у нескінченній багатошаровій смузі / Гладка О. М., Кузьменко А. П. // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач : зб. наук. праць. – К. : Ін-т матем. НАН України, 1995. – Вип. 9. – С. 168–173. **8.** Hladka O., Bomba A. The complex analysis method of numerical identification of parameters of quasiideals processes in doubly-connected nonlinear-layered curvilinear domains // Journal of Mathematics and System Science (USA). – 2014. – Vol. 4, № 7 (Ser. No. 29). – P. 514–521.

Рецензент: д.п.н., професор Тулашвілі Ю. Й. (НУВГП)

Hladka O. M., Candidate of Engineering (PH.D.), Associate Professor
(National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

MODERN COMPUTATIONAL TECHNOLOGIES OF COMPUTER MODELING PROCESSES OF UNDERGROUND HYDRODYNAMICS

The paper is devoted to developing an approach based on the synthesis of numerical methods quasiconformal mappings, summary representations and task decomposition to mathematical modeling of nonlinear quasiideal filtration processes in technogenic-deformable reservoirs of water or oil and gas, in which geometry of zones of heterogeneity determined considering the reverse influence characteristics of the process on the conductivity of environment, and to solving appropriate boundary value problems with the ability to determine the model parameters. Complex computational technology of solving boundary value problems describing mathematical models of complex nonlinear hydrodynamic underground filtration processes under conditions of mutual characteristics of the process and the

environment was developed to further study these processes via computer simulation. Was put the idea of synthesis of numerical methods quasiconformal mappings, summary representations methods and method of domain decomposition by Schwarz in this approach. Developed algorithm automatically solves the problem of choice of nodes and the construction of a dynamic grid, finding the lines between the layers constant coefficient of conductivity of the medium, calculate the total flow.
***Keywords:* mathematical modeling, filtration processes, numerical methods quasiconformal mappings, summary representations methods.**

Гладкая Е. Н., к.т.н., доцент (Национальный університет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)

СОВРЕМЕННЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПОДЗЕМНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Разработана комплексная вычислительная технология решения краевых задач, описывающих математические модели сложных нелинейных фильтрационных процессов подземной гидродинамики в условиях взаимовлияния характеристик процесса и среды, с целью дальнейшего исследования этих процессов с помощью компьютерного моделирования. В основу подхода положена идея синтеза численных методов квазиконформных отображений, суммарных представлений и альтернирующего метода Шварца декомпозиции области.
***Ключевые слова*: математическое моделирование, фильтрационные процессы, численные методы квазиконформных отображений, методы суммарных представлений.**
