

К ПРИМЕНЕНИЮ СИНГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ В РАСЧЁТЕ БАЛОК ПРИ ДЕЙСТВИИ ЛОКАЛЬНЫХ НАГРУЗОК

Дызов К.Г. (Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)

Расчёту балок, испытывающих действие локальных нагрузок, посвящено достаточно большое количество публикаций, в которых, как правило, излагаются существующие традиционные методы. В данной статье предлагается простая и эффективная методика расчёта, основанная на использовании аппарата обобщённых функций, что даёт возможность получать решения на всей области балки, включая и зоны воздействия.

Дифференциальное уравнение линии прогиба балки под действием произвольной нагрузки в безразмерных величинах имеет вид [1]

$$\tilde{w}^{\text{IV}} = \tilde{q}(\tilde{x}), \quad (1)$$

где $\tilde{w}(\tilde{x}) = w(x)/L$ - обобщённый прогиб, $\tilde{x} = x/L$ - обобщённая координата, $\tilde{q}(\tilde{x}) = \frac{q(x) \cdot L^3}{EI}$ - величина обобщённой нагрузки, $q(x)$ - сама нагрузка, действующая на балку, $E \cdot I$ - жёсткость балки на изгиб, E - модуль упругости материала, I - момент инерции сечения балки, L - длина балки. Поперечная сила Q и изгибающий момент M определяются из следующих уравнений

$$\tilde{w}'' = -\tilde{M}, \quad \tilde{w}''' = -\tilde{Q}, \quad (2)$$

где $\tilde{M} = \frac{M \cdot L}{EI}$ - обобщённый момент, а $\tilde{Q} = \frac{Q \cdot L^2}{EI}$ - обобщённая пере­резающая сила.

Решение \tilde{w} дифференциального уравнения (1) состоит из суммы двух решений: $\tilde{w} = \tilde{w}_0 + \tilde{w}_q$; \tilde{w}_0 - общее решение однородного уравнения $\tilde{w}^{\text{IV}} = 0$ (фундаментальная система решений) и \tilde{w}_q - частное решение уравнения (1).

В качестве фундаментального решения \tilde{w}_0 можно принять выражение [1]

$$\tilde{w}_0 = C_0 + C_1 \tilde{x} + C_2 \tilde{x}^2 + C_3 \tilde{x}^3, \quad (3)$$

где C_0 , C_1 , C_2 и C_3 - неизвестные константы интегрирования, которые определяются из граничных условий на концах балки. Частное решение \tilde{w}_q можно найти методом Коши [2]

$$\tilde{w}_q = \int_0^x \tilde{w}_0(\tilde{x} - t) \tilde{q}(t) dt, \quad (4)$$

где $\tilde{w}_0(\tilde{x} - t)$ - общее решение однородного уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям

$$\tilde{w}_0(0) = 0; \tilde{w}'_0(0) = 0; \tilde{w}''_0(0) = 0; \tilde{w}'''_0(0) = 1; \quad (5)$$

$\tilde{q}(t)$ - правая часть (1); t - параметр интегрирования. При построении \tilde{w}_0 в (4) используется процедура Коши. Она состоит в том, что общее решение однородного уравнения (3) подчиняют условиям (5), определяя тем самым коэффициенты, входящие в это решение. Умножив эти коэффициенты на соответствующие им решения из фундаментальной системы (3), можно получить \tilde{w}_0 . Продифференцируем трижды (3) и результат подчиним условиям (5). Получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для нахождения C_i , $i = 0,1,2,3$

$$\begin{cases} C_0 + C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 + C_3 \cdot 0 = 0, \\ C_1 + 2C_2 \cdot 0 + 3C_3 \cdot 0 = 0, \\ 2C_2 + 6C_3 \cdot 0 = 0, \\ 6C_3 = 1 \end{cases}$$

из которой находим, что $C_0 = C_1 = C_2 = 0, C_3 = \frac{1}{6}$ и формула (4) принимает вид

$$\tilde{w}_q = \frac{1}{6} \int_0^x (\tilde{x} - t)^3 \tilde{q}(t) dt. \quad (6)$$

Формула (6) является общей для нахождения частного решения уравнения (1) для произвольной нагрузки $\tilde{q}(\tilde{x})$.

При решении задач механики для описания различных видов локальных нагрузок удобно использовать разрывные и сингулярные функции: единичные функции - $e(x)$, дельта - функции - $\delta(x)$, а также их производные - $\delta'(x)$ [3, 4]. Эти функции определяются следующим образом

$$e(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x \geq 0, \end{cases} \quad \delta(x) = \frac{de(x)}{dx}, \quad \delta'(x) = \frac{d\delta(x)}{dx}.$$

Единичная функция, дельта-функция и её производная обладают рядом полезных свойств

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq 0, \\ \infty & \text{при } x = 0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \delta(x) dx = f(0) \cdot e(x),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e(x-a) dx = e(x-a) \int_a^{\infty} f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \quad (7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \delta(x) dx = f(0) \cdot e(x).$$

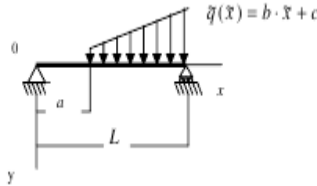


Рис. 1

В (7) функция $f(x)$ - непрерывна¹. В случае если на балку действует нагрузка, изображённая на рис. 1, частное решение (1) с учётом свойств единичной функции (7) имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{w}_q &= \frac{1}{6} \int_0^{\tilde{x}} (\tilde{x}-t)^3 \tilde{q}(t) e(t-a) dt = \frac{1}{6} \int_a^{\tilde{x}} (\tilde{x}-t)^3 (b \cdot t + c) e(t-a) dt = \\ &= \frac{1}{6} \left[\left(\frac{1}{20} b \tilde{x}^5 + \frac{1}{4} c \tilde{x}^4 \right) - \left(\frac{1}{2} a^2 b \tilde{x}^3 + a c \tilde{x}^3 - a^3 b \tilde{x}^2 - \frac{3}{2} a^2 c \tilde{x}^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3}{4} a^4 b \tilde{x} + a^3 c \tilde{x} - \frac{1}{5} a^5 b - \frac{1}{4} a^4 c \right) \right] \cdot e(\tilde{x}-a). \end{aligned} \quad (8)$$

Производные от \tilde{w}_q соответственно равны

¹ В теории обобщённых функций $f(x)$ называется носителем сингулярных функций.

$$\begin{aligned} \tilde{w}'_4 = & \frac{1}{6} \left[\left(0,25b\tilde{x}^4 + c\tilde{x}^3 \right) - \left(1,5a^2b\tilde{x}^2 + 3ac\tilde{x} - 2a^3b\tilde{x} - 3a^2c\tilde{x} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 0,75a^4b + a^3c \right) \right] \cdot e(\tilde{x} - a) + \frac{1}{6} \left[\left(\frac{1}{20}b\tilde{x}^5 + \frac{1}{4}c\tilde{x}^4 \right) - \left(\frac{1}{2}a^2b\tilde{x}^3 + \right. \right. \\ & \left. \left. + ac\tilde{x}^3 - \frac{3}{2}a^2c\tilde{x}^2 + \frac{3}{4}a^4b\tilde{x} + a^3c\tilde{x} - \frac{1}{5}a^5b - \frac{1}{4}a^4c \right) \right] \cdot \delta(\tilde{x} - a). \end{aligned}$$

Здесь второе слагаемое, содержащее $\delta(\tilde{x} - a)$, является чисто символическим: оно сигнализирует о том, что при дифференцировании разрывной функции (8) в точке $\tilde{x} = a$ имеется разрыв со скачком равным этому слагаемому при $\tilde{x} = a$. В наших расчётах оно не используется и в дальнейших выкладках не приводится.²

$$\begin{aligned} \tilde{w}''_4 = & \frac{1}{6} \left[\left(b\tilde{x}^3 + 3c\tilde{x}^2 \right) - \left(3a^2b + 6ac \right) \right] \cdot e(\tilde{x} - a), \\ w'''_4 = & \frac{1}{6} \left[\left(3bx^2 + 6cx \right) - \left(3a^2b + 6ac \right) \right] \cdot e(x - a). \end{aligned}$$

Выше в формулах: a - координата начала точки приложения нагрузки $\tilde{q}(x) = b \cdot x + c$; b и c - коэффициенты, описывающие закон её изменения; $e(\tilde{x} - a)$ - единичная функция с разрывом в точке $\tilde{x} = a$.

В случае, когда в $\tilde{q}(x) = b \cdot x + c$, $b = 0$, нагрузка становится полой с постоянной интенсивностью $\tilde{q} = c$ (рис. 2) и выражения (8) существенно упрощаются

$$\begin{aligned} \tilde{w}_4 = & \frac{\tilde{q}}{24} (\tilde{x} - a)^4 \cdot e(\tilde{x} - a), \quad \tilde{w}'_4 = \frac{\tilde{q}}{6} (\tilde{x} - a)^3 \cdot e(\tilde{x} - a), \\ \tilde{w}''_4 = & \frac{\tilde{q}}{2} (\tilde{x} - a)^2 \cdot e(\tilde{x} - a), \quad \tilde{w}'''_4 = \tilde{q} (\tilde{x} - a) \cdot e(\tilde{x} - a). \end{aligned}$$

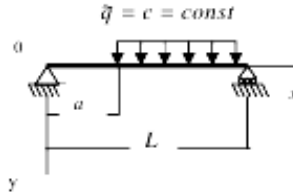


Рис. 2

² В ряде задач расчёта элементов строительных конструкций с резким изменением жёсткости учёт скачков разрывов обязателен, см. например [4].

Если на балку в точке $\tilde{x} = a$ действует сосредоточенная сила интенсивности \tilde{q} , частное решение (6) принимает вид

$$\tilde{w}_q = \frac{1}{6} \int_0^{\tilde{x}} (\tilde{x} - t)^3 \tilde{q} \cdot \delta(t - a) dt. \quad (9)$$

В (9) выражение $\tilde{q} \cdot \delta(t - a)$ означает, что в точке $t = a$ на балку действует сосредоточенная сила интенсивностью \tilde{q} . Из (9) с учётом свойств функции $\delta(x)$ (7) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{w}_q &= \frac{\tilde{q}}{6} (\tilde{x} - a)^3 \cdot e(\tilde{x} - a), & \tilde{w}'_q &= \frac{\tilde{q}}{2} (\tilde{x} - a)^2 \cdot e(\tilde{x} - a), \\ \tilde{w}''_q &= \tilde{q} (\tilde{x} - a) \cdot e(\tilde{x} - a), & \tilde{w}'''_q &= \tilde{q} (\tilde{x} - a) \cdot e(\tilde{x} - a). \end{aligned}$$

Для сосредоточенного момента \tilde{M} интенсивности \tilde{q} с учётом свойств функции $\delta'(x)$ (7), частное решение и его производные принимают следующий вид

$$\begin{aligned} \tilde{w}_q &= \frac{1}{6} \int_0^{\tilde{x}} (\tilde{x} - t)^3 \tilde{q} \cdot \delta'(t - a) dt = \frac{3\tilde{q}}{6} \int_0^{\tilde{x}} (\tilde{x} - t)^2 \cdot \delta(t - a) dt = \\ &= \frac{q}{2} (\tilde{x} - a)^2 \cdot e(\tilde{x} - a), & \tilde{w}'_q &= \tilde{q} (\tilde{x} - a) \cdot e(\tilde{x} - a), & \tilde{w}''_q &= \tilde{q} \cdot e(\tilde{x} - a), \\ & & \tilde{w}'''_q &= 0. \end{aligned}$$

Выражение $\tilde{q} \cdot \delta'(t - a)$ означает, что в точке $t = a$ на балку действует сосредоточенный момент интенсивностью \tilde{q} .

Примеры расчётов. Построить линию прогиба \tilde{w} , эпюры момента \tilde{M} и перерезывающей силы \tilde{Q} балки с жёсткой заделкой на концах, под действием нагрузки $\tilde{q}(\tilde{x}) = (-2\tilde{x} + 2) \cdot e(\tilde{x} - 0,5)$, действующей с точки $\tilde{x} = 0,5$, рис. 3 а.

Условию жёсткой заделки соответствуют следующие граничные условия: $\tilde{w}(0) = \tilde{w}'(0) = 0$ при $\tilde{x} = 0$ и $\tilde{w}(1) = \tilde{w}'(1) = 0$ при $\tilde{x} = 1$. С учётом (3) получаем следующую систему для нахождения констант интегрирования

$$\begin{cases} C_0 + C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 + C_3 \cdot 0 = 0, \\ C_1 + 2C_2 \cdot 0 + 3C_3 \cdot 0 = 0, \\ C_0 + C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 + C_3 \cdot 1 = -\tilde{w}_q(1), \\ C_1 + 2C_2 \cdot 1 + 3C_3 \cdot 1 = -\tilde{w}'_q(1). \end{cases}$$

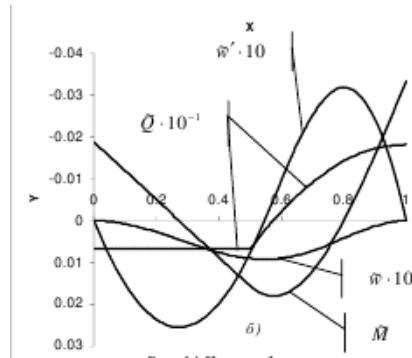
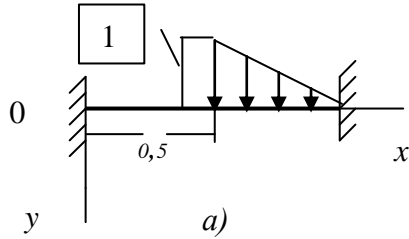


Рис. 3

Из первого уравнения системы находим, что $C_0 = 0$, а из второго, что $C_1 = 0$. Для оставшихся неизвестных получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} C_2 + C_3 = -\tilde{w}_q(1), \\ 2C_2 + 3C_3 = -\tilde{w}'_q(1), \end{cases}$$

из которой находим c_2 и c_3 . На рис. 3 б приведены масштабированные обобщённые кривые $\tilde{w}, \tilde{w}', \tilde{M}, \tilde{Q}$, а на рис. 4 представлен фрагмент Excel – таблицы расчёта данного примера.

На рис. 5 приведены обобщённые кривые $\tilde{w}, \tilde{w}', \tilde{M}, \tilde{Q}$ свободно опертой балки, под действием полосовой нагрузки (рис. 2) $\tilde{q}(\tilde{x}) = 1 \cdot e(\tilde{x} - 0,5)$, действующей с точки $\tilde{x} = 0,5$. На рис. 6 б приведены кривые $\tilde{w}, \tilde{w}', \tilde{M}, \tilde{Q}$ балки с жёсткой заделкой, под действием сосредоточенного момента $\tilde{M} = 1 \cdot \delta'(\tilde{x} - 0,5)$ в точке $\tilde{x} = 0,5$. На рис. 7 приведены кривые $\tilde{w}, \tilde{w}', \tilde{M}, \tilde{Q}$ консольной балки, под действием сосредоточенной силы $\tilde{q}(\tilde{x}) = 1 \cdot \delta(\tilde{x} - 1)$, приложенной на свободном конце.

	A	B	C	D	E	F
1	a=	0,5	b=	-2	c=	2
2	$\eta'_v =$	0,00208333	$\eta'_v =$	0,015625		
3						
4	1	1	-0,00208			
5	2	3	-0,01563			
6						
7	3	-1	C2=	0,009375		
8	-2	1	C3=	-0,01146		
9						
10	x	$\eta \cdot 10$	η'	$\eta'' \cdot 10^{-1}$	$\eta' \cdot 10$	
11	0	0	-0,01875	0,006875	0	
12	0,01	9,2604E-06	-0,01806	0,006875	0,001841	
13	0,02	3,6583E-05	-0,01738	0,006875	0,003613	
14	0,03	8,1281E-05	-0,01689	0,006875	0,005346	

110	0,99	1,6365E-05	-0,03152	-0,01812	-0,00324
111	1	-1,301E-17	-0,03333	-0,01813	0

Рис. 4

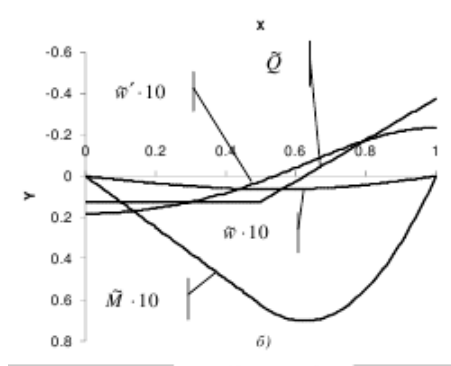


Рис. 5

Заключение

В заключение заметим, что изложенная методика расчёта хорошо программируется и позволяет получать, например в MS Excel, наглядные интерактивные графические решения.

Summary

The use of the apparatus of generalized functions in the analysis of beams, experiencing the action of local loads, makes it possible to obtain a simple and effective solutions.

1. Тимошенко С. П., Гере Дж. Механика материалов, “Мир”, Москва, 1976, 669 с.
2. Подгорный А. Н., Марченко Г. А., Пустыльников В. И. Основы и методы прикладной теории упругости, Киев, “Вища школа”, 1981, 328 с.
3. Лазарян В. А., Коношенко С. И. Обобщённые функции в задачах механики,

“Наукова думка”, 1974, 192 с. 4. Дызов К. Г. К применению сингулярных функций в расчёте пластин при действии локальных нагрузок, “Известия ВУ-Зов, Строительство и архитектура”, №10, 1991, Новосибирск, с. 19-23.

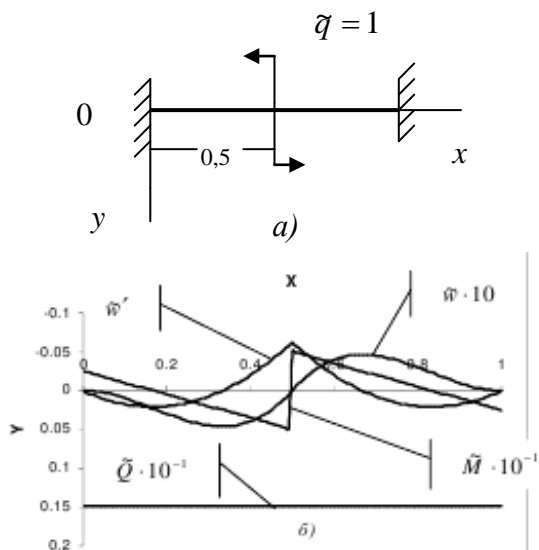


Рис. 6

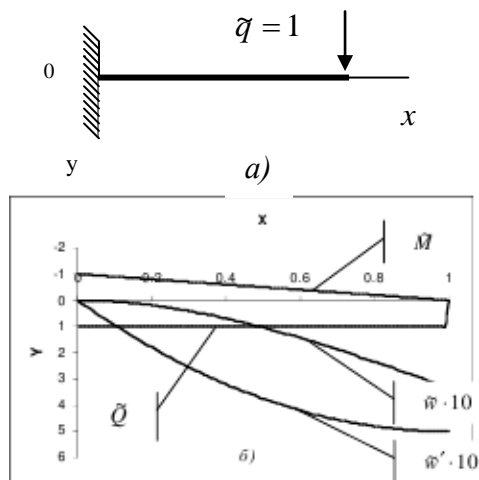


Рис. 7