УДК 624.07:519.832.4

ОПТИМАЛЬНЕ РІШЕННЯ ДЛЯ ПІДБОРУ ПЛОЩ ПОПЕРЕЧНИХ ПЕРЕРІЗІВ ОПОР БУДІВЕЛЬНОЇ КОНСТРУКЦІЇ-ПЛАТФОРМИ У ЇЇ УЗАГАЛЬНЕНІЙ МОДЕЛІ ЗА ОДНІЄЇ ПЕРЕОЦІНКИ В ІНТЕРВАЛЬНИХ НЕВИЗНАЧЕНОСТЯХ

Романюк В.В. (*Хмельницький національний університет, м. Хмельницький*)

Розглядається антагоністична модель підбору площ поперечних перерізів опор будівельної конструкції-платформи, де потенційне навантаження на платформу конструкції нормоване до одиниці. Досліджувана модель породжена інтервальними невизначеностями як оцінками нормованих площ поперечних перерізів опор конструкції. Доводяться два твердження про оптимальне рішення проектувальника у такій моделі при одній переоцінці в інтервальних невизначеностях, де друге твердження випливає за порушення умов першого.

Вступ

Математичне моделювання, котре передує макетному або натурному моделюванню, є фундаментальною складовою прикладної математики і дозволяє проводити необмежені маніпуляції з параметрами досліджуваного об’єкта. Особливо це актуально у будівництві, де розробка навіть макетної моделі не має смислу без ґрунтовного аналізу жорсткості, стійкості і надійності будівельної конструкції [1, 2], а натурна модель і являє собою, власне, кінцевий результат. Звичайно, опорні конструкції-платформи окремо не є надто складними елементами будівельного процесу, однак конструкції етажеркового типу, де опорна конструкція-платформа є “атомарною” одиницею, повинні витримувати визначене вертикальне навантаження і при цьому бути прийнятними за масогабаритними показниками [3, 4]. Тому багатоопорні конструкції мають проектуватись як за оптимальною кількістю опор, так і за оптимальних площ їх поперечних перерізів. Проте часто виникають задачі проектування, де потенційне навантаження на платформу конструкції коливається [5] у широких межах, а локальні навантаження на центри опор конструкції не обов’язково є рівнорозподіленими, причому їх попередні оцінки не можуть бути точковими. Звісно, тут, з одного боку, не бажано аж надто багато витрачати будівельного матеріалу, якщо навантаження на платформу виявиться невеликим [6, 7], а з іншого — необхідно забезпечити надійність конструкції за якнайбільших перевантажень. Але вирішення таких задач, результатом чого є й економія ресурсів, і зменшення геометричних форм, ускладнюється ще й тим, що інтервальне оцінювання потенційних локальних навантажень на центри опор теж є суб'єктивним, внаслідок чого традиційні методи досягнення необхідного результату потребують уточнення.

Аналіз відомих першоджерел і виділення невирішеної частини проблеми

Оскільки потенційне навантаження на платформу конструкції коливається у широких межах, то його можна нормувати до одиничного [8, 9]. Тоді при одиничному нормуванні сумарної площі поперечних перерізів опор конструкції локальні навантаження на центри опор і площі поперечних перерізів опор оцінюються відповідно аналогічними інтервалами або відрізками ненульової міри [8, 9]. В N-опорній конструкції при $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ нормованим навантаженням на j-ту опору у формі $\left[a_j; b_j\right]$-невизначеності є

$$x_j \in \left[a_j; b_j\right] \subset (0; 1) \text{ при } a_j < b_j \quad \forall\, j = \overline{1, N-1} \tag{1}$$

та площею поперечного перерізу j-ї опори у формі тієї ж $\left[a_j; b_j\right]$-невизначеності є

$$y_j \in \left[a_j; b_j\right] \subset (0; 1) \text{ при } a_j < b_j \quad \forall\, j = \overline{1, N-1}. \tag{2}$$

Навантаження і площа поперечного перерізу N-ї опори визначаються автоматично завдяки одиничному нормуванню:

$$\sum_{k=1}^{N} x_k = 1, \quad \sum_{k=1}^{N} y_k = 1. \tag{3}$$

Для визначення оптимальних площ поперечних перерізів опор конструкції використовують антагоністичну модель [10] у формі опуклої гри з ядром

$$T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = T(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}; y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}) =$$

$$= \max\left\{ \frac{x_1}{y_1^2}, \frac{x_2}{y_2^2}, \ldots, \frac{x_{N-1}}{y_{N-1}^2}, \frac{1 - \sum\limits_{k=1}^{N-1} x_k}{\left(1 - \sum\limits_{k=1}^{N-1} y_k\right)^2} \right\} =$$

$$= \max\left\{\left\{\frac{x_j}{y_j^2}\right\}_{j=1}^{N-1}, \frac{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} x_k}{\left(1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} y_k\right)^2}\right\} \tag{4}$$

на декартовому добутку

$$\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} = \prod_{p=1}^{2}\left(\prod_{j=1}^{N-1}\left[a_j;\, b_j\right]\right) \subset \prod_{d=1}^{2N-2}(0;\,1) \subset \prod_{d=1}^{2N-2}[0;\,1] \subset \mathbb{R}^{2N-2} \tag{5}$$

гіперпаралелепіпеда чистих стратегій (нормованих навантажень на опори)

$$\boldsymbol{X} = \prod_{j=1}^{N-1}\left[a_j;\, b_j\right] \subset \prod_{j=1}^{N-1}(0;\,1) \subset \prod_{j=1}^{N-1}[0;\,1] \subset \mathbb{R}^{N-1} \tag{6}$$

першого гравця і гіперпаралелепіпеда чистих стратегій (нормованих площ поперечних перерізів опор)

$$\boldsymbol{Y} = \prod_{j=1}^{N-1}\left[a_j;\, b_j\right] \subset \prod_{j=1}^{N-1}(0;\,1) \subset \prod_{j=1}^{N-1}[0;\,1] \subset \mathbb{R}^{N-1} \tag{7}$$

другого (проектувальника), де $\mathbf{X} = \left[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_{N-2} \quad x_{N-1}\right] \in \boldsymbol{X}$ й $\mathbf{Y} = \left[y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_{N-2} \quad y_{N-1}\right] \in \boldsymbol{Y}$. Опуклість цієї гри [11] дозволяє шукати оптимальну стратегію (рішення) проектувальника у формі $(N-1)$-вимірної точки

$$\mathbf{Y}_* = \left[y_1^* \quad y_2^* \quad \cdots \quad y_{N-2}^* \quad y_{N-1}^*\right] \in \prod_{j=1}^{N-1}\left[a_j;\, b_j\right] = \boldsymbol{Y}\,, \tag{8}$$

котра існує згідно з відповідною теоремою [10] про чисті оптимальні стратегії другого гравця в опуклій антагоністичній грі.

Легко бачити, що

$$\mathbf{Y}_* = \left[y_1^* \quad y_2^* \quad \cdots \quad y_{N-2}^* \quad y_{N-1}^*\right] \in \arg\min_{\mathbf{Y} \in \prod\limits_{i=1}^{N-1}[a_i;\, b_i]} \left\{\max_{\mathbf{X} \in \prod\limits_{j=1}^{N-1}\left[a_j;\, b_j\right]} T(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\right\} =$$

$$= \arg\min_{\mathbf{Y} \in \prod\limits_{i=1}^{N-1}[a_i;\, b_i]} \left\{\max\left\{\left\{\frac{b_j}{y_j^2}\right\}_{j=1}^{N-1}, \frac{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k}{\left(1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} y_k\right)^2}\right\}\right\}, \tag{9}$$

де спочатку перевіряється, чи компоненти $\left\{y_j^*\right\}_{j=1}^{N-1}$ точки (8) є коренями рівності

$$v_* = \frac{b_j}{\left(y_j^*\right)^2} = \frac{1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k}{\left(1-\sum_{k=1}^{N-1} y_k^*\right)^2} \quad \forall\ j=\overline{1,\ N-1} \tag{10}$$

для визначення ціни гри v_*. Очевидно, що корені [9, 12] рівності (10)

$$y_j^* = \frac{\sqrt{b_j}}{\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k} + \sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k}} \quad \forall\ j=\overline{1,\ N-1} \tag{11}$$

повинні бути відповідними координатами точки гіперпаралелепіпеда (7). Іншими словами, має бути виконано

$$y_j^* \in \left[a_j;\, b_j\right] \quad \forall\ j=\overline{1,\ N-1}. \tag{12}$$

Якщо ж $\exists\ r \in \left\{\overline{1,\ N-1}\right\}$ таке, що

$$\frac{\sqrt{b_r}}{\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k} + \sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k}} \notin \left[a_r;\, b_r\right], \tag{13}$$

то число в (11) при $j=r$ вже не є r-ю компонентою оптимальної стратегії (8). При цьому рівність (10) все ще може бути виконана у межах гіперпаралелепіпеда (7) хоча б частково, для деякої кількості її частин, але вже за інших значень компонент $\left\{y_j^*\right\}_{j=1}^{N-1}$. Оптимальні рішення проектувальника за різних умов порушень типу (13) для конструкцій з кількістю опор від двох до чотирьох досліджені у працях [8, 9, 12], але питання про оптимальну поведінку проектувальника у випадку з довільною кількістю опор при $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ на даний момент залишалося відкритим.

Мета і завдання статті

Відштовхуватимемось від того, що для N-опорної конструкції, де $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, відомі інтервальні невизначеності $\left\{\left[a_j;\, b_j\right]\right\}_{j=1}^{N-1}$ й

$\exists\ r \in \left\{\overline{1,\ N-1}\right\}$ таке, що виконано (13) при

$$\frac{\sqrt{b_i}}{\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k} + \sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k}} \in \left[a_i;\, b_i\right] \quad \forall\ i \in \left\{\overline{1,\ N-1}\right\} \setminus \{r\}. \tag{14}$$

Разом з (13) це означає, що серед елементів множини $\left\{\left[a_j;\, b_j\right]\right\}_{j=1}^{N-1}$ лише інтервальна невизначеність $\left[a_r;\, b_r\right]$ була оцінена з деякою похибкою, тобто слід було брати або менше значення a_r, або більше значення b_r. Далі прийматимемо, що у відрізку $\left[a_r;\, b_r\right]$ саме лівий кінець був оцінений некоректно й виконано

$$\frac{\sqrt{b_r}}{\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k} + \sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k}} < a_r \quad \text{для} \quad \exists\ r \in \left\{\overline{1,\ N-1}\right\}. \tag{15}$$

Тоді і визначимо компоненти $\left\{y_j^*\right\}_{j=1}^{N-1}$ оптимального рішення проектувальника (8) для такої ситуації, виокремивши відповідні твердження у теореми. В умовах даних інтервальних невизначеностей $\left\{\left[a_j;\, b_j\right]\right\}_{j=1}^{N-1}$ це дозволить якнайкращим способом розподіляти нормовані площі поперечних перерізів опор платформи, що запобігатиме максимальному перевантаженню конструкції і пролонгує строк її експлуатації.

Твердження про оптимальне рішення проектувальника (8) у грі з ядром (4) за умов (15) і (14)

Теорема 1. В антагоністичній грі з ядром (4) на декартовому добутку (5) гіперпаралелепіпедів (6) і (7) за умов (15) і (14) другий гравець володіє оптимальною стратегією (8) з r-ю компонентою

$$y_r^* = a_r \tag{16}$$

та компонентами

$$y_i^* = \frac{\left(1-a_r\right)\sqrt{b_i}}{\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k} - \sqrt{b_r} + \sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k}} \quad \forall\ i \in \left\{\overline{1,\ N-1}\right\} \setminus \{r\} \tag{17}$$

при

$$\frac{(1-a_r)\sqrt{b_i}}{\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k}-\sqrt{b_r}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}} \geqslant a_i \quad \forall\, i \in \left\{\overline{1,\, N-1}\right\} \setminus \{r\}. \tag{18}$$

Доведення. Оскільки виконано (15), то r -а компонента

$$y_r^* > \frac{\sqrt{b_r}}{\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}} \tag{19}$$

і, підставляючи (19) та (14) як $\left\{y_i^*\right\}_{i\in\left\{\overline{1,\, N-1}\right\}\setminus\{r\}}$ у частини $\left\{\frac{b_j}{\left(y_j^*\right)^2}\right\}_{j=1}^{N-1}$,

$\dfrac{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}{\left(1-\sum_{k=1}^{N-1}y_k^*\right)^2}$ рівності (10), отримаємо строгу нерівність

$$\frac{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}{\left(1-\sum_{k=1}^{N-1}y_k^*\right)^2} > \frac{b_i}{\left(y_i^*\right)^2} > \frac{b_r}{\left(y_r^*\right)^2}. \tag{20}$$

Мінімізація за (9) максимальної частини нерівності (20) принаймні для r -ї компоненти дає (16), адже тоді

$$\frac{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}{\left(1-\sum_{k=1}^{N-1}y_k^*\right)^2} > \frac{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}{\left(1-a_r-\sum_{k\in\left\{\overline{1,\, N-1}\right\}\setminus\{r\}}y_k^*\right)^2} >$$

$$> \frac{b_i}{\left(y_i^*\right)^2} > \frac{b_r}{a_r^2} > \frac{b_r}{\left(y_r^*\right)^2} \quad \text{при} \quad y_r^* > a_r, \tag{21}$$

тому й ніяке значення $y_r^* > a_r$ не буде компонентою стратегії (8). Отже, для значень (14) як $\left\{y_i^*\right\}_{i\in\left\{\overline{1,\, N-1}\right\}\setminus\{r\}}$ маємо строгу нерівність

$$\frac{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k}{\left(1-a_r-\sum\limits_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{r\}} y_k^*\right)^2} > \frac{b_i}{\left(y_i^*\right)^2} > \frac{b_r}{a_r^2}\,, \tag{22}$$

з якої видно, що її максимальна частина може бути зменшена за рахунок зменшення значень (14) компонент $\left\{y_i^*\right\}_{i\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{r\}}$ до таких значень, за яких частина нерівності (22)

$$\frac{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k}{\left(1-a_r-\sum\limits_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{r\}} y_k^*\right)^2} > \frac{b_i}{\left(y_i^*\right)^2} \tag{23}$$

“вирівняється” у рівність

$$\frac{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k}{\left(1-a_r-\sum\limits_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{r\}} y_k^*\right)^2} = \frac{b_i}{\left(y_i^*\right)^2}\,. \tag{24}$$

Далі з рівності (24) отримуємо:

$$y_i^*\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k} = \sqrt{b_i}\left(1-a_r-\sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{r\}} y_k^*\right) \tag{25}$$

й

$$y_u^* = \sqrt{\frac{b_u}{b_i}}\,y_i^* \quad \forall\, i\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{r\} \quad \text{та} \quad \forall\, u\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{r\}\,. \tag{26}$$

Тепер, підставляючи (26) у праву частину рівності (25), маємо

$$y_i^*\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k} = \sqrt{b_i}\left(1-a_r\right)-\sqrt{b_i}\,y_i^*-\sqrt{b_i}\sum_{u\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{r,\,i\}} y_u^* =$$

$$= \sqrt{b_i}\left(1-a_r\right)-\sqrt{b_i}\,y_i^*-\sqrt{b_i}\sum_{u\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{r,\,i\}} \sqrt{\frac{b_u}{b_i}}\,y_i^* =$$

$$= \sqrt{b_i}\left(1-a_r\right)-\sqrt{b_i}\,y_i^* - y_i^* \sum_{u\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{r,\,i\}} \sqrt{b_u} = \sqrt{b_i}\left(1-a_r\right)-$$

$$-y_i^*\left(\sqrt{b_i}+\sum_{u\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{r,\,i\}} \sqrt{b_u}\right) = \sqrt{b_i}\left(1-a_r\right)-y_i^*\left(\sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{r\}} \sqrt{b_k}\right), \quad (27)$$

звідки випливає (17). Звичайно, тут має бути виконано

$$\frac{\left(1-a_r\right)\sqrt{b_i}}{\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k}-\sqrt{b_r}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}} \in \left[a_i;\, b_i\right] \quad \forall\, i\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{r\}, \qquad (28)$$

інакше рівність (24) не виконуватиметься у межах гіперпаралелепіпеда (7). Тому вимога (18) є очевидною. А вимога

$$\frac{\left(1-a_r\right)\sqrt{b_i}}{\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k}-\sqrt{b_r}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}} \leqslant b_i \quad \forall\, i\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{r\} \qquad (29)$$

не потрібна, адже

$$\frac{\left(1-a_r\right)\sqrt{b_i}}{\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k}-\sqrt{b_r}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}} - \frac{\sqrt{b_i}}{\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}} =$$

$$= \sqrt{b_i}\,\frac{\left(1-a_r\right)\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k}+\left(1-a_r\right)\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}-\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k}+\sqrt{b_r}-\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}}{\left(\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k}-\sqrt{b_r}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)} =$$

$$= \sqrt{b_i}\,\frac{-a_r\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k}-a_r\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}+\sqrt{b_r}}{\left(\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k}-\sqrt{b_r}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)} =$$

$$= \sqrt{b_i}\,\frac{\sqrt{b_r} - a_r\left(\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k} + \sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)}{\left(\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k} - \sqrt{b_r} + \sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k} + \sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)} < 0$$

$$\forall\, i \in \left\{\overline{1,\, N-1}\right\} \setminus \{r\} \qquad (30)$$

завдяки (15), а це означає автоматичне виконання нерівності (29) тому, що виконано (14). Теорему доведено.

Слід зазначити, що внаслідок (14) і (30) нерівність (29) виконана строго: якими б не були значення (14), для “вирівнювання” нерівності (23) у рівність (24) компоненти $\left\{y_i^*\right\}_{i\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{r\}}$ необхідно одночасно брати меншими за значення (14). Якщо ж хоча б одну з $N-2$ належностей у (28) порушено, тобто не виконано (18), рівність (24) не виконуватиметься у межах гіперпаралелепіпеда (7), і значення (17) вже не будуть компонентами оптимальної стратегії (8). Проілюструємо це у наступному твердженні.

Теорема 2. Нехай в антагоністичній грі з ядром (4) на декартовому добутку (5) гіперпаралелепіпедів (6) і (7) виконані умови (15) і (14), причому існує непорожня множина індексів $T \subset \left\{\overline{1,\, N-1}\right\} \setminus \{r\}$ така, що

$$\frac{(1-a_r)\sqrt{b_t}}{\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k} - \sqrt{b_r} + \sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}} < a_t \quad \forall\, t \in T \subset \left\{\overline{1,\, N-1}\right\} \setminus \{r\} \qquad (31)$$

та

$$\frac{(1-a_r)\sqrt{b_i}}{\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k} - \sqrt{b_r} + \sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}} \geqslant a_i \quad \forall\, i \in \left\{\left\{\overline{1,\, N-1}\right\} \setminus \{r\}\right\} \setminus T\,. \qquad (32)$$

Тоді у такій грі другий гравець володіє оптимальною стратегією (8) з r-ю компонентою (16), компонентами

$$y_t^* = a_t \quad \forall\, t \in T \subset \left\{\overline{1,\, N-1}\right\} \setminus \{r\} \qquad (33)$$

та компонентами

$$y_i^* = \frac{\left(1 - \sum\limits_{k \in T \cup \{r\}} a_k\right)\sqrt{b_i}}{\sum\limits_{k \in \left\{\overline{1,\, N-1}\right\} \setminus \{T \cup \{r\}\}} \sqrt{b_k} + \sqrt{1 - \sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k}} \quad \forall\, i \in \left\{\left\{\overline{1,\, N-1}\right\} \setminus \{r\}\right\} \setminus T \tag{34}$$

при

$$\frac{\left(1 - \sum\limits_{k \in T \cup \{r\}} a_k\right)\sqrt{b_i}}{\sum\limits_{k \in \left\{\overline{1,\, N-1}\right\} \setminus \{T \cup \{r\}\}} \sqrt{b_k} + \sqrt{1 - \sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k}} \geqslant a_i \quad \forall\, i \in \left\{\left\{\overline{1,\, N-1}\right\} \setminus \{r\}\right\} \setminus T\,. \tag{35}$$

Доведення. Справедливість твердження щодо компоненти (16) відразу випливає з Теореми 1. А оскільки виконано (31), то t -а компонента

$$y_t^* > \frac{(1 - a_r)\sqrt{b_t}}{\sum\limits_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k} - \sqrt{b_r} + \sqrt{1 - \sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k}} \quad \forall\, t \in T \subset \left\{\overline{1,\, N-1}\right\} \setminus \{r\}\,. \tag{36}$$

Звичайно, при $T = \varnothing$ ми опиняємось в умовах Теореми 1. Однак (36) означає, що замість рівності (24) $\forall\, i \in \left\{\overline{1,\, N-1}\right\} \setminus \{r\}$ у межах гіперпаралелепіпеда (7) виконується співвідношення

$$\frac{1 - \sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k}{\left(1 - a_r - \sum\limits_{k \in \left\{\overline{1,\, N-1}\right\} \setminus \{r\}} y_k^*\right)^2} > \frac{1 - \sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k}{\left(1 - \sum\limits_{k \in T \cup \{r\}} a_k - \sum\limits_{k \in \left\{\overline{1,\, N-1}\right\} \setminus \{T \cup \{r\}\}} y_k^*\right)^2} >$$

$$> \frac{b_i}{\left(y_i^*\right)^2} > \frac{b_s}{a_s^2} > \frac{b_s}{\left(y_s^*\right)^2} \quad \forall\, i \in \left\{\left\{\overline{1,\, N-1}\right\} \setminus \{r\}\right\} \setminus T \;\text{ і }\; \forall\, s \in T \bigcup \{r\} \tag{37}$$

при $y_s^* > a_s$, де відповідна мінімізація за (9) дає (33), оскільки ніяке значення $y_t^* > a_t$ не буде компонентою стратегії (8). Тому для значень (32) як $\left\{y_i^*\right\}_{i \in \left\{\overline{1,\, N-1}\right\} \setminus \{T \cup \{r\}\}}$ маємо строгу нерівність

$$\frac{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k}{\left(1-\sum\limits_{k\in T\cup\{r\}} a_k - \sum\limits_{k\in\{\overline{1,\,N-1}\}\setminus\{T\cup\{r\}\}} y_k^*\right)^2} > \frac{b_i}{\left(y_i^*\right)^2} > \frac{b_s}{a_s^2}, \tag{38}$$

з якої видно, що її максимальна частина може бути зменшена за рахунок зменшення значень (32) компонент $\left\{y_i^*\right\}_{i\in\{\overline{1,\,N-1}\}\setminus\{T\cup\{r\}\}}$ до таких значень, за яких частина нерівності (38)

$$\frac{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k}{\left(1-\sum\limits_{k\in T\cup\{r\}} a_k - \sum\limits_{k\in\{\overline{1,\,N-1}\}\setminus\{T\cup\{r\}\}} y_k^*\right)^2} > \frac{b_i}{\left(y_i^*\right)^2} \tag{39}$$

“вирівняється” у рівність

$$\frac{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k}{\left(1-\sum\limits_{k\in T\cup\{r\}} a_k - \sum\limits_{k\in\{\overline{1,\,N-1}\}\setminus\{T\cup\{r\}\}} y_k^*\right)^2} = \frac{b_i}{\left(y_i^*\right)^2}. \tag{40}$$

Далі з рівності (40) отримуємо:

$$y_i^*\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k} = \sqrt{b_i}\left(1-\sum_{k\in T\cup\{r\}} a_k - \sum_{k\in\{\overline{1,\,N-1}\}\setminus\{T\cup\{r\}\}} y_k^*\right) \tag{41}$$

й

$$y_u^* = \sqrt{\frac{b_u}{b_i}}\, y_i^*$$

$$\forall\, i\in\left\{\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{r\}\right\}\setminus T \quad \text{та} \quad \forall\, u\in\left\{\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{r\}\right\}\setminus T\,. \tag{42}$$

Тепер, підставляючи (42) у праву частину рівності (41), маємо

$$y_i^*\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k} = \sqrt{b_i}\left(1-\sum_{k\in T\cup\{r\}} a_k\right) - \sqrt{b_i}\sum_{k\in\{\overline{1,\,N-1}\}\setminus\{T\cup\{r\}\}} y_k^* =$$

$$=\sqrt{b_i}\left(1-\sum_{k\in T\cup\{r\}}a_k\right)-\sqrt{b_i}\sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{T\cup\{r\}\}}\sqrt{\frac{b_k}{b_i}}y_i^*=$$

$$=\sqrt{b_i}\left(1-\sum_{k\in T\cup\{r\}}a_k\right)-y_i^*\left(\sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{T\cup\{r\}\}}\sqrt{b_k}\right), \qquad (43)$$

звідки випливає (34). Звичайно, тут має бути виконано

$$\frac{\left(1-\sum_{k\in T\cup\{r\}}a_k\right)\sqrt{b_i}}{\sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{T\cup\{r\}\}}\sqrt{b_k}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}}\in\left[a_i;\,b_i\right]\quad\forall\,i\in\left\{\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{r\}\right\}\setminus T\,, \qquad (44)$$

інакше рівність (40) не виконуватиметься у межах гіперпаралелепіпеда (7), звідки вимога (35) є очевидною. А вимога

$$\frac{\left(1-\sum_{k\in T\cup\{r\}}a_k\right)\sqrt{b_i}}{\sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{T\cup\{r\}\}}\sqrt{b_k}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}}\leqslant b_i\quad\forall\,i\in\left\{\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{r\}\right\}\setminus T \qquad (45)$$

не потрібна, адже

$$\frac{\left(1-\sum_{k\in T\cup\{r\}}a_k\right)\sqrt{b_i}}{\sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{T\cup\{r\}\}}\sqrt{b_k}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}}-\frac{(1-a_r)\sqrt{b_i}}{\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k}-\sqrt{b_r}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}}=$$

$$=\sqrt{b_i}\left(\left(1-\sum_{k\in T\cup\{r\}}a_k\right)\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k}-\left(1-\sum_{k\in T\cup\{r\}}a_k\right)\sqrt{b_r}+\left(1-\sum_{k\in T\cup\{r\}}a_k\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}-(1-a_r)\sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{T\cup\{r\}\}}\sqrt{b_k}-(1-a_r)\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{k\in\{\overline{1,\,N-1}\}\setminus\{T\cup\{r\}\}}\sqrt{b_k}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k}-\sqrt{b_r}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)^{-1}=$$

$$=\sqrt{b_i}\left(\sum_{t\in T}\sqrt{b_t}-\sum_{k\in T\cup\{r\}}a_k\sum_{k\in\{\overline{1,\,N-1}\}\setminus\{r\}}\sqrt{b_k}-\sum_{k\in T\cup\{r\}}a_k\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}+\right.$$

$$\left.+a_r\sum_{k\in\{\overline{1,\,N-1}\}\setminus\{T\cup\{r\}\}}\sqrt{b_k}+a_r\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)\left(\sum_{k\in\{\overline{1,\,N-1}\}\setminus\{T\cup\{r\}\}}\sqrt{b_k}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k}-\sqrt{b_r}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)^{-1}=$$

$$=\sqrt{b_i}\left(\sum_{t\in T}\sqrt{b_t}-\sum_{k\in T\cup\{r\}}a_k\sum_{k\in\{\overline{1,\,N-1}\}\setminus\{r\}}\sqrt{b_k}+a_r\sum_{k\in\{\overline{1,\,N-1}\}\setminus\{T\cup\{r\}\}}\sqrt{b_k}-\right.$$

$$\left.-\sum_{t\in T}a_t\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)\left(\sum_{k\in\{\overline{1,\,N-1}\}\setminus\{T\cup\{r\}\}}\sqrt{b_k}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k}-\sqrt{b_r}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)^{-1}=$$

$$=\sqrt{b_i}\left(\sum_{t\in T}\sqrt{b_t}-\sum_{t\in T}a_t\sum_{k\in\{\overline{1,\,N-1}\}\setminus\{r\}}\sqrt{b_k}-a_r\sum_{k\in\{\overline{1,\,N-1}\}\setminus\{r\}}\sqrt{b_k}+\right.$$

$$\left.+a_r\sum_{k\in\{\overline{1,\,N-1}\}\setminus\{T\cup\{r\}\}}\sqrt{b_k}-\sum_{t\in T}a_t\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)\left(\sum_{k\in\{\overline{1,\,N-1}\}\setminus\{T\cup\{r\}\}}\sqrt{b_k}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)^{-1}\left(\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k}-\sqrt{b_r}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)^{-1}=$$

$$
=\frac{\sqrt{b_i}\left(\sum_{t\in T}\sqrt{b_t}-\sum_{t\in T}a_t\sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{r\}}\sqrt{b_k}-a_r\sum_{t\in T}\sqrt{b_t}-\sum_{t\in T}a_t\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)}{\left(\sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{T\cup\{r\}\}}\sqrt{b_k}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k}-\sqrt{b_r}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)}=
$$

$$
=\sqrt{b_i}\,\frac{\sum_{t\in T}\sqrt{b_t}\left(1-a_r\right)-\sum_{t\in T}a_t\left(\sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{r\}}\sqrt{b_k}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)}{\left(\sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{T\cup\{r\}\}}\sqrt{b_k}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{b_k}-\sqrt{b_r}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}\right)}
$$

$$
\forall\ i\in\left\{\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{r\}\right\}\setminus T \tag{46}
$$

і завдяки підсумовуванню обох частин нерівності (31) за $t\in T\subset\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{r\}$ отримаємо

$$
\frac{\left(1-a_r\right)\sum_{t\in T}\sqrt{b_t}}{\sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{r\}}\sqrt{b_k}+\sqrt{1-\sum_{k=1}^{N-1}a_k}}<\sum_{t\in T}a_t\ , \tag{47}
$$

що дає від'ємний чисельник у (46) і, взагалі, від'ємне значення (46), а це означає автоматичне виконання нерівності (45) тому, що виконано (29). Теорему доведено.

Звісно, і тут зазначаємо, що внаслідок (29) і (46) нерівність (45) виконана строго: якими б не були значення у лівій частині (29), для "вирівнювання" нерівності (39) у рівність (40) компоненти $\left\{y_i^*\right\}_{i\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{T\cup\{r\}\}}$ необхідно одночасно брати меншими за значення у лівій частині (32). А якщо ж хоча б одну з нерівностей (32) порушено, то рівність (40) не виконуватиметься у межах гіперпаралелепіпеда (7), і значення (34) вже не будуть компонентами оптимальної стратегії (8). Доведеться знову займатися "вирівнюванням" відповідної нерівності і перераховувати компоненти $\left\{y_i^*\right\}_{i\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\{T\cup\{r\}\}}$ оптимальної стратегії (8).

Висновок і перспектива подальшого дослідження

Доведені твердження відображають цікаву особливість в оптимальній поведінці проектувальника (8), котра визначається за однієї переоцінки типу (15) в інтервальних невизначеностях $\left\{ \left[a_j ; b_j \right] \right\}_{j=1}^{N-1}$. Ця особливість полягає у тому, що нерівність (15) може породити не тільки одну r -ту компоненту (16) оптимальної стратегії (8), а й низку компонент (33) зі значеннями на лівих кінцях відповідних інтервальних невизначеностей $\left\{ \left[a_t ; b_t \right] \right\}_{t \in T \subset \left\{ \overline{1, N-1} \right\} \backslash \{r\}}$, якщо тільки виконані умови Теореми 2. Звичайно, і ця теорема не окреслює усі можливі випадки визначення компонент $\left\{ y_i^* \right\}_{i \in \left\{ \overline{1, N-1} \right\} \backslash \{ T \cup \{r\} \}}$, оскільки у разі порушення хоча б однієї з належностей у (44) співвідношення (34) втрачають зміст. Утім, порушення умов (35) Теореми 2 на практиці траплятиметься вкрай рідко і, в додаток, свідчитиме про дуже невдало оцінені кінці інтервальних невизначеностей $\left\{ \left[a_j ; b_j \right] \right\}_{j=1}^{N-1}$, внаслідок чого принаймні три площі поперечних перерізів опор конструкції доведеться покладати рівними мінімальним оцінкам нормованих навантажень, що є і підозрілим (хоча їх оптимальність за умов вказаних інтервальних невизначеностей доведена), і небажаним (можливі перевантаження конструкції через виявлені переоцінки лівих кінців інтервальних невизначеностей). Тому у перспективі варто розглянути методи більш адекватного попереднього оцінювання інтервальних невизначеностей $\left\{ \left[a_j ; b_j \right] \right\}_{j=1}^{N-1}$, де поштовхом (ознакою) до застосування таких методів слугуватиме невиконання умов (44) або (35) Теореми 2.

Summary

There is considered an antagonistic model of fitting cross-sections squares of supports of the building construction-platform, where potential load on the construction platform is unit-normed. The being investigated model has been generated with interval uncertainties as evaluations of the normed cross-sections squares of the construction supports. There are being proved two assertions on the projector optimal decision in such model by an over-evaluation in interval uncertainties, where the second assertion comes up by infraction of conditions of the first one.

Література

1. Smith A. Analysis of a combined cooling, heating, and power system model under different operating strategies with input and model data uncertainty / A. Smith, R. Luck, P. J. Mago // Energy and Buildings. — 2010. — Volume 42, Issue 11. — P. 2231 — 2240.

2. Sacks R. Parametric 3D modeling in building construction with examples from precast concrete / R. Sacks, C. M. Eastman, G. Lee // Automation in Construction. — 2004. — Volume 13, Issue 3. — P. 291 — 312.

3. Hu Z. Construction process simulation and safety analysis based on building information model and 4D technology / Z. Hu, J. Zhang, Z. Deng // Tsinghua Science & Technology. — 2008. — Volume 13, Supplement 1. — P. 266 — 272.

4. Popov V. The use of a virtual building design and construction model for developing an effective project concept in 5D environment / V. Popov, V. Juocevicius, D. Migilinskas, L. Ustinovichius, S. Mikalauskas // Automation in Construction. — 2010. — Volume 19, Issue 3. — P. 357 — 367.

5. Yıldız Y. Identification of the building parameters that influence heating and cooling energy loads for apartment buildings in hot-humid climates / Y. Yıldız, Z. Durmuş Arsan // Energy. — 2011. — Volume 36, Issue 7. — P. 4287 — 4296.

6. Mavrotas G. A mathematical programming framework for energy planning in services’ sector buildings under uncertainty in load demand: the case of a hospital in Athens / G. Mavrotas, D. Diakoulaki, K. Florios, P. Georgiou // Energy Policy. — 2008. — Volume 36, Issue 7. — P. 2415 — 2429.

7. Alvarado Y. A. A numerical study into the evolution of loads on shores and slabs during construction of multistorey buildings. Comparison of partial striking with other techniques / Y. A. Alvarado, P. A. Calderón, I. Gasch, J. M. Adam // Engineering Structures. — 2010. — Volume 32, Issue 10. — P. 3093 — 3102.

8. Романюк В. В. Модель визначення оптимального рішення проектувальника у задачі про розрахунок повздовжньої стійкості двох елементів будівельної конструкції при дії на них нормованого стискаючого зусилля / В. В. Романюк // Проблеми трибології. — 2010. — № 1. — С. 42 — 56.

9. Романюк В. В. Про особливі компоненти оптимальної стратегії проектувальника у моделі дії нормованого одиничного навантаження на триколонну будівельну конструкцію / В. В. Романюк // Проблеми трибології. — 2011. — № 1. — С. 44 — 46.

10. Воробьёв Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков / Воробьёв Н. Н. — М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 272 с.

11. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Пшеничный Б. Н. — М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980. — 320 с.

12. Romanuke V. V. Digression on the right off-bound projector optimal strategy in four props construction being pressed uncertainly / V. V. Romanuke // Системи обробки інформації. — 2011. — Випуск 2 (92). — С. 129 — 132.