

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЁТА ГИБКИХ БАЛОК, ИСПЫТЫВАЮЩИХ ДЕЙСТВИЕ ЛОКАЛЬНЫХ НАГРУЗОК

Дызов К.Г., к.т.н., доцент

*Одесская государственная академия строительства и архитектуры*

Публикаций, посвящённых расчёту гибких балок, испытывающих действие локальных нагрузок, автору не известно. Вероятно, это связано с тем, что дифференциальное уравнение изгиба гибкой балки, разрешённое относительно нагрузки, крайне громоздкое [1], вследствие чего становится проблемной её численная реализация. Более простое точное уравнение (1) в правой части содержит моменты. Поэтому расчёты выполняются в линейной постановке, руководствуясь утверждением [3, с. 230], что “в связи с малостью деформации балки<sup>1</sup> в формуле (1) можно пренебречь членом  $\tilde{w}'^2$  и записать линейное уравнение”, что действительно справедливо для не очень больших величин нагрузки.

Уравнение упругого равновесия гибкой балки (1) записано в предположении “стержня малой жёсткости” [2, с. 14]

$$\frac{\tilde{w}''(\tilde{x})}{\left[1 + \tilde{w}'^2\right]^{3/2}} = \pm \tilde{M}(\tilde{x}). \quad (1)$$

Знак в правой части выбирается в соответствии со знаком момента  $\tilde{M}(\tilde{x})$  и направлением координатных осей.

Здесь и далее, обобщённый прогиб -  $\tilde{w}(\tilde{x}) = w(x)/L$ ,  $\tilde{x} = x/L$  - обобщённая координата,  $\tilde{a} = a/L$  - обобщённая координата приложения локальной нагрузки,  $\tilde{M}(\tilde{x}) = \frac{M(x) \cdot L}{E \cdot I}$  - обобщённый момент,

$\tilde{q}(\tilde{x}) = \frac{q(x) \cdot L^3}{E \cdot I}$  - величина обобщённой нагрузки,  $q(x)$  - сама нагрузка, действующая на балку,  $E \cdot I$  - жёсткость балки на изгиб,  $E$  - мо-

<sup>1</sup>  $w_{\max} = (0,01 - 0,001) \cdot l$  и  $\theta_{\max} \leq 1^\circ$

дуть упругости материала,  $I$  - момент инерции сечения балки,  $L$  - длина балки.

Численный аналог (1) представляется в виде следующей итерационной схемы

$$\tilde{w}_{n+1}''(\tilde{x}) = \sum_{i=0}^{m_1} a_i^{(n)} \tilde{x}^i + e(\tilde{x} - \tilde{a}) \sum_{i=0}^{m_2} b_i^{(n)} \tilde{x}^i, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (2)$$

$e(\tilde{x} - \tilde{a})$  - единичная функция.

Полиномы  $\sum_{i=0}^{m_1} a_i^{(n)} \tilde{x}^i$  и  $\sum_{i=0}^{m_2} b_i^{(n)} \tilde{x}^i$  аппроксимируют выражения

$$(1 + \tilde{w}_n''^2(\tilde{x}))^{3/2} \cdot L_1(\tilde{x}), \quad (3)$$

$$(1 + \tilde{w}_n''^2(\tilde{x}))^{3/2} \cdot L_2(\tilde{x}). \quad (4)$$

В качестве начального приближения  $\tilde{w}_0''(\tilde{x})$  берётся её линейный аналог. Составляющие функции  $L_1(\tilde{x})$  и  $L_2(\tilde{x})$  тоже выбираются из линейного решения, в сумме дают значение момента  $\tilde{M}(\tilde{x})$  и учитывают его особенности (изломы, скачки, см. рис. 1 и 2), а также количественные и качественные характеристики локальных нагрузок, действующих на балку. В [4] изложена эффективная методика расчёта балок, испытывающих действия локальных нагрузок.

На рис. 1 представлены графики  $L_1(\tilde{x})$  и  $L_2(\tilde{x})$  шарнирно опертой балки под действием сосредоточенной силы в точке  $\tilde{a} = 0,5$  с интенсивностью  $\tilde{q} = 1$ , а на рис. 2 представлена эпюра  $\tilde{M}(\tilde{x})$ , которая является результатом их суперпозиции.

Интегрируем (2)

$$\begin{aligned} \tilde{w}'_{n+1}(\tilde{x}) &= \sum_{i=0}^{m_1} \frac{a_i^{(n)} \tilde{x}^{i+1}}{i+1} + e(\tilde{x} - \tilde{a}) \sum_{i=0}^{m_2} \frac{b_i^{(n)} \tilde{x}^{i+1}}{i+1} - \\ &\quad - e(\tilde{x} - \tilde{a}) \sum_{i=0}^{m_2} \frac{b_i^{(n)} \tilde{a}^{i+1}}{i+1} + c_1, \\ \tilde{w}_{n+1}(\tilde{x}) &= \sum_{i=0}^{m_1} \frac{a_i^{(n)} \tilde{x}^{i+2}}{(i+1)(i+2)} + e(\tilde{x} - \tilde{a}) \sum_{i=0}^{m_2} \frac{b_i^{(n)} \tilde{x}^{i+2}}{(i+1)(i+2)} - \\ &\quad - e(\tilde{x} - \tilde{a}) \sum_{i=0}^{m_2} \frac{b_i^{(n)} \tilde{a}^{i+2}}{(i+1)(i+2)} - e(\tilde{x} - \tilde{a}) \sum_{i=0}^{m_2} \frac{b_i^{(n)} \tilde{a}^{i+1} \tilde{x}}{i+1} + \end{aligned} \quad (5)$$

$$+ e(\tilde{x} - \tilde{a}) \sum_{i=0}^{m2} \frac{b_i^{(n)} \tilde{a}^{i+2}}{i+1} + c_1^{(n)} \tilde{x} + c_0^{(n)}.$$

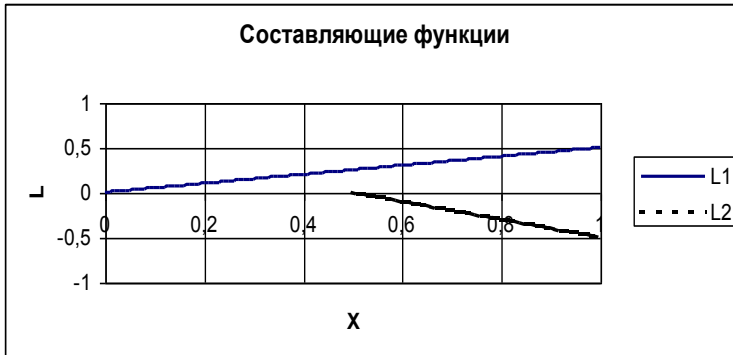


Рис. 1

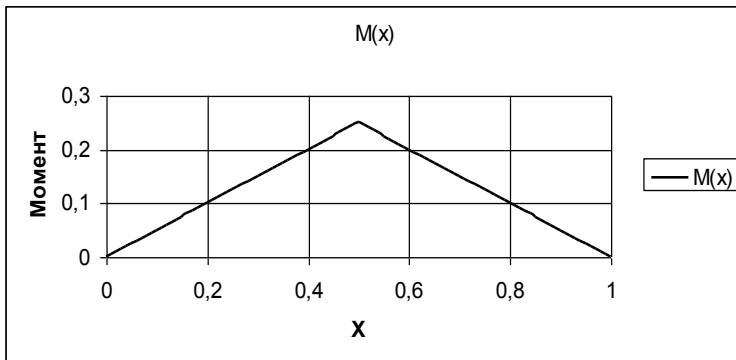


Рис. 2

Константы  $c_1^{(n)}$  и  $c_0^{(n)}$  в (5) определяются из граничных условий и уточняются на каждой итерации.

## Алгоритм метода

1. Для заданных исходных данных решается задача в линейной постановке,  $n = 0$ .

2. Строятся аппроксимирующие полиномы  $\sum_{i=0}^{m1} a_i^{(0)} \tilde{x}^i$  и  $\sum_{i=0}^{m2} b_i^{(0)} \tilde{x}^i$ .

3. Из соотношений (5) находятся константы интегрирования  $c_1^{(0)}$  и  $c_0^{(0)}$ .

4. Вычисляются  $\tilde{w}_n(\tilde{x})$  и  $\tilde{w}'_n(\tilde{x})$ .

5. Строятся аппроксимирующие полиномы  $\sum_{i=0}^{m1} a_i^{(n+1)} \tilde{x}^i$  и  $\sum_{i=0}^{m2} b_i^{(n+1)} \tilde{x}^i$ .

6. Вычисляются  $\tilde{w}_{n+1}(\tilde{x})$  и  $\tilde{w}'_{n+1}(\tilde{x})$ .

7. Вычисляется погрешность  $\Delta = \max \left\{ \text{abs} \left[ 1 - \frac{\tilde{w}_n(\tilde{x})}{\tilde{w}_{n+1}(\tilde{x})} \right] \right\}$ .

8. Если  $\Delta$  больше заданной расчётной точности  $\delta$ , то  $n = n + 1$  и переход на пункт 4, иначе на пункт 9.

9. Итоговые значения  $\tilde{w}_{n+1}(\tilde{x})$  и  $\tilde{w}'_{n+1}(\tilde{x})$ . Конец процесса.

Полиномы в пунктах 2 и 5 алгоритма строились по программе [5,6] с высокой точностью,  $m1 = 5, m2 = 5$ , коэффициент детерминации (адекватности)  $r^2 = 99,98\% - 100\%$ .

На рис. 3 представлена зависимость прогиба  $\tilde{w}(\tilde{x})$  от величины сосредоточенной обобщённой нагрузки  $\tilde{q}$  в середине пролёта ( $\tilde{a} = 0,5$ ) шарнирно опертой гибкой балки. На рис. 4 представлены эпюры линейных и нелинейных прогибов при  $\tilde{q} = 10$ , а на рис. 4 их первые производные.

## Заключение

В заключение заметим, что изложенный метод является численно – аналитическим и быстро сходится. Например, при получении резуль-

татов, представленных на рис. 4 и 5, количество итераций  $n$  при  $\delta = 10^{-7}$  и  $\Delta = 10^{-7} - 10^{-9}$  составило 10.

При расчётах использовался пакет программ Slender\_beam\_2012, реализующий изложенный метод и охватывающий все основные виды опирания гибких балок и все типы локальных воздействий.

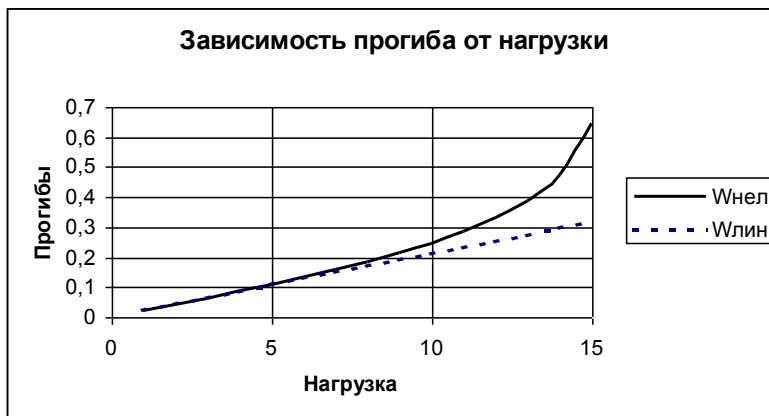


Рис. 3

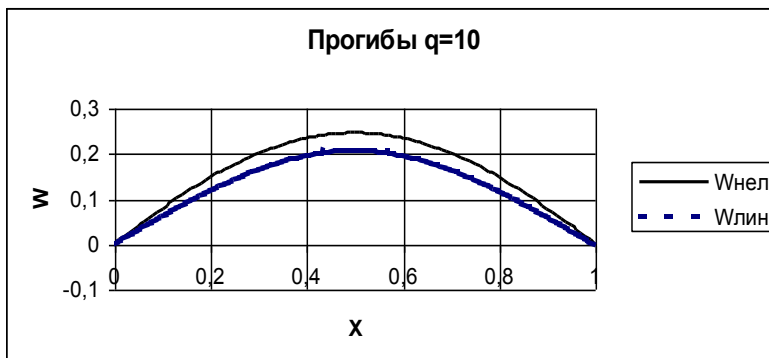


Рис. 4

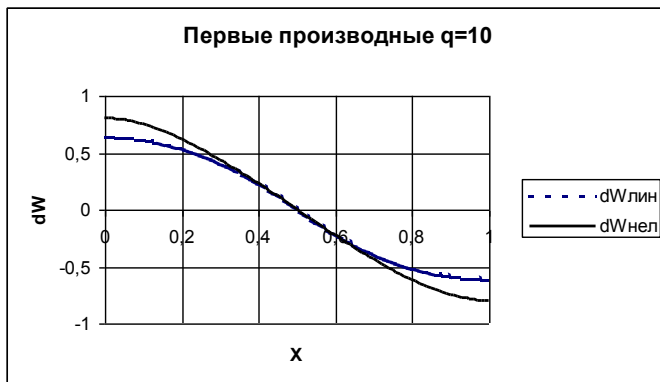


Рис. 5

## Summary

**Propose a method of calculation of flexible beams undergoing the action of local loads.**

## *Литература*

1. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л. Применение вариационного принципа Гамильтона для нелинейной постановки задачи об изгибе балки. Математическое моделирование и краевые задачи. Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием, 15 – 17 сентября 2011. Часть 1, Самара, - 4 с. [www.mmikz.ru/works/maket1:sing.pdf](http://www.mmikz.ru/works/maket1:sing.pdf)
2. Попов Е. П. Теория и расчёт гибких упругих стержней, М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986, -296 с.
3. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов, «Наукова думка», Киев, 1975, - 704 с.
4. Дызов К. Г. К применению сингулярных функций в расчёте балок при действии локальных нагрузок, Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури, випуск 45, 2012 р., - 10 с.
5. Дызов К. Г. Интерактивное построение полиномиальных моделей в MS EXCEL, Тезисы доклада на XVII международной научно – методической конференции «Управление качеством подготовки специалистов», 19 – 20 апреля 2012 г., ОГАСА, Одесса
6. Дызов К. Г. К построению полиномиальных интерактивных моделей в MS EXCEL, - Тезисы доклада Международной научно – технической конференции «Компьютерные науки: образование, наука, практика», 14 -16 июня 2012 г., Академия наук судостроения Украины, г. Николаев