

ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ ПОДХОД К РАСЧЕТУ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Микитенко С.Н., к. т. н., доцент

*Полтавский национальный технический университет имени Юрия
Кондратюка*

Проблема эффективной оптимизации строительных конструкций имеет многие аспекты. Задача оптимального проектирования отдельной конструкции сводится к тому, что из нескольких конструктивных вариантов необходимо выбрать такой, который будет отвечать экстремальному значению критерия оптимальности. В качестве критерия могут быть приняты такие показатели как вес конструкции, стоимость ее изготовления, долговечность, приведенные расходы и т. п. Относительно совершенствования современных железобетонных конструкций, то предлагаются методы расчета, которые учитывают сложные силовые влияния. Значительное количество стержневых железобетонных конструкций испытывает одновременное действие поперечных V сил, изгибающих M и крутящих T моментов. В нормах [1] реализован оптимизационный подход (экстремальный критерий) к расчету прочности изгибаемых и сжатых железобетонных элементов. Исчерпание несущей способности определяется достижением максимальных изгибающего момента или продольной силы в расчетном сечении. Процесс проектирования железобетонных конструкций также связан с решением других проблем, которые накладывают ограничение или обуславливают их эксплуатационные характеристики. В частности, сюда можно включить выбор оптимальных проектно-конструктивных решений, проектирования конструкции по критерию надежности, затраты на эксплуатацию и ремонт, особенные условия и риски. Названные факторы могут быть представлены в виде отдельных целевых функций или ограничений. Одновременная оптимизация нескольких целевых функций возможна при применении многокритериальной оптимизации.

Многокритериальная оптимизация являет собой процесс одновременной оптимизации двух или и больше целевых функций, которые могут даже конфликтовать между собой. В общем случае задача многокритериальной оптимизации сводится к поиску глобального оптимума и может быть представлена в таком виде

$$\text{opt}\{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_k(\vec{x})\} \text{ если } \vec{x} \in S, \quad (1)$$

где $f_i: R^n \rightarrow R$, k ($k \geq 2$) количество целевых функций, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ векторы решений которые относятся к не пустой области S .

Решение задачи многокритериальной оптимизации заключается в поиске вектора целевых переменных $\vec{x}$, которые удовлетворяют наложенным ограничением и оптимизируют векторную функцию $\vec{y}$, элементы которой соответствуют целевым функциям $f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_k(\vec{x})$. Эти функции образуют математическое описание критериев требований к объекту оптимизации.

Для надежной оптимизации конструкций, целевые функции которых могут иметь несколько локальных экстремумов, необходимо применять разные методы решения оптимизационных задач для нахождения глобального оптимума. Методы поиска глобального оптимума на сегодня остаются предметом интенсивных исследований и в общем случае их можно выделить в четыре отдельных группы: 1) детерминированные [2]; 2) эволюционные [3,4]; 3) случайные (стохастические); 4) комбинированные.

Стратегия оптимизационного исследования предусматривает также обоснование полученных результатов, анализ чувствительности решения к изменению целевых переменных, выявлению активных ограничений. Чувствительность решения показывает, какие параметры наиболее весомо влияют на результат оптимизации. Активные ограничения указывают на переменные целевых функций, которые сужают возможности конструкции.

Применение оптимизационного подхода в проектировании железобетонных конструкций является достаточно эффективным средством их усовершенствования. Многокритериальная оптимизация дает возможность находить новые проектные решения, уменьшать расход арматуры и бетона в железобетонных конструкциях.

Предлагается расчет прочности железобетонных элементов неперearмированных продольной растянутой A_{S2} и сжатой A_{S1} арматурами, который дает возможность проектировать элементы с минимальным расходом арматурной стали.

Рассматривается элемент в стадии разрушения, когда достигается предельное состояние продольной сжатой A_{S1} и растянутой A_{S2} арматур в нормальном сечении (рис.1) и в бетоне сжатой зоны этого

сечения. Напряжения в сжатом бетоне σ_C достигают максимального значения f_{cd} и распределяются по высоте сжатой зоны X_1 согласно [1].

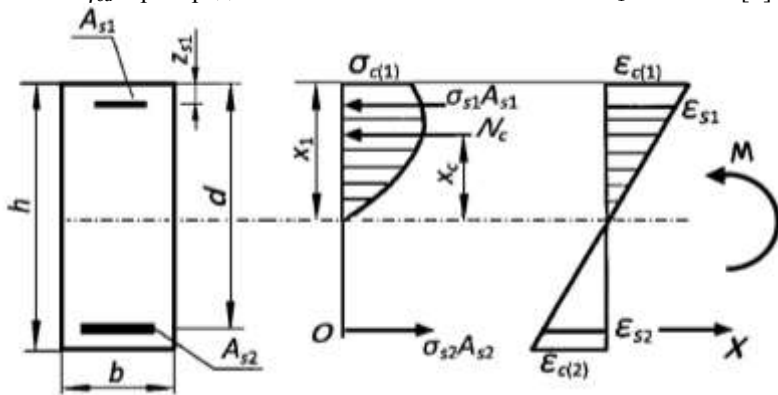


Рис.1. Расчетная схема нормального сечения

В задаче определения количества арматуры неизвестной является высота сжатой зоны бетона X_1 и плечо Z_C , площадь растянутой A_{S2} и сжатой A_{S1} арматур, напряжение σ_{S2} . Напряжения σ_{S1} в сжатой арматуре A_{S1} принимаются равными f_{ydc} . Размеры сечения элемента b, h, Z_{S1}, d , характеристики прочности бетона f_{cd} , растянутой f_{yd} и сжатой f_{ydc} арматуры считаются заданными.

Для определения неизвестных используем два уравнения равновесия

$$\Sigma X=0; \sigma_{S2}A_{S2} - N_C - f_{ydc}A_{S1}=0, \quad (2)$$

$$\Sigma M_O=0; M - N_C(d - X_1 + X_C) - f_{ydc}A_{S1}(d - Z_{S1})=0, \quad (3)$$

где

$$N_C = f_{cd} X_1 b \omega \quad (4)$$

Коэффициент ω представляет собой отношение объёма эпюры напряжений сжатой зоны бетона, заданной согласно [1], к объёму прямоугольной эпюры. Методы определения ω даются в работах [5, 6].

Внешние усилия M в нормальном сечении записываются через параметр нагрузки

$$\alpha_m = \frac{M}{f_{cd} b d^2}. \quad (5)$$

Расстояние от нейтральной линии до точки приложения силы N_C можно определить по формуле

$$X_C = X_1 \frac{\varphi}{\omega} \quad (6)$$

где параметр φ определяется методами, представленными в [5].

Выполнив определенные превращения уравнений (2) и (3), получим

$$m_s \cdot \xi_s - \xi'_s - \xi \omega = 0, \quad (7)$$

$$\alpha_m - \xi \omega \left(1 - \xi + \xi \frac{\varphi}{\omega} \right) - \xi'_s \frac{Z_s}{d} = 0, \quad (8)$$

$$\text{где} \quad \xi = X_1 / d; \quad \xi_s = \frac{A_{S2} f_{yd}}{f_{cd} b d}; \quad \xi'_s = \frac{A_{S1} f_{ydc}}{f_{cd} b d};$$

$$\sigma_{s2} = \gamma_s f_{yd}; \quad Z_s = d - Z_{S1}.$$

Если из (7) и (8) исключить величину ξ , то получим зависимость с неизвестными m_s , ξ_s , ξ'_s

$$\alpha_m = \left(\gamma_s \xi_s - \xi'_s \right) \left(1 - \frac{\gamma_s \xi_s - \xi'_s}{\omega} \left(1 - \frac{\varphi}{\omega} \right) \right) + \xi'_s \frac{Z_s}{d}. \quad (9)$$

Неизвестные величины будем находить из условия минимума расходов арматуры при соблюдении условия (9).

Выделим вблизи данного сечения элемент единичной длины $\ell = 1$, для армирования которого необходимо использовать арматуру A_{S2} и A_{S1} .

Коэффициент объемного армирования будет равен

$$V_s = \frac{(A_{S1} + A_{S2}) \ell}{b \cdot d \cdot \ell}. \quad (10)$$

Используя безразмерные параметры, ξ_s и ξ'_s формула (10) получит вид

$$V_s = \xi_s \frac{f_{cd}}{f_{yd}} + \xi'_s \frac{f_{cd}}{f_{ydc}}, \quad (11)$$

и будет целевой функцией оптимизационной задачи.

Дополнительным уравнением для решения задачи о проверке прочности нормального сечения будет условие, которое связывает уровень напряжений в продольной растянутой арматуре.

$$\gamma_s - 1 \leq 0 \quad (12)$$

Применяя приведенные выше зависимости, можно сформулировать задачу о подборе необходимой арматуры как оптимизационную: найти величины, ξ_s , ξ'_s из условия минимума целевой функции (11) при соблюдении уравнения (9) и неравенства (12).

Следуя [7], запишем для поставленной оптимизационной задачи функцию Лагранжа

$$L(\xi_s, \xi'_s, m_s, \lambda_1, \lambda_2) = \xi_s \frac{f_{cd}}{f_{yd}} + \xi'_s \frac{f_{cd}}{f_{ydc}} - \lambda_1 \left[\alpha_m - \left(\gamma_s \xi_s - \xi'_s \right) \left(1 - \left(\gamma_s \xi_s - \xi'_s \right) \left(\frac{\omega - \varphi}{\omega^2} \right) \right) - \xi'_s \frac{Z_s}{d} \right] - \lambda_2 [m_s - 1] = 0, \quad (13)$$

где λ_1, λ_2 - множители Лагранжа.

Для решения задачи используем условия Куна-Таккера.

1. Требования к знаку множителей Лагранжа

$$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \leq 0. \quad (14)$$

2. Частичные производные функции Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_s} = \frac{f_{cd}}{f_{yd}} - \lambda_1 \left[2\gamma_s \frac{\omega - \varphi}{\omega^2} (\gamma_s \xi_s - \xi'_s) - \gamma_s \right] = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi'_s} = \frac{f_{cd}}{f_{ydc}} - \lambda_1 \left[-2 \frac{\omega - \varphi}{\omega^2} (\gamma_s \xi_s - \xi'_s) - \frac{Z_s}{d} + 1 \right] = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_s} = -\lambda_1 \left[2\xi_s \frac{\omega - \varphi}{\omega^2} (\gamma_s \xi_s - \xi'_s) - \xi_s \right] - \lambda_2 = 0. \quad (17)$$

3. Дополнительное условие

$$\alpha_m - \left(\gamma_s \xi_s - \xi'_s \right) \left(1 - \left(\gamma_s \xi_s - \xi'_s \right) \left(\frac{\omega - \varphi}{\omega^2} \right) \right) - \xi'_s \frac{Z_s}{d} = 0. \quad (18)$$

4. Условие дополняющей нежесткости учитывает неравенство (12)

$$\lambda_2 (\gamma_s - 1) = 0. \quad (19)$$

Если проанализировать условия Куна-Такера то можно найти из них решение задачи, которая удовлетворяет наложенным требованиям.

Из (15) и (16) следует, что $\lambda_1 \neq 0$. Из (16) следует, что составляющая в квадратных скобках меньше нуля, тогда $\lambda_1 < 0$. Из (17) выходит, что $\lambda_2 \neq 0$.

Рассмотрев условие (19) при $\lambda_2 \neq 0$ коэффициент $\gamma_s = 1$.

Если сложить уравнение(15) и (16) при $\gamma_s = 1$ то

$$\lambda_1 = - \left[\frac{f_{cd}}{f_{yd}} + \frac{f_{cd}}{f_{ydc}} \right] / \frac{Z_s}{d} = 0 \quad (20)$$

Из (15) и (16) при $\gamma_s = 1$ можно определить

$$\xi'_s = \left[\alpha_m - \bar{\xi} \left(1 - \bar{\xi} \left(\frac{\omega - \varphi}{\omega^2} \right) \right) \right] \frac{d}{Z_s}, \quad (21)$$

$$\text{где } \bar{\xi} = \xi_s - \xi'_s = \frac{\omega^2}{4(\omega - \varphi)} \left[\left(\frac{f_{cd}}{f_{yd}\lambda_1} - \frac{f_{cd}}{f_{ydc}\lambda_1} \right) + 2 - \frac{Z_s}{d} \right]. \quad (22)$$

При $\xi'_s \leq 0$ сжатая арматура не нужна, если $\xi'_s > 0$ то площадь растянутой арматуры определяется по формуле

$$A_{s2} = bd \left(\bar{\xi} + \xi'_s \right) \frac{f_{cd}}{f_{yd}}. \quad (23)$$

Площадь сжатой арматуры определяется по формуле

$$A_{s1} = bd \xi'_s \frac{f_{cd}}{f_{ydc}}. \quad (24)$$

Полученные зависимости были проверены расчетами железобетонных балок, при этом количество арматуры рассчитано за формулами (23) и (24) совпадало с расчетами по действующими нормами [1] при значительно меньшими затратами времени для расчетов.

Вывод

Применение оптимизационного подхода в расчете нормального сечения дает возможность получить аналитическим путем зависимости для определения площади сжатой и растянутой арматур. Доказано что

оптимальное количество арматуры в нормальном перерезе возможно при достижении максимальных напряжений в продольной растянутой арматуре. Конструкции рассчитаны за таким методом будут перепроектированными продольной арматурой.

Summary

The method of calculation of strength of normal sections of reinforced concrete elements is offered on the basis of optimization approach taking into account new normative documents.

1. ДСТУ Б В.2.6-156:2010. Бетонні та залізобетонні конструкції з важкого бетону. Правила проектування. – Київ: Мінрегіонбуд України, 2011. – 118 с.

2. Арутюнян Р.К. Усиление железобетонных конструкций методом поисковой оптимизации / Р.К. Арутюнян // Жилищное строительство – 2000; №11. –С. 12–13.

3. Серпик И.Н. Генетический алгоритм оптимизации плоских железобетонных рам / И.Н. Серпик // Бетон и железобетон –2011; №4 . –С. 17–21.

4. Мироненко И.В. Анализ сходимости эволюционной оптимизации железобетонных конструкций [Электронный ресурс] / И.В. Мироненко // Современные проблемы науки и образования.– 2011; № 4. Режим доступа: www.science-education.ru/98-4779.

5. Розрахунок міцності нормальних перерізів балкових елементів за нелінійною деформаційною моделлю (на основі ДБН В.2.6-98:2009): Навчальний посібник / А.М. Павліков, О.В. Бойко. За ред. А.М. Павлікова. – Полтава: ПолтНТУ, 2012. –85 с.

6. Бабич Є.М. Розрахунок несучої здатності поперечних перерізів згинальних залізобетонних елементів. // Є.М. Бабич, В.Є. Бабич, В.В. Савицький / Ресурсоекономні матеріали, будівельні конструкції, будівлі та споруди: Збірник наукових праць, – Рівне:НУВГП, 2012. – Випуск 23. –С. 94 – 103.

7. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс: Пер. с англ./ Б. Банди.- М.: Радио и связь, 1988.- 128 с.