УДК 539.3 + 681.3.06

ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ЗАДАЧІ ЗГИНУ КОМПОЗИТНИХ БРУСІВ

Ковальчук С.Б., Горик А.В., *д.т.н., проф.*

Полтавська державна аграрна академія, Україна

Постановка проблеми. Сучасні композитні конструкційні матеріали і, утворені з них інженерні системи, потребують глибокого обґрунтування їх напружено-деформованого стану (НДС). Бруси, що згинаються складають значну частину елементів більшості інженерних конструкцій. Вирішення проблем їх моделювання у випадку композитної неоднорідної структури дозволяє розширити межі застосування різних класів сучасних ефективних матеріалів у конструкціях різного призначення.

Існуючі моделі згину композитних брусів, зокрема побудовані на ітераційному принципі, дозволяють аналітично визначати компоненти НДС неоднорідних брусів у простих випадках навантаження та закріплення. Теоретичні результати, отримані за допомогою ітераційної моделі, гарно співвідносяться із результатами експериментальних досліджень, але складність практичної реалізації даної моделі призводить до необхідності проведення подальших теоретичних досліджень у напрямку визначення та обґрунтування шляхів удосконалення моделі.

Аналіз існуючих досліджень. За останній час накопичений значний досвід у створені новітніх композитних конструкційних матеріалів, про що свідчить велика кількість статей, оглядів і монографій, присвячених дослідженням механіки деформування композитів. Загалом, існують різні підходи щодо розв'язання задач теорії пружності неоднорідних тіл [0]. Одним із таких підходів, стосовно моделювання неоднорідних композитних брусів, є застосування ітераційного принципу [0], на основі якого побудована ітераційна модель згину композитних брусів [0].

Мета та завдання досліджень. На основі рівнянь теорії пружності із використанням основних припущень ітераційної моделі отримати нові співвідношення для удосконалення визначення компонентів НДС при згині композитних брусів дискретно-неоднорідної структури.

Результати досліджень. *Структура бруса*. Призматичний прямий композитний брус (рис. 1), із незмінними за довжиною формою та структурною будовою поперечного перерізу, утворюють m дискретних фаз P_k, жорстко зв'язаних на границях і виконаних із різнорідних пружних матеріалів. Поперечний переріз бруса симетричний, як за формою, так і за структурою, принаймні, відносно осі OZ.

Для бруса обрано декартову систему координат XYZ. Вісь OX співпадає з поздовжньою віссю бруса, а осі OY та OZ лежать в головних площинах жорсткості бруса. Матеріал фаз композита є ізотропним, або володіє властивостями трансверсальної ізотропії. Тобто в загальному випадку вважатимемо відомими пружні властивості матеріалу довільної фази P_k, описані сукупністю 5-и незалежних пружних констант [0].

Згідно з методикою моделювання структурної будови композитних брусів, поданої в [0], механічні властивості матеріалу композита в залежності від положення розглядуваної точки C, можуть бути представлені у вигляді фінітних функцій пружних характеристик

$$S_i\left(C\right)=\sum_{k=1}^{m}S_{i(k)}\,f_k\left(C\right), \tag{1}$$

де $\left\|S_{i(k)}\right\|=\left\|E_{x(k)},E_{yz(k)},G_{zx(k)},\nu_{yz(k)},\nu_{x(k)}\right\|$ – пружні константи матеріалу k-ої фази композита; $f_{(k)}$ – характеристична функція k-ої фази.

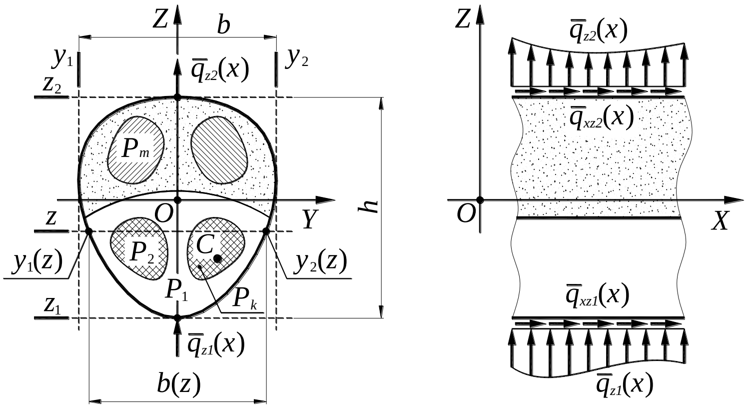

Рис. 1. Структура бруса та схема навантаження

Зовнішня циліндрична поверхня бруса, загалом, вільна від зовнішнього навантаження за виключенням її твірних, що лежать у головній площині бруса ZOX, уздовж яких діє зведене нормальне навантаження $\bar{q}_{z1}\left(x\right)$, $\bar{q}_{z2}\left(x\right)$ та дотичне $\bar{q}_{xz1}\left(x\right)$, $\bar{q}_{xz2}\left(x\right)$, розподілене за деяким законом (рис. 1), що призводить до згинання бруса.

Отже, ставимо задачу про визначення напружено-деформованого стану композитного дискретно-неоднорідного бруса при поперечному згинанні за пружних деформацій матеріалу фаз.

Вихідні рівняння та гіпотези. У загальному випадку визначення НДС пружного тіла полягає у отриманні розв'язків рівнянь теорії пружності, що відповідають заданим граничним умовах на поверхні. Але рівняння теорії пружності отримані за умови, що тіло є однорідним. Дискретно-неоднорідний брус даній умові не відповідає, хоча застосування рівнянь теорії пружності для нього можливе у межах окремих фаз, які вважаються однорідними. Тому розв'язки для напружень та переміщень для усього бруса шукатимемо у вигляді суперпозиції фінітних функцій, що задовольняють рівняння теорії пружності у межах однорідних фаз і узгоджені стосовно граничних умов контакту фаз. При цьому для їх визначення, як можна показати, можуть бути використані основні рівняння теорії пружності однорідних тіл, якщо механічні характеристики матеріалу композита визначаються функціями типу (1).

Відмовившись від гіпотези плоских перерізів і, натомість, увівши припущення стосовно функцій переміщень, які призводять до того, що: $w = w(x)$, $\upsilon = \upsilon(x)$, $u = u(x,z)$, на основі рівнянь теорії пружності були отримані вирази, які складають систему рівнянь по відношенню до невідомих функцій напружень σ_x, σ_z, τ_{zx} та переміщень w.

Зв'язок між нормальними σ_x та зведеними дотичними напруженнями $\bar{\tau}_{zx}$, при нехтуванні впливом напружень поперечного обтиснення σ_z, описано наступним співвідношенням

$$\sigma_x = E_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\int \left(\frac{\bar{\tau}_{zx}}{\bar{G}_{zx}} - \frac{dw}{dx} \right) dz + F_1 \right), \tag{2}$$

де $\bar{G}_{zx} = \bar{G}_{zx}(z)$ – зведена функція модуля зсуву (1); $F_1 = F_1(x)$ – невідома функція інтегрування.

У (2) і далі довільні зведені функції визначаються так: $\bar{g} = \int\limits_{y_1(z)}^{y_2(z)} g dy$.

Система рівнянь рівноваги з урахуванням вихідних передумов отримана такою:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \tag{3}$$

Рівняння (2) та (3) складають систему для визначення напруженого стану розглядуваного композитного бруса при плоскому згинанні.

Функції напружень та переміщень. Система диференціальних рівнянь рівноваги (3) доповнена співвідношенням (2) може бути розв'язана відносно функцій напружень. Функція вертикальних переміщень w та невідомі функції інтегрування, що з'являться у загальному розв'язку вказаних рівнянь, мають бути визначені із граничних умов для відповідних зведених до площини ZOX напружень (рис. 1)

$$\bar{\tau}_{xz}\Big|_{z_1} = -\bar{q}_{zx1},\ \ \bar{\sigma}_z\Big|_{z_1} = -\bar{q}_{z1},\ \ \bar{\tau}_{xz}\Big|_{z_2} = \bar{q}_{xz2},\ \ \bar{\sigma}_z\Big|_{z_2} = \bar{q}_{z2}. \tag{4}$$

Після інтегрування рівнянь системи (3), з урахуванням 1-ої, 2-ої та 4-ої граничних умов (4) та деяких перетворень, отримані наступні співвідношення:

$$\bar{\tau}_{xz} = -\int\limits_{A(z)} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dA - \bar{q}_{xz1},\ \ \bar{\sigma}_z = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_{z_1}^{z}\int\limits_{A(z)} \sigma_x dA dz + \int\limits_{z_1}^{z} dz \frac{d\bar{q}_{xz1}}{dx} - \bar{q}_{z1},$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_{z_1}^{z_2}\int\limits_{A(z)} \sigma_x dA dz - \int\limits_{z_1}^{z_2} dz \frac{d\bar{q}_{xz1}}{dx} = -\bar{q}_{z2} - \bar{q}_{z1}, \tag{5}$$

де $A(z)$ – площа нижньої відсіченої частини перерізу на рівні z (рис. 1).

Співвідношення (2) та перше рівняння (5) складають вихідну систему для побудови вихідних гіпотез ітераційної моделі згину композитних брусів. Подальше аналітичне розв'язання системи дозволяє отримати нові співвідношення моделі деформування композитних брусів.

Співвідношення (5) після підстановки виразу (2) та визначення другої похідної від сталої інтегрування F_1, за допомогою 3-ої граничної умови (4), набудуть наступного вигляду

$$\bar{\tau}_{xz} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi\left(\frac{\bar{\tau}_{zx}}{\bar{G}_{zx}} - \frac{dw}{dx}\right) + \eta\bar{q}_{xz2} + (\eta - 1)\bar{q}_{xz1}, \tag{6}$$

$$\bar{\sigma}_z = \frac{\partial^3}{\partial x^3}\int\limits_{z_1}^{z}\Phi\left(\frac{\bar{\tau}_{zx}}{\bar{G}_{zx}} - \frac{dw}{dx}\right)dz - \int\limits_{z_1}^{z}(\eta - 1)dz\frac{d\bar{q}_{xz1}}{dx} - \int\limits_{z_1}^{z}\eta dz\frac{d\bar{q}_{xz2}}{dx} - \bar{q}_{z1}, \tag{7}$$

$$-\frac{\partial^3}{\partial x^3}\int\limits_{z_1}^{z_2}\Phi\left(\frac{\bar{\tau}_{zx}}{\bar{G}_{zx}} - \frac{dw}{dx}\right)dz + \int\limits_{z_1}^{z_2}\eta dz\frac{d\bar{q}_{xz2}}{dx} + \int\limits_{z_1}^{z_2}(\eta - 1)dz\frac{d\bar{q}_{xz1}}{dx} = -(\bar{q}_{z2} + \bar{q}_{z1}). \tag{8}$$

де $\eta = \eta(z) = \int\limits_{A(z)} E_x dA \Big/ \int\limits_{A} E_x dA$.

У приведених виразах для спрощення подання співвідношень уведено інтегральний оператор

$$\Phi(\quad) = \int\limits_{A(z)} E_x \int (\quad) dzdA - \eta \int\limits_{A} E_x \int (\quad) dzdA . \tag{9}$$

Рівняння (6) разом із (8) становлять систему для визначення невідомих функцій $\bar{\tau}_{xz}$ та w, від яких залежить решта функцій напружень та переміщень. Рівняння (6) відносно функції дотичних напружень є інтегро-диференціальним рівнянням змішаного типу – похідна від функції є і під інтегралом із змінною межею, що відповідає рівнянням типу Вольтерра, і під визначеним інтегралом, що відповідає рівнянням типу Фредгольма. Для його розв'язання застосуємо метод послідовних наближень (метод ітерацій) [0]. Якщо інтегральний оператор (9) є стискаючим, то отримана послідовність наближень буде збіжною до граничної функції, яка і є точним розв'язком рівняння.

Прийнявши у нульовому наближенні $\bar{\tau}_{xz(0)} = 0$, отримаємо вираз наступного першого наближення у вигляді

$$\bar{\tau}_{xz(1)} = \Phi(1)\frac{d^3w}{dx^3} + \eta\bar{q}_{xz2} + (\eta-1)\bar{q}_{xz1} = \varphi_0 \frac{d^3w}{dx^3} + \varphi_{0q_1}\bar{q}_{xz2} + \varphi_{0q_2}\bar{q}_{xz1} . \tag{10}$$

Друге наближення отримаємо використавши результат першого

$$\bar{\tau}_{xz(2)} = \varphi_1 \frac{d^5w}{dx^5} + \varphi_0 \frac{d^3w}{dx^3} + \varphi_{1q_2} \frac{d^2\bar{q}_{xz2}}{dx^2} + \varphi_{0q_2}\bar{q}_{xz2} + \varphi_{1q_1} \frac{d^2\bar{q}_{xz1}}{dx^2} + \varphi_{0q_1}\bar{q}_{xz1}.$$

Таким чином, кожне наступне наближення $\bar{\tau}_{xz(n)}$ отримаємо використавши попереднє $\bar{\tau}_{xz(n-1)}$. Сукупність усіх наближень складає нескінченну функціональну послідовність

$$\bar{\tau}_{xz(0)}, \bar{\tau}_{xz(1)}, \bar{\tau}_{xz(2)}, \bar{\tau}_{xz(3)}, \ldots, \bar{\tau}_{xz(n)}, \ldots, \tag{11}$$

причому

$$\bar{\tau}_{xz(n)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_{i-1} \frac{d^{2i+1}w}{dx^{2i+1}} + \varphi_{(i-1)q_2} \frac{d^{2(i-1)}\bar{q}_{xz2}}{dx^{2(i-1)}} + \varphi_{(i-1)q_1} \frac{d^{2(i-1)}\bar{q}_{xz1}}{dx^{2(i-1)}} \right), \ n \geq 1, \tag{12}$$

де $\varphi_0 = \Phi(1), \varphi_{0q_2} = \eta$, $\varphi_{0q_1} = (\eta-1)$, а функції φ_j при $j > 0$ визначаються рекурсивним співвідношенням $\varphi_j = -\Phi\left(\varphi_{j-1} / \bar{G}_{zx}\right)$.

Якщо послідовність (11) є збіжною, то можна говорити, що рівняння (6) має розв'язок відносно функції дотичних напружень:

$$\bar{\tau}_{xz} = \lim_{n\to\infty} \bar{\tau}_{xz(n)} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\varphi_{i-1} \frac{d^{2i+1}w}{dx^{2i+1}} + \varphi_{(i-1)q_2} \frac{d^{2(i-1)}\bar{q}_{xz2}}{dx^{2(i-1)}} + \varphi_{(i-1)q_1} \frac{d^{2(i-1)}\bar{q}_{xz1}}{dx^{2(i-1)}} \right). \tag{13}$$

Зведені поперечні напруження $\bar{\sigma}_{z(n)}$ довільного наближення n, отримаємо на основі виразу (7), підставивши до нього (12). Граничну функцію послідовності наближень $\bar{\sigma}_{z(n)}$ отримаємо при $n \to \infty$:

$$\bar{\sigma}_z = -\sum_{i=0}^{\infty} \int_{z_1}^{z} \left(\varphi_i \frac{d^{2i+4} w}{dx^{2i+4}} + \varphi_{(i)q_2} \frac{d^{2i+1} \bar{q}_{xz2}}{dx^{2i+1}} + \varphi_{(i)q_1} \frac{d^{2i+1} \bar{q}_{xz1}}{dx^{2i+1}} \right) dz - \bar{q}_{z1} . \qquad (14)$$

Нормальні напруження σ_x після виключення із співвідношення (2) похідної функції інтегрування F_1 матимуть наступний вигляд

$$\sigma_x = E_x \frac{\partial}{\partial x} \Psi \left(\frac{\bar{\tau}_{zx}}{\bar{G}_{zx}} - \frac{dw}{dx} \right) + E_x \mu N , \qquad (15)$$

де $\mu = 1 \Big/ \int_A E_x dA$; $N = N(x)$ – поздовжня сила.

У виразі (15) використано інтегральний оператор

$$\Psi(\ \ ) = \left(\int (\ \ ) dz - \mu \int_A E_x \int (\ \ ) dz dA \right). \qquad (16)$$

Використавши у (15) зведені дотичні напруження (12), отримаємо напруження $\sigma_{x(n)}$ довільного наближення n. Граничну функцію нормальних напружень маємо при $n \to \infty$:

$$\sigma_x = E_x \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \frac{d^{2i+2} w}{dx^{2i+2}} + E_x \sum_{i=1}^{\infty} \left(\psi_{iq_1} \frac{d^{2i-1} \bar{q}_{xz2}}{dx^{2i-1}} + \psi_{iq_2} \frac{d^{2i-1} \bar{q}_{xz1}}{dx^{2i-1}} \right) + E_x \mu N , \qquad (17)$$

де $\psi_0 = -\Psi(1)$, а функції ψ_j при $j > 0$ визначаються рекурсивним співвідношенням $\psi_j = \Psi\left(\varphi_{j-1} / \bar{G}_{zx}\right)$.

Аналогічно наведеним співвідношенням для напружень отримані і поздовжні переміщення

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \frac{d^{2i+1} w}{dx^{2i+1}} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\psi_{iq_1} \frac{d^{2i} \bar{q}_{xz2}}{dx^{2i}} + \psi_{iq_2} \frac{d^{2i} \bar{q}_{xz1}}{dx^{2i}} \right) + \mu \int_{x_0}^{x} N dx , \qquad (18)$$

де x_0 – координата крайнього лівого перерізу бруса.

Вирази напружень (13), (14), (17) та поздовжніх переміщень (18) залежать від похідних функції w. Для визначення даної функції використаємо рівняння (8). Підставивши до даного рівняння вираз (12), після перетворень та переходу до межі при $n \to \infty$, отримаємо граничне рівняння для визначення функції вертикальних переміщень w

$$\sum_{i=0}^{\infty} D_i \frac{d^{2i+4}w}{dx^{2i+4}} = -\sum_{i=0}^{\infty}\left(D_{(i)q_2} \frac{d^{2i+1}q_{xz2}}{dx^{2i+1}} + D_{(i)q_1} \frac{d^{2i+1}q_{xz1}}{dx^{2i+1}} \right) - \left(q_{z2} + q_{z1}\right). \quad (19)$$

де $\int_{z_1}^{z_2} \varphi_i dz = D_i$, $\int_{z_1}^{z_2} \varphi_{(i)q_2} dz = D_{(i)q_2}$, $\int_{z_1}^{z_2} \varphi_{(i)q_1} dz = D_{(i)q_1}$ – жорсткісні характеристики перерізу композитного бруса.

Отримане рівняння є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами, розв’язок якого можна отримати відомими методами. Але у завершеному вигляді розв’язання даного рівняння можливе лише у виняткових випадках, тому для практичного використання доведеться обмежитись певним кроком наближення отриманих співвідношень. Відмітимо, що нульовий крок наближення наведених розв’язків так, як і в ітераційній моделі, відповідає класичній моделі згину, яка заснована на гіпотезі плоских перерізів.

Висновок

Розв’язання поставленої задачі визначення НДС композитного бруса з урахуванням прийнятих спрощень зводиться до визначення функції вертикальних переміщень (прогинів) w із диференціального рівняння (19). Використання отриманих співвідношень можливе лише у випадку збіжності послідовності наближень для напружень $\overline{\tau}_{xz(n)}$, тому встановлення області їх збіжності, а також дослідження швидкості збіжності окремих наближень є важливим для практичної реалізації і потребує подальших досліджень.

Summary

Found approximate solution to the problem of elasticity theory for a flat transverse bending composite non-uniform beams with straight axis under the action of system normal and tangential external loads, that reduced to the main plane stiffness.

Література

1. Колчин Г. Расчет элементов конструкций из упругих неоднородных материалов / Г. Колчин – Кишинев: «КАРТЯ МОЛДОВЕНЯСКЭ», 1971. – 172с.

2. Пискунов В.Г. Итерационная аналитическая теория в механике слоистых композитных систем / Пискунов В.Г. // Механика композит. Материалов. – 2003. – Т.39, №1. – С.2-24.

3. Горик О.В. Механіка деформування композитних брусів / О.В. Горик, В.Г. Піскунов, В.М. Чередніков. – Полтава-Київ: АСМІ, 2008. – 402с.

4. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий – М.: Гос. изд-во физ-мат. лит-ры «Наука», 1977 – 416с.

5. Трикоми Ф. Интегральные уравнения / Ф. Трикоми. – М.: Изд. иностр. лит-ры, 1960 – 292с.

6. Ковальчук С.Б. Моделювання структурної будови композитних дискретно-неоднорідних брусів / С.Б. Ковальчук // Збірник тез доповідей професорсь-ко-викладацького складу аграрно-інженерного інституту. Полтава: РВВ Полтавської державної аграрної академії, 2012. – Вип. 1. – С.36-37.