

## НЕЛІНІЙНА ДЕФОРМАЦІЙНА МОДЕЛЬ В ІНЖЕНЕРНИХ РОЗРАХУНКАХ МІЦНОСТІ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

**Павліков А.М., д.т.н., проф., Бойко О.В., к.т.н.,  
Федоров Д.Ф., аспірант, Харченко М.О., аспірантка,  
Пащенко Н.С., студентка**

*Полтавський національний технічний університет  
імені Юрія Кондратюка, Україна*

Введені в дію нормативні документи [1, 2] розрахунок за міцністю балкових елементів залізобетонних конструкцій рекомендують виконувати на основі нелінійної деформаційної моделі. Але реалізація розрахунку за викладеною в [2] методикою потребує розв'язання рівнянь рівноваги методом ітерацій. При цьому їх кількість часто є настільки значною, що реалізація даного розрахунку в інженерній практиці без спеціальних комп'ютерних програм стає неможливою.

Усунути відмічений недолік можна завдяки використанню в розрахунках міцності балкових елементів поняття екстремального критерію їх міцності, котрий дозволяє кількість ітерацій зменшити до мінімуму, а в деяких випадках обійтись без них, використавши характерні властивості діаграми стану залізобетонного елемента, трансформованої з діаграми фізичного стану бетону.

Удосконаленню розрахунку міцності залізобетонних елементів на основі нелінійної деформаційної моделі присвячено багато робіт ([4 – 9] та інші). Але поки що деталізованого інженерного методу розрахунку, котрий дозволяв би в простій формі розв'язувати як задачу (першу) з підбору арматури залізобетонних балкових елементів, так і задачу (другу) з визначення їх міцності, не розроблено. Тому розроблення методів розрахунку міцності балкових елементів на основі нелінійної деформаційної моделі, котрі можна було б застосовувати в інженерній практиці проектування залізобетонних конструкцій та у навчальному процесі, є актуальною на сьогодні задачею.

Метод розрахунку міцності розглядається на прикладі балки прямокутного поперечного перерізу (рис. 1, а). При цьому вважається, що її несуча здатність буде максимальною в момент досягнення бетоном на рівні найбільш стиснутої її фібри таких значень деформацій  $\varepsilon_{cm} = \varepsilon_{cu}$ , при яких функціонально представлений внутрішній згинальний момент

$M_m = f(\varepsilon_{cm})$  в стадії руйнування балки набуває значень  $M_u(\varepsilon_{cu}) = \max M(\varepsilon_{cm})$ .

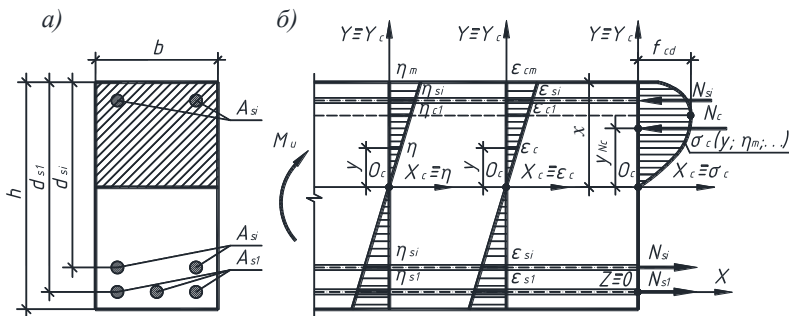


Рис. 1 – Схема до отримання розрахункових формул міцності залізобетонного елемента при згинанні

Для прийнятої розрахункової схеми (рис. 1) загальні рівняння рівноваги у нормальному перерізі балки для її стадії руйнування записані таким чином:

$$\sum X = 0; E_s \sum_{i=1}^n A_{si} \varepsilon_{si} - N_c = 0; \quad (1)$$

$$\sum M_z = 0; M_m - N_c (d_{s1} - x + y_{Nc}) + E_s \sum_{i=1}^n A_{si} \varepsilon_{si} (d_{s1} - d_{si}) = 0. \quad (2)$$

У цих рівняннях  $A_{si}$ ,  $N_c$  – відповідно площа і-того стержня та рівнодійна напружень у бетоні стиснутої зони;  $d_{si}$ ,  $x$ ,  $y_{Nc}$  – відповідно робоча висота і-того стержня, висота стиснутої зони поперечного перерізу, відстань від нейтральної лінії до точки прикладання зусилля  $N_c$ . Застосування рівнянь рівноваги (1) та (2) ураховують передумови розрахунку за [2]. Зв'язок між напруженнями та деформаціями в бетоні стиснутої зони бетону описується на основі використання функції

$$\sigma_c = f_{cd} (K\eta - \eta^2) / (1 + (K-2)\eta), \quad (3)$$

в якій  $K = 1,05 E_{cd} \varepsilon_{c1,cd} / f_{cd}$ ;  $\eta = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1,cd}$ ;  $E_{cd}$  – розрахункове значення модуля пружності бетону;  $\varepsilon_{c1,cd}$  – значення відносних деформацій стиску бетону при максимальних напруженнях,  $f_{cd}$  – розрахункове значення міцності бетону на стиск.

Діаграма «напруження-деформації» роботи арматури на розтяг (стиск) з фізичною ділянкою текучості описується залежностями:

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s \text{ при } 0 < \varepsilon_s \leq \varepsilon_{s0} = f_{yd} / E_s; \quad (4)$$

$$\sigma_s = f_{yd} \text{ при } \varepsilon_{s0} = f_{yd} / E_s < \varepsilon_s \leq \varepsilon_{ud}; \quad (5)$$

в яких  $f_{yd}$  – розрахункове значення міцності арматури на межі текучості;  $E_s$  – розрахункове значення модуля пружності арматури.

Критерієм максимальної міцності поперечного перерізу балкового елемента [10] є умова

$$M_u(\varepsilon_{cu}) = M_u = \max M(\varepsilon_{cm}), \quad (6)$$

котрій одночасно відповідає критерій мінімальної кількості арматури за умовою

$$A_s(\varepsilon_{cu}) = A_{s,min} = \min A_s(\varepsilon_{cm}). \quad (7)$$

В умовах (6) та (7) граничне (характерне) значення відносної деформації бетону на стиск (або її рівень)  $\varepsilon_{cu} > \varepsilon_{cl}$  ( $\varepsilon_{cm} / \varepsilon_{cl} = \eta_m$ ,  $\varepsilon_{cu} / \varepsilon_{cl} = \eta_u$ ) задовольняє двоїсту за суттю умову екстремального критерію міцності нормального перерізу балки [2].

Із (1) – (6) випливає, що залежно від типу задачі – першої чи другої – невідомими будуть три параметри. Для першої задачі такими невідомими параметрами є  $A_{si}$ ,  $x$ ,  $\eta_u$ , а для другої –  $M_u$ ,  $x$ ,  $\eta_u$ . Невідому величину  $\eta_u$ , можна отримати шляхом дослідження на екстремум відповідних функцій, котрі виражатимуть сутність рівняння (2). Тобто, в основу шуканої залежності для визначення значення параметра  $\eta_u$  у розв'язанні задач першого типу буде покладено рівняння у вигляді  $\partial A_s / \partial \eta_m = 0$  – на основі критерію (7), а для визначення значення параметра  $\eta_u$  у розв'язанні задач другого типу буде покладено рівняння у вигляді  $\partial M_m / \partial \eta_m = 0$  – на основі критерію (6).

Для того, щоб отримати шукані для дослідження на екстремум функції, необхідно у рівняннях (1) та (2) усі складові функціонально виразити через  $\sigma_s$ ,  $x$ ,  $\eta_m$  або  $\sigma_s$ ,  $x$ ,  $\varepsilon_m = \varepsilon_{cl} / \eta_m$ .

Для поставленої мети з (3) отримано закон розподілення напружень в бетоні стиснутої зони у вигляді  $\sigma_c = f(y, \eta_m, \dots)$ , що описує розподілення напружень у бетоні стиснутої зони в системі координат  $Y_c O_c X_c$  з її початком  $O_c$  на нейтральній лінії (рис. 1, б), у вигляді:

$$\sigma_c(y, \eta_m, \dots) = f_{cd} \eta_m y (Kx - \eta_m y) / x [x + (K - 2)\eta_m y]. \quad (8)$$

Застосовуючи (8) складові рівнянь (1) та (2), після виконання необхідних математичних дій, приведені до виразів:

$$N_c = b \int_0^x \frac{f_{cd} \eta_m y (Kx - \eta_m y)}{x(x + (K - 2)\eta_m y)} dy = f_{cd} b x \omega(\eta_m), \quad (9)$$

$$y_{Nc} = S_c / N_c = x \frac{\varphi(\eta_m)}{\omega(\eta_m)}, \quad (10)$$

$$S_c = b \int_0^x \frac{f_{cd} \eta_m y (Kx - \eta_m y) y}{x(x + (K - 2)\eta_m y)} dy = f_{cd} b x^2 \varphi(\eta_m), \quad (11)$$

де  $\omega(\eta_m)$  та  $\varphi(\eta_m)$  – відповідно, як видно з формул (9) та (11), коефіцієнт повноти епюри напружень та відносне значення координати прикладання зусилля  $N_c$  у бетоні стиснутої зони [4].

Урахувавши, що деформації у будь-якому зі стержнів у перерізі  $\varepsilon_{si} = \varepsilon_{c1} \eta_m (d_{si} - x) / x$ , та функціонально виразивши через  $\sigma_s$ ,  $x$ ,  $\eta_m$  усі величини в рівняннях (1) та (2), останні набувають вигляду:

$$\frac{f_{cd} b x \omega}{E_s \varepsilon_{c1} \eta_m} x^2 + \sum A_{si} x - \sum A_{si} d_{si} = 0, \quad (12)$$

$$M_m - N_c (d_{s1} - x + y_{Nc}) + E_s \sum A_{si} \varepsilon_{si} (d_{s1} - d_{si}) = 0. \quad (13)$$

Рівняння (12) дозволяє в задачах з визначення міцності обчислювати висоту стиснутої зони поперечного перерізу балкового елемента у граничному стані на рівні найбільш стиснутої фібри, тобто, коли  $\eta_m = \eta_u$ .

Аналізуючи рівняння рівноваги (12) та (13) разом з умовами (6) та (7) можна прийти до висновку, що, використавши фізичний зміст відомих коефіцієнтів  $\alpha_m$ ,  $\xi$  та  $\zeta$  за [3], рівняння (13) для обчислення параметра  $\eta_u$  можна звести шуканої функції

$$M_m = f_{cd} b x (d - \chi x) = f_{cd} b d^2 \xi (1 - \chi \xi) = \bar{\alpha}_m f_{cd} b d^2, \quad (14)$$

у котрій

$$\chi(\eta_m) = (\omega - \varphi) / \omega^2, \quad (15)$$

$$\xi = \bar{\xi} \omega = f_{yd} A_s / f_{cd} b d, \quad (16)$$

$$\bar{\alpha}_m = \xi (1 - \chi \xi) = \xi \bar{\zeta}, \quad (17)$$

$$\bar{\zeta} = 1 - \chi \xi. \quad (18)$$

У залежностях (15) – (18) коефіцієнти  $\bar{\alpha}_m$ ,  $\bar{\xi}$  та  $\bar{\zeta}$  – за фізичним змістом аналогічні коефіцієнтам  $\alpha_m$ ,  $\xi$  та  $\zeta$  з [3], але в них синтезовані особливості, властиві нелінійній деформаційній моделі при  $\eta_m = \eta_u$ .

Опираючись на критерій (6), для визначення значень  $\eta_u$  рівняння (14) досліджено на екстремум за умовою  $\partial M_m / \partial \eta_m = 0$ . У результаті отримано диференціальне рівняння

$$\chi(\varphi(\eta_m), \omega(\eta_m))' = (2\varphi - \omega) \omega' - \omega \varphi' = 0, \quad (19)$$

розв'язок котрого, після підстановки в нього залежностей  $\omega = f_1(\eta_u)$  і  $\varphi = f_2(\eta_u)$  за [4], має вигляд трансцендентного алгебраїчного рівняння відносно  $\eta_m = \eta_u$  [4], яке дає можливість обчислювати сукупність граничних рівнів фібрових відносних деформацій бетону у залізобетонно-

му балковому елементі в момент досягнення ним найбільшого опору дії моменту  $M_u$ .

Оскільки в отриманих залежностях (15) – (18) значення параметрів  $\omega, \varphi, \chi$  залежать від коефіцієнта  $K$  та рівня фібрових деформацій бетону  $\eta_u$ , то для зручності їх застосування в розрахунках вони зведені у таблицю (табл. 1) залежно від значень  $K$  та значень  $\eta_u$ .

Табл. 1 – Значення параметрів  $\omega, \varphi, \chi, \eta_u$  залежно від значень коефіцієнта  $K$

	$K$								
	1,18	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
$\eta_u$	1,075	1,200	1,268	1,309	1,339	1,363	1,382	1,398	1,412
$\omega$	0,587	0,673	0,732	0,768	0,792	0,811	0,825	0,838	0,848
$\varphi$	0,383	0,421	0,443	0,455	0,462	0,467	0,471	0,474	0,476
$\chi$	0,591	0,555	0,539	0,531	0,526	0,523	0,520	0,518	0,517
$\varphi/\omega$	0,652	0,625	0,605	0,592	0,586	0,576	0,574	0,566	0,561

З метою застосування розробленої методики в розрахунках міцності елементів залізобетонних конструкцій значення коефіцієнтів  $\bar{\alpha}_m, \bar{\xi}$  та  $\bar{\zeta}$  протабульовані за даними таблиці 1 та формулами (15) – (18) у таблиці 2.

Табл. 2 – Значення коефіцієнтів  $\bar{\alpha}_m, \bar{\xi}$  та  $\bar{\zeta}$  залежно від значень параметрів  $K$  та  $\xi$

$\xi$	$K$											
	2			2,5			3			3,5		
	$\bar{\xi}$	$\bar{\zeta}$	$\bar{\alpha}_m$	$\bar{\xi}$	$\bar{\zeta}$	$\bar{\alpha}_m$	$\bar{\xi}$	$\bar{\zeta}$	$\bar{\alpha}_m$	$\bar{\xi}$	$\bar{\zeta}$	$\bar{\alpha}_m$
0,1	0,137	0,946	0,095	0,130	0,947	0,095	0,126	0,947	0,095	0,123	0,948	0,095
0,2	0,273	0,892	0,178	0,261	0,894	0,179	0,252	0,895	0,179	0,247	0,895	0,179
0,3	0,410	0,838	0,252	0,391	0,841	0,252	0,379	0,842	0,253	0,370	0,843	0,253
0,4	0,546	0,785	0,314	0,521	0,788	0,315	0,505	0,790	0,316	0,493	0,791	0,316
0,5	0,683	0,731	0,365	0,652	0,735	0,367	0,631	0,737	0,369	0,617	0,739	0,369
0,6	0,820	0,677	0,406	0,782	0,682	0,409	0,757	0,684	0,411	0,740	0,686	0,412
0,7	0,956	0,623	0,436	0,912	0,628	0,440	0,884	0,632	0,442	0,863	0,634	0,444

**Висновок.** Розроблену з урахуванням нелінійних властивостей бетону та відповідно до вимог сучасної нормативної бази за [1] методику розрахунку міцності залізобетонних елементів можна використовувати в практиці проектування залізобетонних елементів.

## Summary

**The proposals for using nonlinear deformation model in the engineering strength calculations of bended reinforced concrete elements in the normal section are offered.**

1. Конструкції будинків і споруд. Бетонні та залізобетонні конструкції. Основні положення : ДБН В.2.6-98:2009. – К.: Мінрегіонбуд України, 2009. – 71 с.

2. Конструкції будинків і споруд. Бетонні та залізобетонні конструкції з важкого бетону. Правила проектування : ДСТУ Б В.2.6-156:2010. – К.: Мінрегіонбуд України, 2011. – 118 с.

3. Бетонные и железобетонные конструкции : СНиП 2.03.01-84\*. – М.:ЦИТП Госстроя СССР, 1989. – 80 с.

4. Павліков А.М. Нелінійна модель напружено-деформованого стану косо завантажених залізобетонних елементів у закритичній стадії : монографія / А.М. Павліков. – Полтава, 2007. – 320 с.

5. Павліков А.М. Використання діаграми стану бетону при визначенні площі поздовжньої арматури в залізобетонних балках / А.М. Павліков // Галузеве машинобудування, будівництво: зб. наук. праць. – Полтава: ПолтНТУ, 2004. – Вип. 14. – С. 20 – 22.

6. Павліков А.М. Урахування особливостей деформаційної моделі в розрахунку міцності згинальних залізобетонних елементів у нормальному перерізі за СНиП 2.03.01-84 / А.М. Павліков // Коммун. хоз. городов: сб. науч. трудов. – Киев : Техника, 2009. – Вип.90. – С. 248 – 254.

7. Павліков А.М. Розв'язання задач міцності залізобетонних елементів у нормальному перерізі / А.М. Павліков, О.В. Бойко // Галузеве машинобудування, будівництво: зб. наук. праць. – Полтава: ПолтНТУ, 2010. – Вип. 2(27). – С. 18 – 22.

8. Павліков А.М. Розрахунок міцності залізобетонних елементів у нормальному перерізі, синтезований на основі СНиП 2.03.01.-84 та нелінійної деформаційної моделі / А.М. Павліков // Вісник НУ «Львівська політехніка». – Львів, 2010. – №664. – С. 128 – 132.

9. Кочкаръов Д.В. Практичний розрахунок згинальних залізобетонних елементів за міцністю на основі нелінійного деформування матеріалів / Д.В. Кочкаръов, В.І. Бабич // Бетон и железобетон в Украине. – 2011. – №5. – С. 22 – 26.

10. Митрофанов В.П. Екстремальний критерій міцності залізобетонних елементів у деформаційній моделі / В.П. Митрофанов, А.М. Павліков // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – К.: НДІБК, 2005. – Вип. 62.– Т.1. – С. 205 – 213.