

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ  
ИССЛЕДОВАНИИ СТАТИКИ И ДИНАМИКИ  
ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК И РАМ С УЧЕТОМ  
НЕЛИНЕЙНОГО ПОВЕДЕНИЯ И ПЛАСТИЧНОСТИ БЕТОНА**

**Фомин В.М.**

*Одесская государственная академия строительства и архитектуры,  
г. Одесса*

В статьях [1]-[3] был предложен алгоритм решения задач статики и динамики статически определимых железобетонных балок и плоских рам с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона, основанный на решении систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [1]. В настоящей работе предлагается использовать для решения указанных задач метод граничных элементов.

В статье [1] было выведено следующее дифференциальное уравнение для определения приращения углов поворота поперечных сечений железобетонной балки при пошаговом методе решения:

$$d\phi' + Z_1(s)d\phi' + Z_2(s)d\phi = -Z_3(s)d\xi - Z_4(s)d\eta. \quad (1)$$

Здесь  $\phi$  — угол поворота поперечного сечения балки (оно предполагается прямоугольным,  $b$  — ширина,  $h$  — высота),  $s$  — длина отрезка дуги оси балки между ее левым концом и рассматриваемым поперечным сечением (рис. 1),  $\xi = np_x H_A / H_0$ ,  $\eta = np_x V_A / H_0$ ,  $H_0 = H / l^2$ ,

$$H = \frac{E_b b h^3}{12(1 - \nu_0^2)} + E_a (S_1 h_1^2 + S_2 h_2^2), \quad l — \text{длина отрезка } AB \text{ оси балки, } E_b —$$

начальный модуль упругости бетона,  $\nu_0$  — его начальный коэффициент Пуассона,  $E_a$  — модуль упругости арматуры,  $S_1$  и  $S_2$  — площади поперечных сечений верхней и нижней арматур,  $h_1$  и  $h_2$  — расстояния от центра сечения до арматур,  $H_A$  и  $V_A$  — горизонтальная и вертикальная составляющие главного вектора внешних сил, приложенных к балке (или раме) левее точки  $A$ . Штрих означает производную по  $s$ . Следует заметить, что в настоящей работе, так же как и в [1]-[3], рассматривается случай, когда нагрузка представляет собой систему сосредоточенных сил, приложенных в узловых точках балки или рамы.

Как показали многочисленные примеры решения задач статики и динамики с помощью указанного выше алгоритма функции  $Z_i(s)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) непрерывны и хорошо аппроксимируются многочленами невысокой степени (третьей-четвертой) по методу наименьших квадратов, т.е. в дальнейшем мы полагаем,  $Z_i(s)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) являются многочленами степени  $n \leq 4$ :

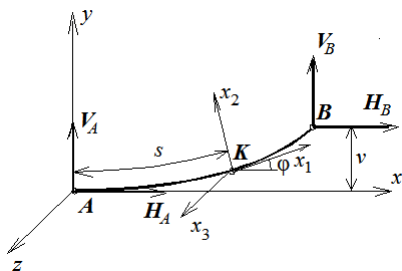


Рис. 1

Для построения этих решений будем использовать метод, предложенный в [6]. В соответствии с этим методом решения будем искать в виде степенных рядов:

$$\Phi_i(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{i,k} s^k \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3)$$

причем

$$\Phi_i'(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{i,k+1} (k+1) s^k, \quad \Phi_i''(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{i,k+2} (k+1)(k+2) s^k. \quad (3a)$$

После подстановки рядов (2), (3) и (3a) в уравнение (1), их перемножения и сложения приравняем коэффициенты при различных степенях  $s$  в выражении, стоящем в левой части (1), нулю. В результате приходим к следующему рекуррентному соотношению:

$$\Phi_{i,k+2} = - \frac{\sum_{m=0}^k \Phi_{i,m+1} (m+1) Z_{1,k-m} + \sum_{m=0}^k \Phi_{i,m} Z_{2,k-m}}{(k+1)(k+2)} \quad (i = 1, 2). \quad (4)$$

Для построения функции  $\Phi_1(s)$  полагаем  $\Phi_{1,0} = 1$ ,  $\Phi_{1,1} = 0$  и принимаем в формуле (4)  $k = 0$ . В результате получаем  $\Phi_{1,2}$ , затем приравни-

ваем  $k = 1$  и находим  $\Phi_{1,3}$  и т.д. Остановливаясь на некотором шаге  $N$ , получаем приближенное выражение для  $\Phi_1(s)$  в виде полинома.

Для построения функции  $\Phi_2(s)$  полагаем  $\Phi_{2,0} = 0$ ,  $\Phi_{2,1} = 1$  и повторяем процедуру нахождения коэффициентов при помощи соотношения (4).

Таким образом, получаем приближенные выражения

$$\Phi_i(s) = \sum_{k=0}^N \Phi_{i,k} s^k \quad (i = 1, 2). \quad (5)$$

Для построения частного решения  $\Phi_p(s)$  уравнения (1), соответствующего нулевым начальным условиям, используем следующее рекуррентное соотношение:

$$\Phi_{p,k+2} = - \frac{\sum_{m=0}^k \Phi_{p,m+1} (m+1) Z_{1,k-m} + \sum_{m=0}^k \Phi_{p,m} Z_{2,k-m} + Z_{3,k} d\xi + Z_{4,k} d\eta}{(k+1)(k+2)} \quad (6)$$

в котором следует положить  $\Phi_{p0} = \Phi_{p1} = 0$ . В результате получим приближенное выражение для  $\Phi_p(s)$  в виде полинома переменной  $s$ :

$$\Phi_p(s) = \sum_{k=0}^N \Phi_{p,k} s^k \quad (7)$$

Решение задачи Коши для уравнения (1) имеет следующий вид:

$$d\phi(s) = d\phi(0)\Phi_1(s) + d\phi'(0)\Phi_2(s) + \Phi_p(s). \quad (8)$$

Дифференцируя (8) по  $s$ , получаем

$$d\phi'(s) = d\phi(0)\Phi_1'(s) + d\phi'(0)\Phi_2'(s) + \Phi_p'(s). \quad (8a)$$

В векторно-матричном виде уравнения (8)-(8a) записываются так:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{A}(s)\mathbf{X}(0) + \mathbf{B}(s), \quad (9)$$

где

$$\mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} d\phi(s) \\ d\phi'(s) \end{bmatrix}, \mathbf{A}(s) = \begin{bmatrix} \Phi_1(s) & \Phi_2(s) \\ \Phi_1'(s) & \Phi_2'(s) \end{bmatrix}, \quad (9a)$$

$$\mathbf{B}(s) = \begin{bmatrix} \Phi_p(s) \\ \Phi_p'(s) \end{bmatrix}, \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} d\phi(0) \\ d\phi'(0) \end{bmatrix}.$$

Для построения функции  $dv(s)$  приращения прогибов балки воспользуемся соотношением [7]

$$dv(s) = \int_0^s \sin d\phi(\tau) d\tau + dv_A, \quad (10)$$

где  $dv_A$  — вертикальное перемещение точки  $A$ . Пользуясь тем, что для железобетонных балок  $d\phi(s)$  мало, можно положить

$$dv(s) = \int_0^s d\phi(\tau) d\tau + dv_A.$$

откуда следует, что

$$V_i(s) = \sum_{k=1}^{N+1} V_{i,k} s^k \quad (i=1,2), \quad V_p(s) = \sum_{k=1}^{N+1} V_{p,k} s^k, \quad (11)$$

$$V_{i,k} = \frac{\Phi_{i,k-1}}{k}, \quad V_{p,k} = \frac{\Phi_{p,k-1}}{k}.$$

### Пример.

Исследуем квазистатический изгиб железобетонной колонны, на которой расположены три груза массой  $5 T$  и на которую действуют горизонтальные силы  $F_i(t) = A_i \sin(2\pi t / T_i)$  ( $i=1,2,3$ ) (рис. 2), причем  $A_1 = 4,9 \text{ кН}$ ,  $A_2 = -4,1 \text{ кН}$ ,  $A_3 = -3,25 \text{ кН}$ ,  $T_1 = 10 \text{ с}$ ,  $T_2 = 10 \text{ с}$ ,  $T_3 = 15 \text{ с}$ ,  $l_1 = l_2 = l_3 = 4 \text{ м}$ . Размеры поперечного сечения, марка бетона и армирование такие же как и в примере 1 статьи [2].

Колонну будем считать стержневой системой, состоящей из трех стержней, пограничные сечения которых проходят через точки  $A$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$ .

Нагружение колонны происходит в два этапа. На предварительном этапе происходит постепенное увеличение массы грузов (т.е. постепенное увеличение сил тяжести) от нуля до заданного значения. Это приводит к появлению сжимающих напряжений и перемещений, которые легко определяются при помощи деформационной теории пластичности.

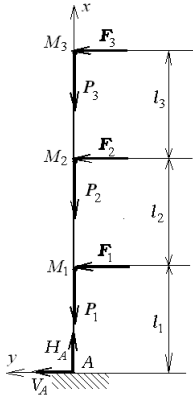


Рис. 2

Затем при  $t = 0$  начинается основной этап: включаются силы  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$ . Для определения прогибов используем метод граничных элементов.

Примем шаг по времени  $\Delta t = 0,25$  с. В соответствии с алгоритмом, изложенным в [1], на каждом шаге для каждого из стержней строятся функции  $Z_{j,i}(s)$  ( $i = 1,2,3,4$ ;  $j = 1,2,3$ ;  $j$  — номер стержня). Затем с помощью метода наименьших квадратов получаем полиномиальную аппроксимацию для каждой из этих функций. Далее при помощи (4) находим коэффициенты разложения фундаментальных функций  $\Phi_{j,i}(s)$  ( $i = 1,2$ ;  $j = 1,2,3$ ;  $j$  — номер стержня) задачи Коши для каждого из стержней, а при помощи (5) их полиномиальное представление.

Аналогично при помощи (6) и (7) строим частные решения  $\Phi_{p,j}(s)$  ( $j = 1,2,3$ ) задачи Коши для стержней.

Запишем следующее соотношение [4,5]:

$$A(l)X(0) - Y(l) = -B(l). \quad (12)$$

Здесь (для рассматриваемой стержневой системы)

$$A(l) = \begin{bmatrix} \Phi_{1,1}(l_1) & \Phi_{1,2}(l_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_{1,1}'(l_1) & \Phi_{1,2}'(l_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{2,1}(l_2) & \Phi_{2,2}(l_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{2,1}'(l_2) & \Phi_{2,2}'(l_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{3,1}(l_3) & \Phi_{3,2}(l_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{3,1}'(l_3) & \Phi_{3,2}'(l_3) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$X(0) = \begin{bmatrix} d\phi_1(0) \\ d\phi_1'(0) \\ d\phi_2(0) \\ d\phi_2'(0) \\ d\phi_3(0) \\ d\phi_3'(0) \end{bmatrix}, \quad Y(l) = \begin{bmatrix} d\phi_1(l_1) \\ d\phi_1'(l_1) \\ d\phi_2(l_2) \\ d\phi_2'(l_2) \\ d\phi_3(l_3) \\ d\phi_3'(l_3) \end{bmatrix}, \quad B(l) = \begin{bmatrix} \Phi_{p,1}(l_1) \\ \Phi_{p,1}'(l_1) \\ \Phi_{p,2}(l_2) \\ \Phi_{p,2}'(l_2) \\ \Phi_{p,3}(l_3) \\ \Phi_{p,3}'(l_3) \end{bmatrix}. \quad (13a)$$

Граничные условия для стержневой системы, изображенной на рис. 2, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} d\phi_1(0) = 0, d\phi_2(0) = d\phi_1(l_1), d\phi_2'(0) = d\phi_1'(l_1), \\ d\phi_3(0) = d\phi_2(l_2), d\phi_3'(0) = d\phi_2'(l_2), d\phi_2'(l_3) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, первый элемент вектора  $X(0)$  и последний элемент вектора  $Y(l)$  равны нулю.

Используя (14) можно записать вектор  $Y(l)$  так:

$$Y(l) = \begin{bmatrix} d\phi_2(0) \\ d\phi_2'(0) \\ d\phi_3(0) \\ d\phi_3'(0) \\ d\phi_3(l_3) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Заменяем нулевой элемент вектора  $X(0)$  на элемент  $d\phi_3(l_3)$  вектора  $Y(l)$ :

$$X^*(0, l) = \begin{bmatrix} d\phi_3(l_3) \\ d\phi_1'(0) \\ d\phi_2(0) \\ d\phi_2'(0) \\ d\phi_3(0) \\ d\phi_3'(0) \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$A(l)X(0) = A_0(l)X^*(0, l) \quad (15)$$

( $A_0(l)$  равна матрице  $A(l)$  с обнуленным первым столбцом).

Матрица  $C$ , которая опустит первый элемент вектора  $X^*(0, l)$  на пятую ступеньку, второй сделает равным нулю, а четыре последних поднимет вверх на два номера, выглядит так:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Очевидно, что

$$CX^*(0, l) = Y(l). \quad (16)$$

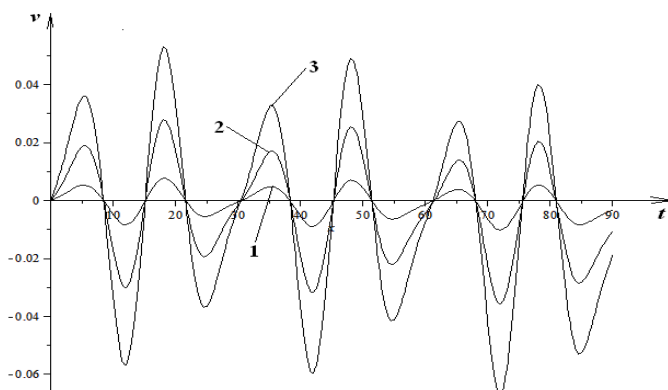


Рис. 3

Тогда учитывая (15) и (16), равенство (12) можно записать в следующем виде:

$$A^*(l)X^*(0, l) = -B(l), \quad (17)$$

где  $A^*(l) = A_0(l) - C$ .

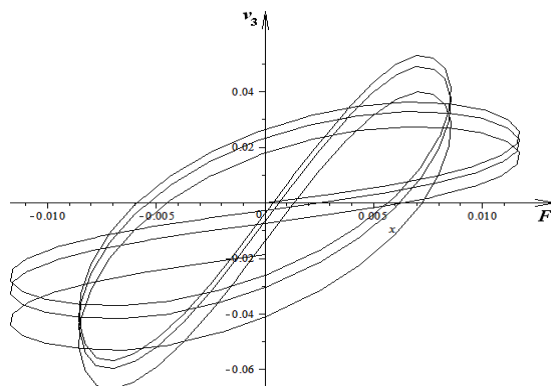


Рис. 4

Таким образом, нахождение неизвестных величин  $d\phi_1'(0)$ ,  $d\phi_2(0)$ ,

$d\phi_2'(0)$ ,  $d\phi_3(0)$ ,  $d\phi_3'(0)$  и  $d\phi_3(l_3)$ , необходимых для построения прогибов колонны свелось к решению системы линейных уравнений (17). На основании изложенного алгоритма был проведен ряд расчетов.

На рис. 3 приведены графики движения грузов  $M_i$  ( $i = 1,2,3$ ; время  $t$  в секундах, перемещения грузов  $v$  в метрах). На рис. 4 приведена траектория движения изображающей точки на плоскости ( $F(t)$ ,  $v_3(t)$ ) ( $v_3(t)$  — перемещение третьего груза,  $F(t) = F_1(t) + F_2(t) + F_3(t)$ ).

На рис. 4 заметно накопление остаточных деформаций.

### **Вывод**

Изложенная методика позволяет применить метод граничных элементов при расчете железобетонных балок и рам с учетом физической и геометрической нелинейностей и пластичности бетона.

### **SUMMARY**

**The procedure stated here enables one to apply boundary elements method in RC beam and frame design with taking into account physical and geometrical nonlinearity and concrete plasticity.**

### **Литература**

1. Фомин В.М. Дифференциальное уравнение плоского изгиба железобетонной балки с учетом пластичности бетона при сложном нагружении // Вісник ОДАБА. Вып.44, – Одесса, 2011. – с.345–353.
2. Фомин В.М., Фомина И.П. Плоский изгиб продольно сжатой ж.б.консольной балки с учетом пластичности бетона при сложном нагружении// Вісник ОДАБА. Вып., – Одесса, . – с..3.
3. Фомин В.М. Колебания железобетонной консольной балки с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона при сложном нагружении. // Вісник ОДАБА. Вып., – Одесса, . – с..
4. В. А. Баженов, В. Ф. Оробей и др. Численные методы в механике — Одесса, 2004 — 564 с.
5. В. Ф. Оробей, А.В. Ковров. Решение задач статики, динамики и устойчивости стержневых систем. Применение метода граничных элементов — Одесса, 2004 — 123 с.
6. Фомин В.М. Об одном методе решения задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами// Вісник ОДАБА. Вып. 48, часть 2. – Одесса, 2012. – с.175-178.
7. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. — Л. : Машиностроение, 1986. — 336 с.