

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ВЫБОРУ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ МАЧТОВЫХ СИСТЕМ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ИХ УСТОЙЧИВОСТИ

Гринев В.Б., Левада В.А., Яровой Ю.Н.

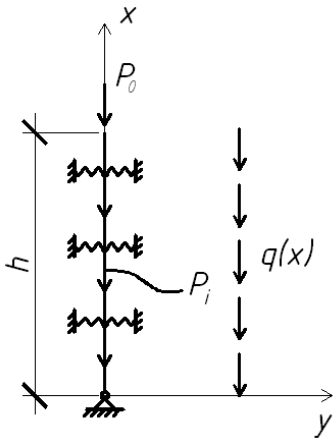
Харьковский национальный университет строительства и архитектуры

Под мачтовой системой обычно понимается упругая система, состоящая из вертикального стержня, закрепленного на нижнем конце и раскрепленного по высоте набором гибких нитей.

Расчетной моделью такой системы может служить сжатый стержень на упруго-податливых опорах, расположенных в точках крепления оттяжек – гибких пологих нитей (канатов). Жесткости опор в общем случае зависят от параметров оттяжек, включая и натяжение соответствующих канатов [1].

Расчетная схема стержня показана на рис. 1. Изгибные деформации в плоскости xu будут описываться системой дифференциальных уравнений первого порядка [2].

$$\frac{dv}{dx} = \varphi; \quad \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M}{EI}; \quad \frac{dM}{dx} = Q + P \cdot \varphi; \quad \frac{dQ}{dx} = 0 \quad (1)$$



Здесь $v(x)$, $\varphi(x)$, $M(x)$, $Q(x)$ – перемещение, угол поворота, изгибающий момент и перерезывающая сила в сечении x ; I – момент инерции поперечного сечения стержня; E – модуль упругости; P – продольная сила.

Будем считать, что стержень имеет переменное по высоте поперечное сечение, так что момент инерции поперечного сечения I и площадь F , есть функции координаты x .

Распределенное по высоте стержня продольное усилие имеет несколько составляющих:

Рис. 1. Расчетная схема стержня

$$P(x) = P_a(x) + P_b(x),$$

$$P_b = \int_x^h q(x) dx;$$

где

$$P_a = P_o + \sum_{i=1}^m \sigma \cdot (x_i - x) \cdot P_i;$$

В случае, когда $q(x)$ есть погонная нагрузка от веса, $q(x) = \mu \cdot F(x)$, μ – удельный вес материала; P_o – продольная сила на верхнем торце (вес оборудования, размещенного на мачте); P_i – сжимающие силы, являющиеся следствием натяжения T_i – тросов оттяжек (рис.2). Функция σ имеет вид:

$$\sigma \cdot (x_i - x) = \begin{cases} 1, & x \leq x_i; \\ 0, & x > x_i; \end{cases}$$

$i = \overline{1, m}$, m – число точек x_i крепления оттяжек.

Система дифференциальных уравнений (1) дополняется граничными условиями:

$$\begin{aligned} a_1 \varphi_{(0)} + b_1 M_{(0)} &= 0; \\ a_2 v_{(0)} + b_2 M_{(0)} &= 0; \\ M(h) &= Q(h) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

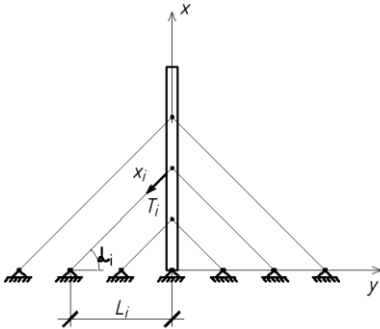


Рис. 2.

Выбором параметров a_1, \dots, b_2 можно реализовать большинство способов закрепления основания мачты. В частности для шарнирного опирания, показанного на рис. 1

$$\begin{aligned} a_2 = b_1 = 0; & & a_1 = b_2 = 0; \\ (v(0) = M(0) = 0) \end{aligned}$$

Если основание жестко зацементировано:

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = 1; & & b_1 = b_2 = 0; \\ (v(0) = \varphi(0) = 0) \end{aligned}$$

На опорах выполняются условия:

$$\begin{aligned} V(x_i^-) &= V(x_i^+); & \varphi(x_i^-) &= \varphi(x_i^+); & M(x_i^-) &= M(x_i^+); \\ Q(x_i^-) + c_i \cdot v(x_i^-) &= Q(x_i^+); \end{aligned} \quad (3)$$

$i = \overline{1, m}$.

Здесь x_i^-, x_i^+ значения координат x слева, справа от точки x_i , c_i величина жесткости опоры в точке x_i относительно перемещений, перпендикулярных оси стержня. Далее будут рассматриваться жесткости c_i только в монтажном состоянии и формулы для их расчета через параметры оттяжек заимствованы из работы [1].

Система, показанная на рис. 1 может достичь положения неустойчивого равновесия при росте различных нагрузок $P_o, P_b, \mu \cdot F$. Вопросы комплексного влияния различных нагрузок на устойчивость связаны с исследованием границы области устойчивости в многомерном пространстве, координатами которого являются величины частных типов нагрузок. Свойства границы области устойчивости, в частности ее выпуклость, были исследованы П.Ф. Панковичем [7]. Однако, далее мы остановимся на частном варианте, когда все нагрузки возрастают пропорционально некоторому параметру α , т.е. на систему действуют нагрузки $\alpha \cdot P_o, \alpha \cdot P_b, \alpha \cdot \mu \cdot F$. Критическое значение параметра $\alpha = \alpha_{кр}$ является первым собственным значением краевой задачи (1) – (3) при подстановке туда $\alpha \cdot P_o, \alpha \cdot P_b, \alpha \cdot \mu \cdot F$. Величина $\alpha_{кр}$ численно характеризует коэффициент запаса устойчивости относительно рассматриваемой системы нагрузок.

Воспользуемся подходом изложенным в [3], для формулировки задачи оптимизации. В качестве варьируемой функции выберем распределение по высоте площади поперечного сечения $F(x)$,

$$F_1(x) \leq F(x) \leq F_2(x) \quad (4)$$

Здесь границы изменения площади заданы. Ограничения (4) создают зону изменения объема материала мачты:

$$V_1 = \int_0^h F_1(x) dx \leq V(x) \leq V_2 = \int_0^h F_2(x) dx \quad (5)$$

Зафиксируем некоторый объем материала V из диапазона (5). Задача оптимизации состоит в нахождении $F(x)$, подчиненной ограничениям (4) и максимизирующей коэффициент устойчивости α , определяемого из краевой задачи (1) – (3).

Необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума [4] для такой задачи, которую далее будем символически обозначать $V \rightarrow \alpha$, можно сформулировать используя результаты [3]. Вопросы оптимизации стержней в задачах устойчивости имеют давнюю историю. Одной из первых в этом направлении была работа [11]. Особенности применения принципа максимума были детально проанализированы в статьях [8-10], а также монографии [3], где предложен также эффективный алгоритм решения подобных задач оптимизации.

Необходимые условия оптимальности будут представлены краевой задачей (1) – (3), замкнутой на оптимальной $F(x)$ условием максимума гамильтониана

$$H = -\frac{M^2}{EI} - \int_0^x \varphi^2 \cdot dx \cdot F - \lambda \cdot F \quad (6)$$

Величина λ представляет собой неопределенный множитель Лагранжа для учета условия постоянства объема. Максимум гамильтониана по F , рассматриваемому как параметр, достигается в каждой точке $x \in [0, h]$.

Таким образом находится зависимость $F(M, \varphi, \lambda)$, которая подставляется в краевую задачу (1) – (3), делая ее нелинейной.

В качестве объекта исследования рассматривается мачтовая система с тремя уровнями оттяжек, высотой 28,0м. Конструктивно мачта представляет собой сборную конструкцию из двухметровых решетчатых секций, с размером сторон 0,5м. Пояса решетчатой мачты выполнены из трубы 48x5, решетка – из круглой стали Ø14мм. Монтажное натяжение оттяжек равно 5,3кН.

Остановимся на выборе схемы варьирования. Будем считать, что в нашем случае мы имеет семь вариантов поперечных сечений труб, показанных на рис. 3.

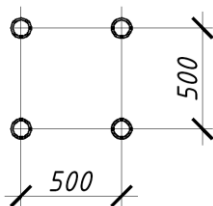


Рис. 3.

В таблице 1 приведены номера по сортаменту, отвечающие им варианты трубчатых сечений с указанием диаметра и толщины стенки, а также соответствующие площади и моменты инерции.

Для того, чтобы избежать работы с дискретными переменными, что в принципе возможно, примем, что площадь сечений, а следовательно и толщины стенок меняются непрерывно от номера 1 до номера 7.

В соответствии с такой схемой варьирования можно принять линейную зависимость момента инерции поперечного сечения от площади $E \cdot I = A \cdot F$, где A – фиксированная величина, подсчитываемая в соответствии с данными таблицы 1.

Понятно, что в ограничениях (4) номер 1, в таблице 1, соответствует F_1 , а номер 7 - F_2 .

Введем обозначение

$$\psi(x) = \int_0^x \varphi^2 dx$$

В этом случае гамильтониан будет иметь вид

$$H = -\frac{M^2}{A \cdot F} - (\psi + \lambda) \cdot F$$

Таблица 1

№ по сортаменту	1	2	3	4	5	6	7
Сечение	Тр.Ø 48x2	Тр.Ø 48x2,2	Тр.Ø 48x2,5	Тр.Ø 48x2,8	Тр.Ø 48x3	Тр.Ø 48x3,2	Тр.Ø 48x3,5
$F, \text{см}^2$	11,561	12,662	14,294	15,904	16,965	18,015	19,572
$I, \text{см}^4$	7256,3	7947	8971	9980,7	10646	11305	12281

Легко видеть, что $\frac{\partial^2 H}{\partial F^2} \leq 0$, следовательно $H(F)$ выпуклая вверх функция для всех $x \in [0, h]$. Она достигает максимума либо в точке F_* , где $\frac{\partial H}{\partial F} = 0$, либо на ближайшей к F_* границе интервала (4). Величина F_* вычисляется из соотношения

$$\frac{\partial H}{\partial F} = \frac{M^2}{A \cdot F^2} - (\psi + \lambda) = 0$$

Отсюда

$$F_* = \sqrt{\frac{I}{A \cdot (\psi + \lambda)}} \cdot |M|$$

Следовательно, оптимальная функция $F(x)$ будем определяться выражением

$$F = \begin{cases} F_2, & F_* \geq F_2; \\ F_*, & F_1 < F_* < F_2; \\ F_1, & F_* \leq F_1. \end{cases} \quad (7)$$

Численное решение данной задачи $V \rightarrow a$ будем проводить по методике, предложенной в [3]. Она состоит в следующем. Выбирается некоторое начальное приближение $F_0(x)$, имеющее заданный объем V . Для заданной функции $F(x) \equiv F_0(x)$ решается линейная краевая задача (1) – (3). Новое приближение $F_1(x)$ находится по формуле (7), при этом величина неопределенного множителя Лагранжа λ подбирается так, чтобы в рамках формулы (7), объем сохранялся.

$$\int_0^h F_1(x) dx = V,$$

т.е. объем сохраняется. Эта процедура достаточно проста. Далее решается линейная краевая задача (1) – (3) для $F(x) \equiv F_1(x)$, находится

новое приближение $F_2(x)$ и т.д. Как продемонстрировано в [3] такой итерационный процесс достаточно быстро сходится. Хороший результат достигается уже по первых итерациях. Причиной хорошей сходимости является то, что характер функции $M(x)$ достаточно стабилен при умеренных вариациях площади $F(x)$.

В качестве иллюстрации данного подхода на рис. 4 а-е приведены результаты решения задач $V \rightarrow \alpha$ для рассматриваемой мачты. При этом фиксированный объем соответствует исполнению всех секций одного и того же сечения, соответствующего $N3$ по сортаменту. Рис.4а соответствует случаю, когда опоры отсутствуют, т.е. мы имеем мачту, заземленную в основании и свободную на вершине. Схематически показано условие закрепления, а также формы перемещения $V(x)$ и изгибающего момента $M(x)$ в случае потери устойчивости.

Отметим известный факт: величины $V(x)$, $M(x)$ определяются с точностью до постоянного множителя, так что значения имеют не их абсолютные величины, а соотношения между ними.

Правее показано оптимальное распределение номеров сортамента по высоте мачты, максимизирующее коэффициент запаса. По вертикали отложены координаты сечений в метрах, начиная от основания мачты, а по горизонтали – номера по сортаменту. Пунктиром показано принятое в построениях непрерывное распределение геометрических параметров.

Дискретное распределение выбрано таким образом, чтобы объем материала для дискретного набора мало отличался от теоретического непрерывного варианта. Отличие коэффициента запаса по устойчивости дискретного и непрерывного варианта составляет величину порядка 1%. В крайнем правом столбце показано распределение номеров сортамента по высоте.

На рис. 4в показано оптимальное дискретное распределение сортамента по высоте для случая одной опоры. При это $L_1=6м$ (рис.2). Монтажная жесткость опоры подсчитывается по формулам из работы [1]

$$c_1=2870.62кг/см$$

Натяжение вант создает сжимающее усилие, действующее вдоль оси мачты

$$P_1=9404.75кг$$

Рис. 4в наглядно демонстрирует, как оптимальное распределение геометрических параметров по высоте «отслеживает» характер изменений формы изгибающего момента.

Рис. 4с, d показывают, как меняется ситуация, когда упругая опора размещается последовательно в точках $x_2=14м$, $x_3=24м$. В этих случаях

$L_2=14,1\text{м}$, $L_3=14,1\text{м}$. Соответствующие величины монтажных жесткостей и осевых сил

$$c_2=1261\text{кг/см}; c_3=567\text{кг/см}; P_2=14304,7\text{кг}; P_3=16464\text{кг};$$

Рис. 4е иллюстрирует случай, когда есть опоры в точках $x_2=14\text{м}$ и $x_3=24\text{м}$, но отсутствует опора в точке $x_1=6\text{м}$.

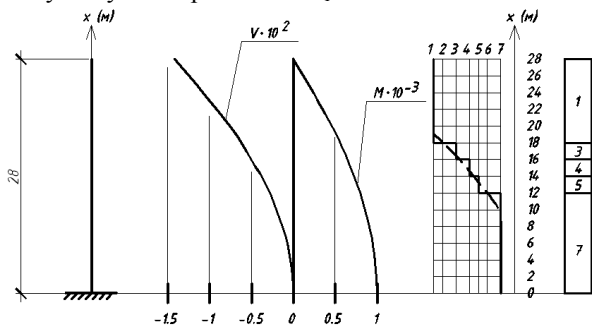


Рис. 4а

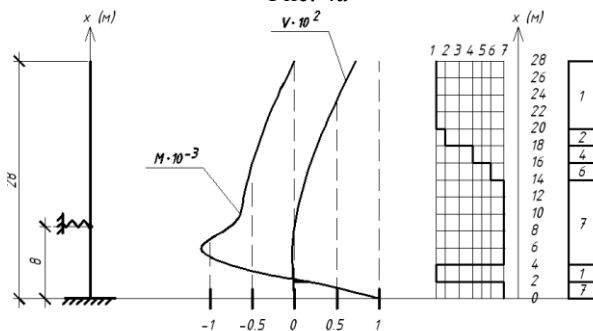


Рис. 4б

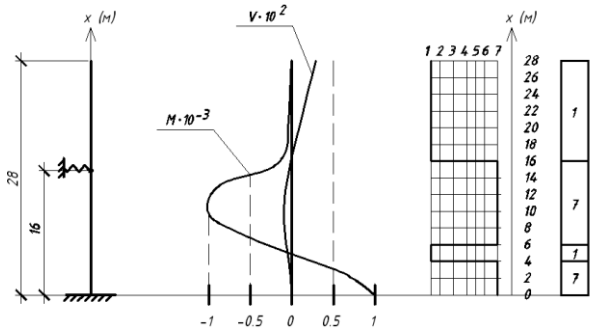


Рис. 4с

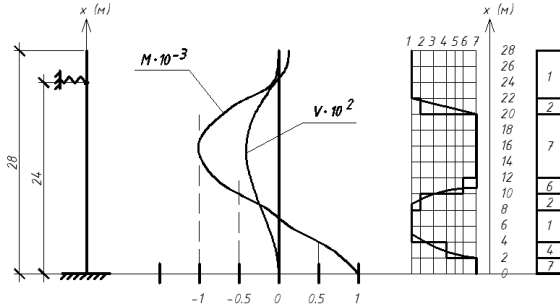


Рис. 4d

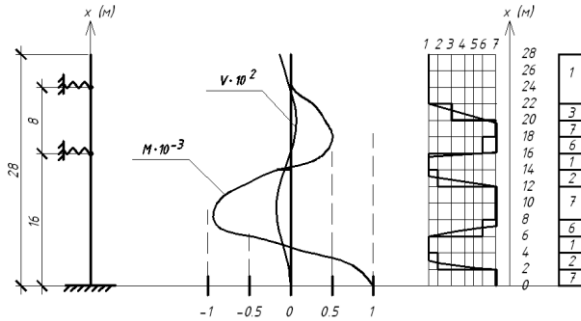


Рис. 4е

На рис.5 приведена замкнутая кривая в координатах объем материала – коэффициент запаса по устойчивости. При этом цифрами 1, 2, ..., 7 на оси объемов обозначены величины объемов, соответствующие исполнению всех секций мачты из труб одного и того же сортамента, соответственно $N1, N2, \dots, N7$. Точки нижней кривой ACB соответствуют коэффициентам запаса по устойчивости для мачт постоянного по высоте поперечного сечения. Верхняя кривая ADB отвечает оптимальным распределениям, максимизирующим коэффициент запаса по устойчивости. Расчеты проводились для случая трех опор, точки расположения которых и параметры такие же, как и в рассмотренном ранее примере. На рис. 6 приведено оптимальное распределение для точки D, рис. 5.

Вывод. Как отмечено в [3], кривая ADB характеризует также решения так называемых двойственных задач, а именно задач нахождения законов распределения геометрических характеристик по высоте мачты, минимизирующих объем материала при фиксированном коэффициенте запаса по устойчивости; для такой задачи естественно использовать обозначение $\alpha \rightarrow V$; в частности решение такой задачи определяет точку D' на рис.5. При этом если отрезок CD характеризует эффект

повышения коэффициент запаса по устойчивости относительно точки С, то отрезок DС демонстрирует снижение объема материала по отношению к точке С.

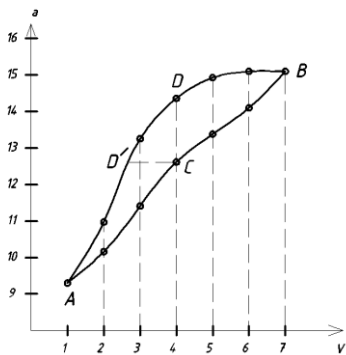


Рис. 5

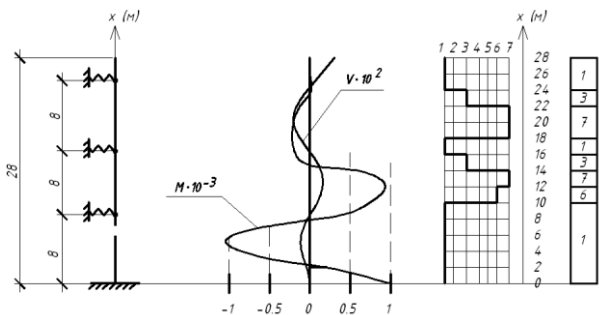


Рис. 6

Summary

In connection with active development of mobile communication, there was a necessity utility of tower and mast construction for placing of antenna equipment. The most claimed construction are guyed masts, that requires perfection of methods of their construction and designing.

Литература

1. Дривинг А.Я. Устойчивость мачт на оттяжках. - М., Издательство литературы по строительству, 1964 – 112 с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем.- М.,Издательство «Наука», 1967. – 984с.
3. Гринев В.Б., Филиппов А.П. Оптимизация стержней по спектру собственных значений.-Киев, Наукова думка, 1979.-211с.
4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гаткрелидзе Р.В. Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М., Наука, 1969. – 384с.
5. Савицкий Г. А. Основы расчета радиомачт. М.:Связьиздат, 1953. – 275с.
6. Меркин Д.Р. Введение в механику гибкой нити. М.: Наука, 1980. – 241с.
7. Папкович П.Ф. Труды по строительной механике корабля. В 4т, т.4., Л.:Судостроение, 1963.-552с.
8. Гринев В.Б., Филиппов А.П. Об оптимальных очертаниях стержней в задачах устойчивости. – Строительная механика и расчет сооружений, 1975, №2, с.21-27.
9. Гринев В.Б., Филиппов А.П. Об оптимальных стержнях в задачах устойчивости под действием распределенных нагрузок. – Строительная механика и расчет сооружений, 1975, №6, с.23-27.
10. Гринев В.Б., Филиппов А.П. Оптимальные многопролетные стержни и арки – Строительная механика и расчет сооружений, 1976, №6, с.17-21.
11. Ченцов Н.Г. Стойки наименьшего веса. – Центр. аэрогидродинамич. ин-та им. проф. Н. Е. Жуковского, 1936, вып. 265, с.1-48.