УДК 513.88 519.95

# КРИТЕРИЙ СВЯЗИ РЕШЕНИЙ ПАРНЫХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОЕКТОРАМИ

**Полетаев Г.С.,** *к.ф.-м.н., доц.*

*Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Украина*

## Вводные положения и предмет изучения

**0.1.** В теоретических и прикладных вопросах встречаются разных видов и классов уравнения, которые можно трактовать как парные. С их помощью бывает возможным моделировать взаимосвязи известных и неизвестных величин [1-7]. Простейшие парные уравнения относительно неизвестного вектора из $R_3$ возникают в некоторых задачах: статики на определение сил взаимодействия; - кинематики твердого тела - на восстановление угловых скоростей [2, 4, 6], а также других. Парные уравнения с неизвестной матрицей, включая парные матричные уравнения с проекторами, также встречаются в задачах механики. Например, в задачах, которые можно поставить для двух разных совокупностей, одинаковых, внутри каждой совокупности, по геометрическому и физическому описанию, тел (о равновесии,- о прогибах и других). Аналогично, для двух разных совместно рассматриваемых тел (в частности, элементов строительных конструкций, сооружений) под действием, одинаковой на каждое из этих тел, нагрузки при «n» её вариантах. Известны, связанные с интегральными типа Винера–Хопфа, парные интегральные уравнения типа свертки [8-12]. Это один из замечательных объектов математических исследований. Они связаны с задачами математической и теоретической физики, задачами теории аналитических функций, родственными задаче Римана–Гильберта–Привалова. Оказывается, что в сериях постановок задачи разрешимости, все отмеченные парные уравнения допускают трактовку, как частные реализации в конкретных кольцах парных уравнений (уравнений – моделей) общих видов в абстрактных кольцах с факторизационными парами[1, 3, 5, 7]. Отметим, что для ряда классов и видов уравнений: числовых, функциональных, матричных, интегральных, бывает возможным обнаружить связь между некоторыми решениями. Ограничимся далее выяснением такой связи для соответствующих парных матричных уравнений с проекторами.

**0.2.** Рассмотрим ниже вопрос о связи решений парных матричных уравнений с проекторами относительно неизвестной матицы $X \in R_{n\times n}$ вида:

$$\begin{cases} [A_1 X]^- = C^-, \\ [A_2 X]^+ = B^+. \end{cases} \tag{1}$$

Причём, между решениями уравнений с произвольной правой частью и решений этого же вида (1) абстрактных парных матричных уравнений с проекторами и этих же уравнений с правой частью, равной единичной матрице [1, 7]. Уравнение (1) не переписывается в форме одной системы линейных алгебраических уравнений. Это важно, как для обозримости, упрощений при больших значениях «n», так и для демонстрации единства подхода к парным уравнениям.

Рассматриваемые здесь парные матричные уравнения с проекторами (1) являются общим подвидом абстрактных парных матричных уравнений с проекторами в кольце матриц общего вида:

$$\begin{cases} (A_{11} X A_{12})^- = C^-, \\ (A_{21} X A_{22})^+ = B^+. \end{cases} \tag{2}$$

При этом важна трактовка кольца квадратных матриц, как кольца с факторизационной парой подколец, образованной соответствующими треугольными. В свою очередь, парные уравнения (2) можно трактовать как реализации в кольцах матриц соответствующих парных уравнений в абстрактных кольцах с факторизационными парами [1, 3, 5, 7].

## 1. Обозначения и постановка задачи

**1.1.** Следуя [13, 14] (ср.[15]) обозначим через $R_{n\times n}$ кольцо вещественных числовых квадратных матриц размера $n\times n$, $n\ge 2$, $n\in N$. Пусть $R^+_{n\times n}$, $R^-_{n\times n}$ - подкольца нижних и верхних треугольных матриц из $R_{n\times n}$, соответственно. Через $p^-$, $p^+$ обозначим [1, 3, 5, 7, 15] коммутирующие проекторы: $R_{n\times n} \to R^-_{n\times n}, R_{n\times n} \to R^+_{n\times n}$, соответственно. Каждой матрице $A\in R_{n\times n}$ они ставят в соответствие матрицы $A^- := p^-(A) \in R^-_{n\times n}$, $A^+ := p^+(A)\in R^+_{n\times n}$, получающиеся из $A$ заменой её элементов, расположенных для $A^-$ ниже, а для $A^+$ выше главной диагонали,- нулями. Положим $p^0 := p^+p^-(= p^-p^+)$; $p_+ := p^+ - p^0$; $p_- := p^- - p^0$; $R^0_{n\times n} := p^0(R_{n\times n})$, $\left(R_{n\times n}\right)_\pm := p_\pm\left(R_{n\times n}\right)$. Легко видеть, что, $R^{\mp}_{n\times n} := p^{\mp}(R_{n\times n})$, $R^0_{n\times n} := R^+_{n\times n} \cap R^-_{n\times n}$. Результат применения введенных проекторов к матрицам, а также принадлежность матрицы из $R_{n\times n}$ подмножеству $R_{n\times n}^{\mp,0}$, $\left(R_{n\times n}\right)_{\pm}$ будем отмечать соответствующими индексами +, -, 0.

**1.2.** В уравнениях вида (1), относительно неизвестной квадратной матрицы X $\in R_{n\times n}$, матрицы–коэффициенты $A_1, A_2 \in R_{n\times n}$ и матрицы $C^- \in R_{n\times n}^-$, $B^+ \in R_{n\times n}^+$ считаются известными. Всякую матрицу $X \in R_{n\times n}$, удовлетворяющую парному матричному уравнению с проекторами (1), будем называть его решением. Под задачей о связи решений будем понимать здесь задачу, которая состоит в отыскании формулы, представляющей решения в кольце матриц $R_{n\times n}$ уравнения (1) через известные его коэффициенты, операции в $R_{n\times n}$, действующие в этом кольце проекторы и решения $X = X_E \in R_{n\times n}$ парного уравнения:

$$\begin{cases} [A_1 X_E]^- = E, \\ [A_2 X_E]^+ = E; \end{cases} \tag{3}$$

где $E \in R_{n\times n}$ - единичная матрица в $R_{n\times n}$, а также условий существования такой связи [1, 7].

## 2. Главный результат

**2.1.** Решение $X = X_E \in R_{n\times n}$ абстрактного парного уравнения (1) с матрицами-коэффициентами $A_1, A_2 \in R_{n\times n}$ и правой частью $C^- = B^+ = E,$ где $E \in R_{n\times n}$ - единичная матрица, то есть уравнения (3), играет в теории разрешимости этих уравнений (1) особую роль. В соответствующих условиях через это решение может быть представлено решение $X \in R_{n\times n}$ уравнения (1) с произвольной правой частью $C^- \in R_{n\times n}^-$, $B^+ \in R_{n\times n}^+$. Установлены следующие теоремы о связи решений парных уравнений (1) и (3) в $R_{n\times n}$.

**Теорема 1 (Критерий связи решений парных матричных уравнений с проекторами)**. Пусть в уравнении (1) матрицы-коэффициенты $A_1, A_2 \in R_{n\times n}$, $n \in N$, $n \geq 2$ и существует матрица - решение $X_E \in R_{n\times n}$ уравнения (3). Тогда для того, чтобы уравнение (1) при любой правой части $C^- \in R^-_{n\times n}$, $B^+ \in R^+_{n\times n}$ имело решение $X \in R_{n\times n}$, представимое через $X_E$, $A_1, A_2$, $C^-, B^+$ формулой:

$$X = X_E\{[(A_1X_E)^{-1}C^-]_- + [(A_2X_E)^{-1}B^+]^+\}, \tag{4}$$

необходимо и достаточно, чтобы матрицы $X_E$, $A_1, A_2$ были неособенными, $\det A_1 = \det A_2 \neq 0$ и выполнялось условие совместности:

$$[(A_1X_E)^{-1}C^-]^0 = [(A_2X_E)^{-1}B^+]^0. \tag{5}$$

Если существуют решение $X_E \in R_{n\times n}$ уравнения (3) и решение $X \in R_{n\times n}$ уравнения (1) с некоторой правой частью $C^- \in R^-_{n\times n}$, $B^+ \in R^+_{n\times n}$, тогда это последнее решение $X$ в $R_{n\times n}$ для указанной правой части единственное.

**Теорема 2. (Критерий связи решений парных матричных уравнений с проекторами).** Пусть в уравнении (1) матрицы-коэффициенты $A_1, A_2 \in R_{n\times n}$, $n \in N$, $n \geq 2$, $\det A_1 = \det A_2 \neq 0$ и существует матрица - решение $X_E \in R_{n\times n}$ уравнения (3). Тогда для того, чтобы это уравнение (1) при любой правой части $C^- \in R^-_{n\times n}$, $B^+ \in R^+_{n\times n}$ имело решение $X \in R_{n\times n}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие совместности (5). При его выполнении уравнение (1) имеет в $R_{n\times n}$ единственное решение и это решение можно найти через $X_E$, $A_1, A_2$, $C^-, B^+$ по формуле (4).

Отметим, что условие (5), по сути, является требованием совпадения соответствующих диагональных элементов произведений матриц в квадратных скобках слева и справа в равенстве (5). Опускаемое доказательство, можно провести непосредственно или на основе результатов [1, 7].

## 3. О решении $X = X_E \in R_{n\times n}$, следствиях и иллюстративных примерах

**3.1.** Решение $X_E \in R_{n\times n}$ парного уравнения (3) существует и может быть построено по явным формулам, например, при соответствующих правильных факторизациях матриц-коэффициентов или элементов, строящихся по этим матрицам $A_1, A_2$ [1].

**3.2.** Иногда матрицу-решение $X_E \in R_{n\times n}$ уравнения (3) найти весьма легко. Например, в серии случаев, когда матрицы-коэффициенты являются неособенными треугольными. В частности, при $A_1 = A_1^+ \in R_{n\times n}^+, A_2 = A_2^- \in R_{n\times n}^-$ и таких, что $A_1^0 = A_2^0; \left|A_1^0\right| \neq 0,$ решение $X_E = (A_1^0)^{-1} = (A_2^0)^{-1}.$ Действительно, в этом случае, $[A_1 X_E]^- = [A_1^+(A_1^0)^{-1}]^- = A_1^0(A_1^0)^{-1} = E;$ $[A_2 X_E]^+ = [A_2^-(A_1^0)^{-1}]^+ = [A_2^-(A_2^0)^{-1}]^+ = A_2^0(A_2^0)^{-1} = E.$ Если же, кроме того, все элементы главных диагоналей неособенных треугольных матриц-коэффициентов $A_1 = A_1^+ \in R_{n\times n}^+, A_2 = A_2^- \in R_{n\times n}^-$ являются единицами, то оказывается, что $X_E = E$. Условие (5) и формула (4) в этом случае преобразуются, соответственно, к виду:

$$[A_2^{-1}B^+]^0 = [A_1^{-1}C^-]^0 \quad , \tag{6}$$

$$X = \left[A_1^{-1}C^-\right]_- + \left[A_2^{-1}B^+\right]^+. \tag{7}$$

Укажем, что установленные результаты можно углубить, используя известные или получаемые из известных условия обратимости и условия существования правильной факторизации квадратных матриц [15, С. 276-278; 16, С. 43-52] .

**3.3.** Приведём простейшие иллюстрирующие некоторые идеи применений результатов примеры.

**1.)** Установить существование (не существование) матрицы $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, удовлетворяющей при каких-либо, заранее неизвестных, например, вещественных числовых элементах $z_{\mathrm{I}_{21}}; z_{\mathrm{II}_{12}}$, – парному уравнению:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_{\mathrm{I}_{21}} & 2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z_{\mathrm{II}_{12}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}. \tag{8}$$

Стало быть, и каждому из матричных с частично неизвестной правой частью уравнений, составляющих это парное уравнение (8). Такую матрицу $X$ будем называть искомым решением уравнения (8).

Очевидно, что парное уравнение (8) представляет собой парное уравнение, относительно неизвестной матрицы $X$ , вида:

$$\begin{cases} A_1 X = C, \\ A_2 X = B; \end{cases}$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}; A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_{\mathrm{I}_{21}} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z_{\mathrm{I}_{21}} & 0 \end{pmatrix} = C^- + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z_{\mathrm{I}_{21}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$C^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = C^0;$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & z_{\mathrm{II}_{12}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & z_{\mathrm{II}_{12}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B^+ + \begin{pmatrix} 0 & z_{\mathrm{II}_{12}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B^0.$$

С помощью введенных проекторов, легко обнаружить, что при сделанных предположениях всякое искомое решение $X \in R_{2\times 2}$ уравнения (8) является также решением в $R_{2\times 2}$ парного уравнения (1) с указанными выше значениями матриц $A_1.A_2;$ $C^-$, $B^+$. Обратно, всякое решение $X \in R_{2\times 2}$ парного уравнения (1) с такими же коэффициентами $A_1.A_2$ и правой частью $C^-$, $B^+$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = C^0; B^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B^0,$$

будет и искомым решением парного уравнения (8), если выбрать вещественные числа $z_{\mathrm{I}_{21}}; z_{\mathrm{II}_{12}}$, соответствующими.

Очевидно, $X_E = E$, где через $X_E$, как и ранее, обозначено, решение в $R_{2\times 2}$ уравнения вида (3) при

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $A_1 X_E = A_1; \left(A_1 X_E\right)^{-1} = A_1^{-1}; \left(A_1^{-1}\right)^0 = E;$

$$A_2 X_E = A_2; \left(A_2 X_E\right)^{-1} = A_2^{-1}; \left(A_2^{-1}\right)^0 = E;$$

$$\left[\left(A_1 X_E\right)^{-1} C^{-}\right]^0 = \left[A_1^{-1} C^0\right]^0 = C^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\left[\left(A_2 X_E\right)^{-1} B^{+}\right]^0 = \left[A_2^{-1} B^0\right]^0 = B^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq C^0.$$

Условие (6), в которое преобразуется, необходимое и достаточное, условие (5), - нарушено. Решений $X \in R_{2\times 2}$ уравнения (1), а, стало быть, и искомых решений парного уравнения (8) в $R_{2\times 2}$ не существует.

**2.)** В развёрнутом виде, парное с частично неизвестной правой частью уравнение (8), относительно неизвестной матрицы X, можно представить равносильной системой восьми равенств, неизвестными в которой являются элементы $x_{ij}$ матрицы $X; i, j = 1, 2;$ а также некоторые правые части уравнений системы:

$$\begin{cases} 1.)\, x_{11} = 1; \\ 2.)\, x_{12} = 0; \\ 3.)\, 2x_{11} + x_{21} = z_{\mathrm{I}_{21}} = ? \\ 4.)\, 2x_{12} + x_{22} = 2; \\ 5.)\, x_{11} - x_{21} = 1; \\ 6.)\, x_{12} - x_{22} = z_{\mathrm{II}_{12}} = ?; \\ 7.)\, x_{21} = 0; \\ 8.)\, x_{22} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Задача состоит в нахождении элементов матрицы X, при условии, что $z_{\mathrm{I}_{21}}; z_{\mathrm{II}_{12}}$ пока неизвестны. Решений системы уравнений (9) относительно $x_{ij}$ ; $i, j = 1,2$ не существует. Равенства 2, 4, 8 противоречивы при любых вещественных числах $z_{\mathrm{I}_{21}}; z_{\mathrm{II}_{12}}$ .

В примере было *"n"=2*; $R_{nxn} = R_{2\times 2}$. При *"n"*≥3, даже, запись эквивалентной парному матричному уравнению с проекторами системы линейных алгебраических уравнений становится громоздкой. А, если уравнение и систему типа (8), (9) решать при *n*=10;100;1000;…? Вместе с тем, при произвольном $n \geq 2$, $n \in N$ для матричных парных уравнений типа (1), (8) и равносильных им систем типа (9), опираясь на приведенные результаты, можно получать содержательные выводы.

**3.)** Найти в $R_{nxn}$; *n≥2,* матрицу $X = (x_{ij}); i, j = \overline{1, n},$ такую, что:

$$\begin{cases} p^{-}[A_1 X] = p^{-}[C] \,, \\ p^{+}[A_2 X] = p^{+}[B] \,; \end{cases} \tag{10}$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ a_{21}^{(1)} & 1 & 0 & . & . & 0 \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n-11}^{(1)} & . & . & . & 1 & 0 \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & . & . & a_{nn-1}^{(1)} & 1 \end{pmatrix} = A_1^{+};$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & . & . & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & . & . & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & . & . & a_{3n}^{(2)} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & 1 & a_{n-1n}^{(2)} \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_2^-;$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & . & . & . & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & . & . & . & x_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & . & . & . & x_{nn} \end{pmatrix} = (x_{ij}); i, j = 1, \dots, n;$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & . & . & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ c_{n-11} & . & . & . & c_{n-1n-1} & 0 \\ c_{n1} & c_{n2} & . & . & . & c_{nn} \end{pmatrix} = C^+,$$

так что

$$p^-[C] = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & c_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & c_{nn} \end{pmatrix} = C^0;$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & . & . & . & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & . & . & . & b_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & b_{n-1n-1} & b_{n-1n} \\ 0 & 0 & . & . & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}=B^{-};$$

так что

$$p^{+}[B]=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & b_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}=B^{0}.$$

Последнее парное уравнение (10) с указанными коэффициентами и правой частью в развёрнутом относительно элементов неизвестной матрицы $X\in R_{nxn}$ виде привело бы к $2n^2$ равенствам. Если $n=10$, это 200, а при $n=1000$, - это $2{\cdot}10^6$ равенств с частично неизвестными правыми частями. Громоздкость такой формы записи при больших "$n$" здесь очевидна. Вместе с тем, если, хотя бы, при одном значении $i=i_o, 1\le i\le n; n\in N, n\ge 2$ окажется, что $c_{i_0 i_0}\ne b_{i_0 i_0}$, то условие (6), равносильное в рассматриваемой ситуации совпадению диагональных матриц:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & c_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & c_{nn} \end{pmatrix}==\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & b_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & b_{nn} \end{pmatrix},$$

будет невыполненным. Следовательно, уравнение (10) будет неразрешимым в $R_{nxn}$. Так будет, например, когда в (10): $c_{11}=1=c_{22}=\ldots=c_{nn}$; $b_{11}=1=b_{22}=\ldots=b_{n-1,n-1}; b_{nn}=-1.$

Такого рода ситуацию мы имели в первом примере выше.

В парном уравнении (10), при этом, матрицы- коэффициенты $A_1, A_2$, являясь, соответственно, нижней и верхней треугольными,- на диагоналях имеют все элементы равные "1". Остальные их элементы, из, необязательно, равных нулю, могут быть любыми числами.

**4.)** Для парного с проекторами уравнения относительно $X \in R_{nxn}$; *n≥2*:

$$\begin{cases} [A_1 X]^- = C^-, \\ [A_2 X]^+ = B^+; \end{cases} \tag{11}$$

как и для матричного парного относительно неизвестной матрицы $X \in R_{nxn}$ с некоторыми соответствующими и пока неизвестными матрицами $Z_{\mp} \in \left(R_{nxn}\right)_{\mp}$ уравнения:

$$\begin{cases} A_1 X = C^- + Z_+ \\ A_2 X = B^+ + Z_-, \end{cases} \tag{12}$$

где известные $A_1 = A_1^+; A_2 = A_2^-; A_1^0 = A_2^0 = E; E -$ единичная матрица из $R_{nxn}$, очевидно, что при $C^- = B^+ = E$ матрица $X = X_E = E \in R_{nxn}$ является решением. Тогда, при, необходимом и достаточном, условии:

$$\left[A_2^{-1} B^+\right]^0 = \left[A_1^{-1} C^-\right]^0, \tag{13}$$

-прочих условиях теоремы **2** и любых $C^- \in \left(R_{nxn}\right)^-; B^+ \in \left(R_{nxn}\right)^+$,

- неизвестную матрицу $X \in R_{nxn}$ можно найти по формуле:

$$X = \left[A_1^{-1} C^-\right]_- + \left[A_2^{-1} B^+\right]^+. \tag{14}$$

**5.)** Пусть требуется найти матрицу $X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ - решение в $R_{3\times 3}$, матричного парного уравнения с проекторами вида (11), где $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ в случаях: $a)\tilde{N}^{-}=B^{+}=E;$

б) $C^{-}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B^{+}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

В случае а), очевидно, матрица – решение $X=X_E=E$, где *E*- единичная матрица, размера $3\times 3$.

В случае б), т.е. при $C^{-}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B^{+}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, вычисляем:

$$A_1^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A_2^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверяем условие (13):

$$\left(A_1^{-1}C^{-}\right)^0=\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} \end{pmatrix};$$

$$\left(A_2^{-1}B^{+}\right)^0=\begin{pmatrix} \boxed{9} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{*} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{*} \end{pmatrix}\neq\left(A_1^{-1}C^{-}\right)^0.$$

Условие (13) не выполнено. Искомых решений нет.

Переходя к СЛАУ, парное уравнение (11) для рассматриваемого случая можно переписать в виде 18 равенств, часть из которых имеет неизвестные правые части и среди которых действительно есть противоречивые.

**6.)** Пусть при прежних (как в п. **5.**) матрицах-коэффициентах $A_1, A_2$ в (11), (12) будет:

$$C^{-} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B^{+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем парное, равносильное уравнению (11), относительно неизвестной матрицы $X \in R_{3\times 3}$ , уравнение (12) в виде:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ ? & 1 & 0 \\ ? & ? & 4 \end{pmatrix} \left(\equiv C^{-} + Z_{+}\right), \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ? & ? \\ 0 & 1 & ? \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left(\equiv B^{+} + Z_{-}\right). \end{cases} \qquad (15)$$

Это уравнение (15) можно переписать и так:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + Z_{+}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} + Z_{-}; \end{cases}$$

где

$Z_{+} \in \left(R_{3\times 3}\right)_{+}, Z_{-} \in \left(R_{3\times 3}\right)_{-}$ – соответствующие пока неизвестные матрицы, легко вычисляемые, после нахождения искомой матрицы $X \in R_{3\times 3}$. Нахождение этих матриц $Z_{+} \in \left(R_{3\times 3}\right)_{+}, Z_{-} \in \left(R_{3\times 3}\right)_{-}$ здесь мы своей целью не ставим.

Не проверяя условие совместности (13), для парного уравнения (11) построим по формуле (14) матрицу $X \in R_{3\times3}$:

$$X = \left[A_1^{-1}C^-\right]_- + \left[A_2^{-1}B^+\right]^+ = \left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&0&3\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}\right]_- +$$

$$+\left[\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}\right]^+ = \begin{pmatrix}9&0&3\\0&1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}.$$

Подстановкой выясним, решение ли это? Последовательно, находим:

$$\begin{cases}\left(A_1X\right)^- = \left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&0&3\\0&1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}\right]^- = \begin{pmatrix}9&0&3\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix} = C^-;\\ \left(A_2X\right)^+ = \left[\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&0&3\\0&1&0\\-4&1&1\end{pmatrix}\right]^+ = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-4&1&1\end{pmatrix} = B^+.\end{cases}$$

Итак, построенная матрица $X \in R_{3\times3}$ - действительно решение парного уравнения (11), а, стало быть, и парного уравнения (15), относительно неизвестной матрицы $X \in R_{3\times3}$ , при неизвестных пока $Z_+ \in \left(R_{3\times3}\right)_+, Z_- \in \left(R_{3\times3}\right)_-$, соответственно, в рассматриваемой ситуации. В силу теоремы **2,** необходимое и достаточное, условие в форме (13) выполнено, а решение это единственное в $R_{3\times3}$ для рассматриваемого парного уравнения (11) относительно матрицы $X \in R_{3\times3}$. Действительно,

$$\left(A_1^{-1}C^-\right)^0 = \begin{pmatrix}\boxed{9}&0&0\\0&\boxed{1}&0\\0&0&\boxed{1}\end{pmatrix};\left(A_2^{-1}B^+\right)^0 = \begin{pmatrix}\boxed{9}&0&0\\0&\boxed{1}&0\\0&0&\boxed{1}\end{pmatrix} = \left(A_1^{-1}C^-\right)^0.$$

### *Выводы*

Ряд полезных положений, в частности, о связи решений парных матричных уравнений с проекторами (1) можно получать в рамках единых подходов. Эти подходы основаны на трактовке указанных уравнений как реализаций, в соответствующем кольце матриц, некоторых изучаемых особо уравнений в кольцах с факторизационными парами. Итоги изучения связи решений абстрактных парных матричных уравнений с проекторами применимы, например, при решении конкретных, вида (1), парных матричных уравнений с проекторами и связанных с ними уравнений вида (12), а также для ориентировки в направлениях поиска версий соответствующих положений для интегральных уравнений типа свёртки и некоторых других.

Отметим, что основные результаты работы доложены автором на Международной научно-технической конференции «Гидротехническое и транспортное строительство», проведенной в Одесской государственной академии строительства и архитектуры в октябре 2012 года.

**Summary**

**The connection between the solutions of the abstract paired matrix equations with respect to unknown matrix $X \in R_{nxn}, n \in N; n \geq 2$ is presented. This criterion is proved.**

### *Литература*

1. Полетаев Г. С. Абстрактный аналог парного уравнения типа свертки в кольце с факторизационной парой // Укр. матем. журн. – 1991, т. 43, № 9. – С. 1201 – 1213.

2. Полетаев Г. С. Парные уравнения в кольце с факторизационной парой и задача об угловой скорости // I Междунар. конф. «Экологическое моделирование и оптимизация в условиях техногенеза». Тез. докл. – Минск, БГПА, 1996. – С. 148.

3. Полетаев Г. С. Парные уравнения с правильно факторизуемыми коэффициентами // Укр. матем. конгресс. Международн. конф. по функц. анализу. – К., 2001. – С. 79.

4. Полетаев Г. С. О парных и тройных векторных уравнениях // Вестник Херсон. гос. техн. ун-та.- Вып. 2(15) – Херсон, 2002. – С. 373 – 377.

5. Полетаев Г. С. Некоторые результаты о парних уравнениях в кольцах с факторизационными парами // Вісник Харківського національного університе-

ту.-2002, № 582. – Серія “Математика, прикл. матем. і мех. ”. – Вып. 52. – С. 143 – 149.

6. Подлозный Э.Д., Полетаев Г.С. Об уравнениях в кольцах с векторным произведением и задачах механики//Весці нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-тэхнічных навук.-2002.-№3.-С. 95-101.

7. Poletaev G.S. Connection of solutions of the abstract paired equations in the rings with factorization pairs// Birkhauser Verlag Basel/Switzerland,
Operator Theory: Advances and Applications. -2009. - Vol. 191.-P. 479-484.

8. Рапопорт И.М. О некоторых «парных» интегральных и интегро-дифференциальных уравнениях // Сборник трудов института математики АН УССР. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1949. — 12. — С. 102—118.

9. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И./ Уравнения типа свертки. - М.: Наука, 1978. - 296с.

10. Крейн М.Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Успехи матем. наук. — 1958. — 13, вып. 5(83). — С. 3—120.

11. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. О парном интегральном уравнении и его транспонированном I // Теорет. и прикл. математика. - Львов.- 1958.- №1.- С. 58-81.

12. Полетаев Г.С. Парное уравнение типа свертки с ядрами из различных банаховых алгебр // Укр. матем. журн. — 1991. — 43, № 6. — С. 803—813.

13. Полетаев Г. С. О постановках, матричных моделях некоторых обратных задач механики балок и представлениях факторизованных матриц влияния // Матем. модел. в образов., науке и пром. – Международн. ак. наук ВШ. – С.-Пб. – 2000. – С. 146 – 148.

14. Полетаев Г.С. Об уравнениях и системах одного типа в кольцах с факторизационными парами. – К., 1988. – 20 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т математики: 88.31).

15. McNabb A., Schumitzky A. Factorization of Operators - I: Algebraic Theory and Examples // J. Funct. Anal. – 1972. –v. 9, № 3. – P. 262 – 295.

16. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1988.-549с.